WANDSWORTH
LS 1103 B

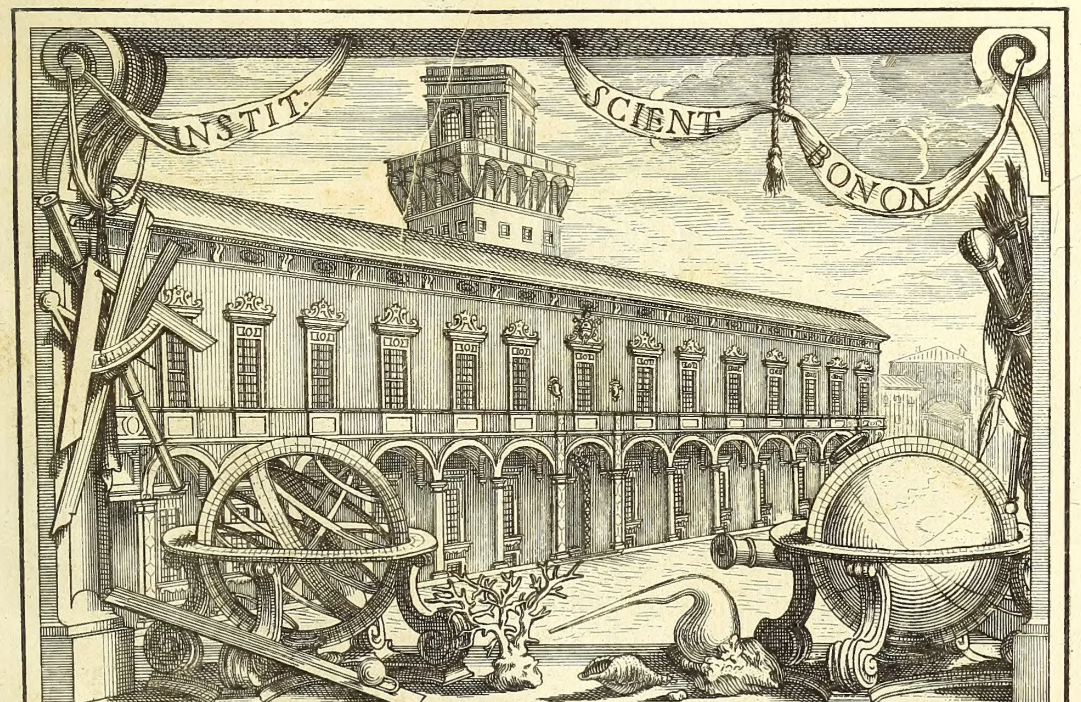
S. 1103. B. 5

DE BONONIENSI

SCIENTIARUM ET ARTIUM INSTITUTO ATQUE ACADEMIA

COMMENTARII.

TOMI SECUNDI PARS TERTIA.



BONONIAE

Ex Typographia Laelii a Vulpe. MDCCXLVII.
SUPERIORUM PERMISSU.

NATURAL HISTORY

BENEDICTO XIIII

PONTIFICI MAXIMO

Bononienſis Scientiarum Instituti

PATRI

AMANTISSIMO.

ACADEMICORUM QUORUMDAM OPUSCULA

VARIA.

PRAEFATIO.

HAnc enimvero partem tertiam, quæ eadem tomi ſecundi commentariorum bononienſis Inſtituti atque Academiæ ultima eſt, cum publice typis mandarem, plane intellexi, in magnis præclariſque rebus audendum ſemper eſſe aliquid. Nam profecto numquam partis huius editionem ſuſcepiſſem, neque in hanc quaſi novam provinciam ingredi auſus eſſem, niſi paullo plus ſperaſſem, quam ratio ipſa poſtularet. Dicam, quod verum eſt, & morem ſcribendi ſequar meum: in quo ſi ab aliquibus reprehendor, quod clariſſimæ Academiæ, mihique coniunctiſſimæ, res ſcribens, eius non modo laudes, ſed etiam incommoda interdum exponam, & quaſdam quaſi maculas, quas alii obtegendas eſſe putant, aperiam; non tam horum obiurgationes pertimeſco, quam illis probari cupio, qui veritatem appetentes in omnibus, huiuſmodi præſertim narrationes ſincere ſcribi volunt. Igitur cum tertii huius voluminis editionem primum aggreſſus ſum, vix credi poteſt, quanta opuſculorum, quibus illud componere poſſem, inopia laborarem; vix ut tantum ſuppeteret, quantum ſatis eſſet ad paucas paginas conficiendas; non quod Academia non rebus abundaret ex omni genere quamplurimis (quod illi facile intelligent, qui huius libri

vel

vel titulos tantum legerint); ſed aliæ erant ab aliis inter multas diſperſaſque colligendæ ; latine vertendæ nonnullæ; ſcribendæ pleræque ; ornandæ, expoliendæ, perficiendæ prope omnes : quæ ſi ut fierent, exſpectare voluiſſem, verendum valde erat, ne exſpectandi finis eſſet nullus. Cum eo igitur adducta res eſſet, ut ſpem haberet iam prope nullam; fortunæ dare aliquid volui; & editionem maiori cum audacia, quam res ipſa ferret, ſuſcepi. Quod cum feciſſem, & paucula, quæ erant in manibus, prælo commiſiſſem, tantum repente Academicorum ſtudium in colligendis, comparandiſque rebus ſuis exſtitit, tanta diligentia, tanta alacritas, ut quem antea opuſculorum paucitas pæne ab editionis conſilio abduxerat, eumdem me poſtea prope copia deterruerit. Etenim cum animadverterent omnes in eo communem gloriam agi, minimeque decere rem tanta cum exſpectatione ſuſceptam ſubito abrumpi, ad ſuas quiſque lucubrationes ſtatim rediit, & quæ vix antea obſcure & curſim in adverſariis notaverat, perficere confeſtim cœpit, & nitidiori oratione diſtinguere. Quod ſtudium in mathematicis præcipue rebus eluxit. Itaque & geometria, & eius quaſi comites atque alumnæ, trigonometria, aſtronomia, mechanica, algebra commentationes ſtatim quamplurimas, cum ex aliis præclariſſimis italiæ civitatibus, tum ex hac ipſa, quæ litterarum parens ſemper eſt habita, depromtas, feſtinanter coegerunt, & quaſi certatim ad me contulerunt. Quid plura? Me ipſum quoque, quod eas ſcilicet adoleſcens amaveram, ad dimiſſa iamdudum ſtudia revocarunt. Quapropter ſi quid adhuc poſſem in eo genere, conatus ſum. Quod cum mihi pro ingenii mei mediocritate ſucceſſiſſet, ſermoneſque in academia noſtros nonnulli graviſſimi viri, mihique amiciſſimi, probaviſſent, non dubitavi, mathematicas cogitationes meas, qualeſcumque eſſent, in hanc tertiam tomi partem conferre, ut qui alios hortationibus excitaſſem, exemplo etiam, ſi poſſem, commoverem. Ea re factum eſt, ut mathematicæ diſciplinæ, quibus in prioribus duabus partibus locus vix ullus relictus fuerat, in hanc tertiam involaverint, & pæne totam compleverint.

Quod mecum ipſe conſiderans interdum vereor, ne qui falſum fuiſſe me putent, quod in prima huius tomi parte dixerim, mathematicas diſciplinas a noſtris minus excoli;

quam-

quamquam ſi multos, hoc ipſum dicendo, incitavimus, non me ſane falſum viſum eſſe pœnitebit. Ceterum quod dixi, (non enim diffiteor,) geometriæ ſtudium ab omnibus in hac urbe avidiſſime arripi, retineri a pauciſſimis, in quo magis fortunæ culpa eſt, quam voluntatis; ex eo intelligi volo, hos quidem, qui mathematicas res tam multas tam ſubito in unum volumen contulerint, occupationibus pleroſque ſtudiiſque aliis diſtineri, nec ea, de quibus agunt, profiteri. Quod ſi credatur, non modo non moleſte feram, ſed etiam gaudebo, me hoc bononienſis academiæ incommodum, ut alia permulta, pateſeciſſe. Idque mehercle ſi omnes facerent, quicumque academiarum ſuarum ſtudia, rationeſque deſcribunt, commodiores profecto hiſtorias ederent, & communi bono magis conſulerent; nam vitia & laudes ſimul referentes, ea proponerent, quorum exemplo academiæ aliæ condi, & regi, conſervarique facile poſſent. Sed cum illi ſuum maxime eſſe putent, nullum academiarum illarum, de quibus ſcribunt, vitium prodere; omnes autem, qui illas vel inſtituerint, vel auxerint, vel ornaverint, tamquam perfectiſſimos quoſdam, & quaſi de cælo lapſos proponant; exempla afferunt, quæ excellentiſſimi neſcio qui & perfectiſſimi imitari ſe poſſe ſperent; nobis, qui divini non ſumus, ſpem nullam relinquunt. Ego autem ſic ſemper exiſtimavi, optimas quaſque res ex unoquoque genere nobis ante oculos a poetis poni; hiſtoricorum autem eſſe oſtendere, quo modo ad perfectiſſimas illas formas homines accedant non perfectiſſimi. Hæc dixi, ut ſi qui forte mirantur, me paullo liberius de ea academia, quacum mihi coniunctio tanta ſit, ſcripſiſſe; intelligant tandem, nos non illam extollere, atque ornare, ſed deſcribere, atque exponere voluiſſe; neque de academicis tantum bene mereri, ſed veritati etiam dare aliquid, & aliis litteratorum hominum cœtibus, poſteritatique conſulere; quarum rerum ſi modo aliquid aſſecuti ſumus, numquam profecto putabimus, noſtram non fuiſſe commendandam audaciam. Sed iam de noſtra ſcribendi ratione ſatis multa.

Quamvis vero in rebus, quas ederem, colligendis nullum mihi certum tempus, quod alibi dixi, præfiniverim; ſed lucubrationes omnes, quæ quidem editione dignæ exiſtimarentur, cuiuſvis anni eſſent, admiſerim; fecit tamen BENEDICTI XIIII. P.O.M. ſumma, ac prope divina libe-

liberalitas, ut e dignitate Academiæ ſit diſpertiri tempora, & academiam unam in duas quaſi diſtinguere. Etenim cum Pontifex ſapientiſſimus, nobis adhuc hunc tomum edentibus, novum academicorum ordinem condiderit, quos Benedictinos appellari voluit, quibuſque annua præmia conſtituit, dici non poteſt, in quam ſpem Academia ſe erexerit, & quanto litterarum amore, & cupiditate laudis ſubito exarſerit. Nefas ſit autem, conventus illos veteres, privatos plerumque & obſcuros, cum his ſplendidiſſimis, &, ut ita dicam, pontificiis confundere. Nos ergo hunc tomum contexentes non niſi illa recepimus, quæ ante Benedictinorum ordinem conditum, ſi non ſcripta, ac recitata, excogitata certe fuerant, & domeſticis tractata ſermonibus; niſi ſi qua infra prodierint, quæ eſſent rebus iam editis, propter ipſum argumentorum nexum, ſtatim iungenda. Reliqua in tomum alium reſervavimus. Quem tomum ſi nos quidem confecturi ſumus (nihil enim in hac tam tenui valetudine ſperare audemus), curabimus quidem certe, ut Benedictinorum dignitati diligentia noſtra reſpondeat; ſin autem alii (quod optabilius eſt) in hanc provinciam ſucceſſerint, præclare cum Academia actum eſſe exiſtimabimus, ſi quo tempore ad tanti nominis gloriam emerſerit, eodem res eius ſcribi & elegantius cœperint, & ornatius.

Nunc, quando hunc, poſtremum fortaſſe, laboris noſtri fructum, monumentumque cariſſimæ Academiæ relinquimus, his, qui nobis ſuccedent, auctores ſumus, ut ſi quando Academicos minime ad editiones paratos habeant, ne deſperent. Inſtent, urgeant, laborent; opus aggrediantur. Nam ſi nobis idpſum facientibus, quamvis auctoritate eſſemus nulla, Academici, nullis adhuc honoribus aucti, nullis præmiis incitati, non defuerunt; quanto minus aliis deerunt, cum & res ſuas maiori cum dignitate ſcribi ab his poſſe ſentient, & ipſi Benedictinos ſe eſſe meminerint?

ACADEMICORUM QUORUMDAM OPUSCULA VARIA.

EUSTACHII MANFREDII

De Mercurii ac Solis congreſſu in aſtronomica Specula bononienſis ſcientiarum Inſtituti obſervato die IX *novembris* MDCCXXIII.

INitium nobis cœleſtium obſervationum, quas e Specula aſtronomica, in ædibus bononienſis ſcientiarum Inſtituti publico munere excitata, nec dum abſoluta, peragendas ſuſcepimus, inſigne erit, rarumque ſpectaculum, quod nuper mortalibus præbuit mercurii ſtella, quum inter ſolem, terramque decurrens, ſolis orbem peragraſſe viſa eſt. Habet quidem ſemper hoc phænomeni genus magnam in eius planetæ motibus inveſtigandis utilitatem: nunc vero habuit & iucunditatem quandam, quod antehac a viris celeberrimis haud ſemel ætate noſtra prænunciatum, ac fruſtra expectatum, annorum denique ſex, & viginti intervallo reverſum conſpexerimus. Poſtremus namque mercurii cum ſole congreſſus, quem quidem europæis animadverſum accepimus, in diem tertiam novembris anni 1697 inciderat. Ex ea die plerique cœleſtium motuum canones congreſſus alios duos, intra annos treſdecim, Europæ, ex parte ſaltem, viſibiles pollicebantur: alterum anno 1707 die 5 maii, alterum die 6 novembris 1710; nonnulli tamen erant, qui utrumque in nocturnas horas coniicerent, atque his eventus reſpondit, utroque enim hoc tempore mercurium ab obſervato.

vatoribus peritiſſimis, e diverſis Europæ regionibus in ſole quæſitum, nec inventum fuiſſe conſtat. Denique decennio poſt, die videlicet 8 maii 1720, qua die, omnium pœne rationibus conſentientibus, denuo futurum erat, ut ſolis marginem, ſaltem excurrendo perſtringeret, computos omnes tertio fefellit, quippe in auſtrum (ut coniicere licet) tantiſper deflexus, ſolis occurſum declinavit.

Ergo cum iterum ſpes eſſet, ut die 9 novembris labentis anni 1723 ſub veſperam aliquo temporis ſpatio intra ſolem cerneretur, ad obſervationem, quantum liceret, exacte inſtituendam nos comparavimus; ſtudium mihi atque operam adiungentibus ſuam, una cum Gabriele fratre, doctiſſimis, atque ornatiſſimis huiuſce ſcientiarum academiæ ſodalibus, Iacobo Parma philoſophiæ, Io: Baptiſta Banderio utriuſque Iuris, doctoribus, Ioſepho Bolſio Marcheſio Parmenſi, Dominico Weber Helveto, quibuscum altero ab hinc anno iucundiſſima mihi horum ſtudiorum intercedit conſuetudo.

Primum horologia duo oſcillatoria diebus aliquot ad meridiem exegimus, meridiei tempora accuratiſſime indagantes ex æqualibus, ante, ac poſt meridiem captatis ſolis altitudinibus, non neglecta correctione, quam ſolaris motus a circulis parallelis deviatio poſtulat. Eadem horologia ad ſtellarum quoque converſiones expendimus. Totis ſex diebus haud maiorem in eorum motu inæqualitatem, quam unius, vel alterius ſecundi ſcrupuli, invenimus.

Ad hæc deliberandum nobis fuit de methodo, qua mercurii obſervatio tutiſſime peragi poſſet. Duo præſertim erant, quæ curam noſtram expoſcerent. Primum ut ingreſſum planetæ in ſolem, ſi fieri poſſet, diſtincte cerneremus; deinde ut poſitiones eiuſdem aliquot accurate notaremus, e quibus poſitionibus apparens ſemita, quam ipſe in ſole percurreret, iuſta ad eclipticam inclinatione deſcribi poſſet. De planetæ ingreſſu, ſatius duximus, ſi directe ſolem ipſum per teleſcopia, oculis vitro opacato munitis, quam ſi ſolis ſpeciem, charta exceptam, intueremur. In eum uſum teleſcopia duo, alterum Campani, optimæ notæ, pedes undecim, alterum pedes octo bononienſes longum, ſelegimus. Longiores tubos experiri loci conditio prohibebat, namque obſervatio intra unius, vel alterius conclavis anguſtias perficienda erat,

quod

quod ſuperior, eaque ſpatioſior, Obſervatorii area lignorum ſtruibus, atque impedimentis aliis (ut inter ædificandum) obſepta eſſet.

Poſterius illud quod ſpectat, ea obſervandi ratio potiſſima videbatur, qua ſolis, & planetæ appulſibus ad verticale, atque ad horizontale quadrantis filum ex horologio notatis, res omnis perficitur, ut ab aſtronomis pariſienſibus factum in ea obſervatione, quam anno 1697 habitam memoravimus; hoc pacto omnis illa aberratio præcaveri poterat, quæ a refractionibus exiſtit, quum ſol non multum ab horizonte attollitur. Atqui ſuſpicio erat, ſi quadrantis teleſcopio, pedes 3, haud amplius, longo id tentaremus, an exiguum planetæ corpuſculum viſu conſequi valeremus, præſertim ubi nubecula, aut craſſior nebula intercederet. Proximum huic erat, ſi ſolis ſpeciem, per longius teleſcopium traiectam, circulo in tabella deſcripto exciperemus; ſimulque verticalem eius circuli diametrum perpendiculo, ſimul planetæ in eo circulo imaginem ſtylo deſignaremus, quod a Gaſſendo, Hevelio, aliiſque, in hiſce ipſis mercurii coniunctionibus obſervandis, factum accepimus. Verum illud cogitavimus, futurum ut ſole in occaſum vergente, ſpeciei figura, refractionum interventu, minime rotunda appareret, nec deinceps circulo in tabella exarato congrueret.

Quod unum ſupererat, ad obſervationem per horarios, ac parallelos circulos inſtituendam animum adiecimus, ea ratione, quæ multis ætate noſtra obſervatoribus celeberrimis uſu eſt recepta; non quod arbitraremur rationem hanc ab refractionum erroribus immunem eſſe, ſed quod eorum errorum quantitates poſtmodum æſtimari, ac corrigi poſſe reputaremus. Igitur teleſcopio alteri, quod ad manus erat, pedum 8, ſimplex reticulum aptavimus, cuius reticuli dum unum e filamentis illis, quæ paribus intervallis diſſita ſunt, ſolis limbus perraderet, filum aliud, priora normaliter interſecans, horarii circuli, ipſa vero æquidiſtantia fila parallelorum circulorum loco eſſent. Reticuli genus aliud, ab ſummo aſtronomo Caſſino excogitatum, quo filis quatuor, ſemirectos angulos continentibus negotium hocce facilime expeditur, idcirco non prætulimus, quod longiuſculo tubo, quo uti decreveramus, aſpectus tantum non pateat, quantum ad ſolem totum, aut ad maximam eius partem viſu

comprehendendam requiritur, quum alter eius limbus in filo parallelo ſtatuitur.

Die ipſa 9 novembris, qua mercurii tranſitus imminebat, ſummo mane cælum poſt diuturnam ſerenitatem nebula involvi, mox craſſis nubibus obduci, vix ut inter harum hiatus unam vel alteram ſolis altitudinem, ad explorandum horologii ſtatum, notare licuerit. Paulo a meridie, cum de viſendo mercurio actum putaremus, nubibus paulatim rareſcentibus, altitudines, antemeridianis reſpondentes, captavimus. Brevi quod ſupererat nubium, leni perflante vento ita diſiectum, diſſipatumque eſt, ut deinceps ad ſolis occaſum puriſſimo cælo uſi fuerimus. Ex hora pomeridiana 1. 50 intentis teleſcopiis, alter alteri ſuccedentes, ſolem proſequi non ceſſavimus, quouſque ad orientalem eius orbis marginem apparuit mercurius. Aderant nobis obſervantibus complures, qui ſpectandi gratia ex univerſa civitate convenerant, Viri docti, ac prænobiles; in quibus duo ex ampliſſimo Senatorio Magiſtratu, qui ſcientiarum Inſtituti præfecturam gerit, Franciſcus Maria Comes Signius, Alexander Marchio Duliolus Marſilius; aderat, & ipſe Inſtituti huiuſce ſcientiarum ſuaſor, ac promotor beneficentiſſimus Aloyſius Ferdinandus Comes Marſilius; cui ante annos 26, Viennæ cum eſſet, conſimilem inibi obſervationem habere contigerat.

Sed jam phaſes ſingulas a nobis obſervatas ordine ſubiiciemus; quarum quæ ad definiendas planetæ in ſole poſitiones pertinent, romanis adſcriptis numeris notavimus compendii gratia, ut cum eaſdem deinceps memorari uſus fuerit, iiſdem numeris ſingulas diſtinguamus.

Obſervationum ſeries.

Tempora a Meridie diei 9 Novembris.

h. ′ ″

3 26 22 Nunc primum ortivus ſolis margo quaſi foveola quadam inciſus mercurium ingredientem prodidit, teleſcopio pedum undecim, atque ex eius foveolæ figura apparuit necdum dimidiam planetæ diametrum ſolem ingreſſam. Eodem pœne tempore detectus eſt mercurius teleſcopio pedum octo.

3 27 45 Totum mercurii corpuſculum ſoli immerſum erat, eiuſque limbum interius tangebat, teleſcopio pedum undecim. Hæc phaſis paullo ſerius accidiſſe viſa eſt, quam expectabatur, quaſi planeta inter ingrediendum oblongus fieri, aut appendiculam poſt ſe trahere videretur; neſcio an ex optica aliqua cauſſa, nam poſtmodum plane rotundus apparebat.

I) 3 33 26 Limbus præced. ſolis ad filum horar. reticuli.
3 35 38 Mercurius ad idem filum.
3 35 41 Limbus ſequens ſolis ad idem filum.

Solis diameter, quæ iuxta horarium protendebatur, intervalla $21\frac{1}{5}$ reticuli occupabat; eorundem intervallorum $11\frac{1}{3}$ intererant inter parallelos mercurii, & limbi borealis, qui limbus in hac, & ſequentibus obſervationibus, unum e filis reticuli æquidiſtantibus percurrebat.

Quoniam hoc tempore refractiones nondum rotundam ſolis figuram ad ſenſum immutare poterant, ſolis vero diameter, quæ ex tabulis aſtronomicis probatiſſimis erat min. 32. 34, intervallis $21\frac{1}{5}$ reticuli reſpondebat, ſcire licet inter borealem limbum ſolis, ac mercurium intercapedinem (quæ obſervata eſt intervallorum $11\frac{2}{3}$) fuiſſe min. 17. 25.

Pari ratione cum a tranſitu præcedentis ad tranſitum ſequentis limbi ſolis per horarium cir-

h. ′ ″

circulum min. 2. 15 temporis effluxerint, a mercurio autem ad limbum ſequentem ſec. 3, palam eſt, ex ea, quam diximus, ſolaris diametri menſura, mercurium a ſequenti, ſive orientali ſolis limbo ſecundis circuli maximi 43 diſtitiſſe. Eadem ratione in ſequentibus obſervationibus declinationes mercurii a boreali, atque elongationes ab orientali margine ſupputatas, & ad ſcrupula maximi circuli redactas conſignavimus.

	h.	′	″	
II	3	43	57	Limbus præcedens ſolis ad horarium.
		46	5	Mercurius ad horarium.
		46	12	Limbus ſequens ſolis ad horarium.

Declinatio mercurii a boreali ſolis limbo, ex intervallorum obſervatione elicita, min. 16 52. Elongatio eius a limbo orientali, ex temporibus adnotatis min. 1. 41. Accurata obſervatio.

	h.	′	″	
III	3	48	7	Mercurius ad horarium.
		48	15½	Limbus ſequens ſolis ad horarium.

Declinatio mercurii a limbo boreali min. 16 48. Eiuſdem elongatio a limbo orientali mi. 2. 9.

Per idem tempus mercurii magnitudinem iterum, ac ſæpius æſtimantes intervalli unius partem nonam in diametro exæquare iudicavimus. Erat ergo planetæ diameter ſec. 9 maximi circuli.

	h.	′	″	
	3	49	50	Mercurius ad horarium.
		50	0	Limbus ſequens ſolis ad horarium.

Elongatio igitur mercurii a limbo orientali min. 2. 25. Declinationem non notavimus.

	h.	′	″	
IV	3	52	47	Mercurius ad horarium.
		52	57½	Limbus ſequens ſolis.

Declinatio a limbo boreali min. 16. 39. Elongatio a limbo orientali min. 2. 32.

	h.	′	″	
	3	58	21	Mercurius.
		58	34	Limbus ſequens ſolis.

Elongatio a limbo orientali min. 3. 8.

Inter

	h.	'	''	
				Inter hæc mercurii figura tam eo teleſcopio, cui reticulum inerat, quam alio pedum octo, curioſius inſpecta nonnullis minime rotunda, at ovalis æſtimabatur, longiori eius diametro ita poſita, ut cum horario circulo angulum ſemirectum paullo amplius, a borea in ortum efficeret. Ad hæc planetam quadam veluti nubecula, quemadmodum ſolares maculæ ſolent, circumſeptum ſe vidiſſe quidam arbitrati ſunt.
V	4	0	56	Mercurius ad horarium.
		1	9	Limbus ſequens ſolis ad horarium.
				Declinatio a limbo boreali min. 15. 49. Elongatio a limbo orientali min. 3. 8.
VI	4	5	3	Mercurius.
		5	17	Limbus ſequens ſolis.
				Declinatio a limbo boreali min. 15. 45. Elongatio ab orientali min. 3. 23.
VII	4	10	$55\frac{1}{2}$	Mercurius.
		11	13	Limbus ſequens ſolis.
				A limbo boreali min. 15. 40 ab orientali min. 4. 13.
	4	13	21	Mercurius.
		13	39	Limbus ſequens.
				Elongatio igitur a limbo orientali m. 4. 21.
VIII	4	14	$56\frac{1}{2}$	Mercurius.
		15	16	Limbus ſequens ſolis.
				Declinatio a limbo boreali min. 14. 51. Elongatio ab orientali min. 4. 42.
	4	17	33	Mercurius ad horarium.
		17	53	Limbus ſequens ſolis.
				Elongatio a limbo orientali min. 4. 49.
IX	4	29	12	Mercurius ad horarium.
		29	36	Limbus ſequens ſolis.
				Declinatio a limbo boreali min. 14. 35. Elongatio ab orientali min. 5. 48.
				Poſt hæc iterum teleſcopio pedum undecim ſolem inſpicientes ad occaſum perſecuti ſumus. In eo mercurium perpetuo rotundum, etſi

etſi inter horizontales vapores fluctuantem, neque ulla involutum nubecula vidimus.

Hactenus obſervationes noſtræ; quas qui inter ſe ſe contulerit haud difficulter agnoſcet declinationum mutationes temporum incrementis minime accurate reſpondere. Aliqua etiam, licet minora, diſſidia in elongationibus a limbo ortivo reperiet. Diſcrimina hæc partim vagis, ac minime conſtantibus refractionum variationibus (atque hoc præſertim in poſtremis phaſibus) partim tamen obſervationum ipſarum exiguis erroribus tribuenda ultro agnoſcimus. Perdifficile enim erat ſingulis vicibus reticulum ita componere, ut fila poſitum acciperent ſolis itineri exquiſite parallelum, quemadmodum hæc methodus poſtulat; ac multa impediebant, quo minus machina parallactica uteremur, cuius ſubſidio neceſſitas illa effugi ſolet. Itaque nil mirum in aliquam e menſuris noſtris quiddam vitii irrepſiſſe. Quamquam in illis tanta denique non apparet inæqualitas, ut ad dimidium minuti unius excreſcat, neque difficile erat id qualecumque erroris corrigere, niſi candoris noſtri eſſe arbitraremur obſervationum numeros ita tradere, quemadmodum inter obſervandum deſcripti extant.

Quæ ratio ſit huiuſcemodi obſervationum a refractionibus corrigendarum.

NUnc ergo diſpiciendum eſt quibus erroribus, propter refractionum interventum, obnoxia ſit hæc obſervandi methodus, quærendumque quatenus phaſes ſingulas a nobis obſervatas ab eiuſmodi erroribus purgare, ac corrigere liceat. Hoc ni fiat, in deſcribenda planetæ ſemita, atque in iis omnibus, quæ inde conſequi poſſunt, inveſtigandis, fruſtra erimus. Cum autem de huiuſcemodi aberrationibus loquor, non eas accipi volo, quas paullo ante memoravi, ex inæquali aeris denſitate, ſive ex denſitatis inconſtantia inter obſervandum fortaſſe ſubortas; harum enim corrigendarum ratio nulla eſſe poteſt; ſed eam deviationem ſpecto, qua fieri neceſſe eſt, ut ſi vel maxime uniformis, & conſtans ſit aeris ſtatus, tamen quilibet planetæ poſitus per horarios, ac parallelos circulos obſervando definitus, niſi correctio

rectio quædam adhibeatur, ab vero planetæ in ſole poſitu non nihil diſcrepet, quem ſcilicet poſitum habere viſus eſſet, ſi eum nulla intercedente refractione intueri licuiſſet. Hanc vero deviationem aliquam eſſe, neque prorſus contemnendam, modo ſol obſervationis tempore (ut in hoc cum mercurio congreſſu) non longe ab horizonte abſit, ita planum faciemus.

Notum eſt ſolis ſpeciem ita ex refractionibus deformari, ut e rotunda ovalis fiat; & diameter quidem horizontalis iuſtam ad ſenſum magnitudinem ſervet, verticalis autem contrahatur. Eſto in figura I peripheria ſolis refracte viſa obſervationis tempore $fbnl$, horizontalis diametri ſpecies fn, verticalis bl, centri autem s. Iam hoc ipſo eius, quam diximus, aberrationis neceſſitas, ex parte ſaltem, intelligitur. Cum enim mercurii poſitum ad ſolares margines, ſive in horario circulo ex borea in auſtrum, ſive in parallelis ex ortu in occaſum, obſervando dimetimur, margines illi, quibus cum planetæ fit comparatio, minime ad unumquemdam circulum, ſed ad curvam $fbnl$ pertinent. Itaque errabimus, ſi circulum, ut fieri ſolet, deſcribentes, ac duas in eo circulo rectum angulum comprehendentes diametros, alteram pro horario, alteram pro parallelo ducentes, ex earum diametrorum extremitatibus, veluti e ſolaribus limbis, illas declinationum, atque elongationum menſuras intra circulum accipiamus, quas obſervatione comperimus; atque eo magis errabimus, quo ſolis ſpecies, eius phaſis tempore, magis a circulari figura abludet (quod equidem infra ſeptem, vel octo gradus altitudinis ſenſu aſſequi incipimus, cum vero ad quintum, aut ſextum gradum ventum eſt, in tantum excreſcit, ut diſſimulari non poſſit); neque, poſita eadem ſolis altitudine, error perpetuo idem erit, ſed alius, pro alia horarii ad verticalem inclinatione, & planetæ ab iis, quos diximus, limbis diſtantia.

Sed alia præterea eſt cauſſa, cur planetæ poſitus, eiuſmodi obſervationibus definitus, correctione egeat. Ducatur in eodem ſchemate horarius circulus sh, ac parallelus, rectum cum eo angulum efficiens sp. Et ſi hæc recta æquatori, ac veris ſtellarum itineribus æquidiſtans eſt, tamen centri ſolaris ſpecies, dum diurno motu occaſum verſus fertur, minime hanc viam sp inſiſtere videbitur. Cogitemus enim

 ſolem

ſolem exiguo temporis ſpatio e verticali circulo *k y* in alium verticalem *hp* translatum. Id dum contingit, ſimul centri *s* altitudo augetur, aut minuitur, eaque mutata, refractionem eius minui, vel augeri neceſſe eſt. Minuatur altitudo (ut in obſervationibus noſtris, ubi ſol in occaſum vergebat) & refractionis incrementum huic diminutioni congruens eſto *p a*. Facile apparet ſolis centrum, quum ad verticalem *hp* pervenerit, in puncto *a* appariturum, & ſemitam, quæ ab eo deſcribi videbitur, fore *s a*, utique aliam ab *s p*. Quod autem de centro *s* dictum eſt, de ſingulis eius circumferentiæ punctis, atque adeo de utroque limbo, auſtrali ſcilicet, & boreali, e quibus planetæ declinationes captabantur, dictum puta; ſingula enim hæc puncta lineas deſcripſiſſe videbuntur lineæ *s a* parallelas. Igitur cum inter obſervandum reticuli filamenta iuxta limbi borealis motum componebantur, minime vero parallelo *s p*, ſed apparenti *s a* æquidiſtantia ſtatuebantur, neque reticuli filum horarium, horario vero *s h*, ſed apparenti, ad rectam *s a* normali, æquidiſtabat. Propterea niſi huiuſce diſcriminis ratio habeatur, cum denique obſervatio in typum refertur, iterum errabitur, neque planetæ ad eclipticam poſitus, hoc pacto repertus, cum veritate conſentiet.

Omitto, ne illam quidem, quam dixi, lineam *s a* rectam eſſe, ſed curvam, neque, ut recta foret, auſtralis, & borealis limbi ſemitas huic lineæ adamuſſim æquidiſtare poſſe; non enim refractionis incrementum limbo congruens, quo tempore ſolis ſpecies ad verticalem *hp* transfertur, æquatur incremento *p a* refractionis eius, quæ ad centrum pertinet; nec propterea figura *f b n l* inter movendum ſervari poteſt, ſed ut plurimum deſcendente ſole compreſſior fit. Hæc, inquam, omitto, ſubductis enim calculis reperi quicquid erroris inde exiſtere poteſt perexiguum eſſe, & quod ſperni queat, præſertim in hiſce noſtris obſervationibus, ubi quam minimum temporis inter mercurii, & ſolaris limbi tranſitum intererat.

His ergo ita expoſitis, dicendum ſupereſt, quæ harum aberrationum geometrice corrigendarum ſit methodus; nimirum qua ratione, cuiuslibet phaſis tempore, planeta in circulari ſolis diſco ita collocari poſſit, quemadmodum nullis turbantibus refractionibus ſpectandus fuiſſet. Methodum hanc

hanc ita proponam, ut expoſitionem eius accommodem obſervationi noſtræ, in qua ſol occiduam cæli partem occupabat; mercurii vero poſitiones a boreali, atque ab orientali ſpeciei limbo deſumebantur; ex quo non difficulter intelligitur, quid aliis caſibus præſtandum ſit.

Primum ſemidiametro *sf* tot ſcrupulorum, quot ea die habuerit ſolis ſemidiameter, circulus deſcribatur *fkny*, cuius centrum *s*, ducaturque *fn* pro horizontali, atque illi perpendicularis *ky* pro verticali diametro. Deinde, ſupputata ad tempus eius phaſis, quam corrigere volumus, ſolis altitudine vera, eaque ope tabulæ refractionum in viſam converſa (habet hoc difficultatem nonnullam quod refractiones in tabulis, quæ ab aſtronomis traduntur, viſis altitudinibus, non veris adſcribi, aptarique ſoleant, ſed altero, vel tertio in tabulam ingreſſu res denique expediri poteſt) deſcribenda eſt curva *fbnl*, quæ ſolis ſpeciem in ea altitudine exhibeat, ita quidem, ut centri ſpecies cum puncto *s*, & diametri horizontalis apparentia cum recta *fn* congruat. Huius quidem curvæ etſi perdifficilis eſt contemplatio, nec dum de eius natura quicquam a geometris perſcriptum extat, non tamen difficile eſt eam per plura puncta ex refractionum tabulis delineare. Accepta enim *kb* æquali differentiæ refractionum centri, & limbi ſuperioris ſolis in verticali circulo, erit punctum *b* huiuſce limbi ſpecies. Similiter ſi *Tt*, ipſi *ky* parallela, æqualis fiat differentiæ refractionum centri, atque eius puncti ſuperioris ſemicirculi ſolis, quod punctum in verticali *Tt* reperitur, erit huiuſce puncti ſpecies *t*; atque eodem pacto inferioris ſemicirculi ſpecies *fln* deſcribetur.

Quinimo, invento, ut antea, puncto *b*, ſi axe primario *fn*, & ſemiaxe ſecundario *bs* ſemiellypſis *fbn* deſcribatur, vix hæc ab apparenti ſolis figura aberrabit, quod ſenſu percipi poſſit. Sunt enim refractionum differentiæ *kb*, *Tt* altitudinum differentiis, atque adeo lineis *sk*, *cT* ſat accurate proportionales, ut ex refractionum tabulis apparet, ſaltem ubi ſolis centrum ultra gradus tres attollitur, atque altitudines ipſæ non ultra 15, vel 16 minuta (quanta eſt ſolis ſemidiameter) inter ſe diſcrepant; unde facile conſequitur rectas *sk*, *cT*, rectis *bs*, *ct* proportionales eſſe, quæ ellypſis eſt proprietas. Eademque ratione ſi pun-

cti infimi ſolis ſpecies *l* inveniatur, atque eodem axe primario *fn*, ſemiaxe autem ſecundario *sl* ſemiellypſis alia deſcribatur *fln*, curva e duabus ſemiellypſibus conflata *fbnl*, ſatis in hoc negotio accurate, ſolis figuram in ea altitudine imitabitur. Propterea figuram hanc, uti vere ellypticam, deinceps ſpectabimus.

Iam ergo, ſupputato ex aſtronomicis datis angulo, quem horarius circulus eo tempore cum verticali comprehendit, ſtatuatur illi æqualis angulus *Ksh*, fiatque *sp* normalis ad *sh*, ut hoc pacto *sh*, circulum horarium verum, atque *sp* verum parallelum referat.

Ad hæc, uno vel altero temporis minuto poſt obſervationis tempus quærenda eſt iterum centri ſolis altitudo vera, & ex hac, viſa, nec non huic conveniens refractio. Tum vero tempuſculum illud in partes circuli, primum paralleli, deinde maximi, redigatur, ſitque eius menſura *sp*, ex eodem modulo deſumpta, ex qua ſolis ſemidiameter, ceteræque in figura lineæ acceptæ ſunt. Per punctum *p* agatur *pa*, ipſi *ky* parallela, atque in ea ex puncto *p* verticem verſus ſumatur *pa* æqualis differentiæ refractionum centri ſolis utroque eo tempore, ductaque recta *as*, quæ ſpeciem ſolarem ſecet in *dd*, erit *as* apparens eius centri parallelus.

Poſt hæc ducatur in ellypſi *fbn* ſemidiameter *sr* ſemidiametro *ds* coniugata, & acta per *r* recta linea *ru* eidem *ds* parallela, quæ in *r* ellypſim tanget, poſitionem eam oſtendet, quam reticuli filum inter obſervandum obtinebat, quod filum a boreali ſolis limbo percurrebatur, eritque punctum *r* limbus ipſe borealis apparens, ad quem planeta obſervando relatus eſt. Quod ſi *sg* ad perpendiculum erigatur ipſi *ds*, & ſemidiametro *sg* coniugata fiat *so*, ac per *o* agatur *ou* æquidiſtans *sg*, ac propterea ellypſim tangens in *o*, oſtendet *ou* poſitionem illam, quam obſervationis tempore habuit filum reticuli, quod cum parallelis filis angulum rectum efficit, eritque punctum *o* limbus ipſe orientalis, ex cuius appulſu ad filum *ou*, cum mercurii appulſu collato, eius elongatio colligebatur.

Ex puncto igitur *u*, in quo *ru*, *ou* ſe interſecant, ſumpta in *ur* recta *uq* æquali elongationi planetæ ab limbo ortivo, & in *uo* recta *ui* æquali declinationi a limbo boreali,

reali, ſi per *q*, *i* rectæ agantur *qm*, *im*, rectis *ou*, *ur* parallelæ, earum ſectio *m* apparentem mercurii locum in ovali ſolis ſpecie deſignabit; nimirum punctum *m* ad puncta *r*, *o* ita comparatum erit, quemadmodum planeta ipſe ad borealem, atque ad orientalem ſpeciei limbum comparabatur.

Denique ductis per *m* rectis *tmc*, ad *fn* perpendiculari, & *mx* eidem parallela, quæ poſterior ellypſim ſecet in *x*, & acta *xe* ipſi *ky* parallela, quæ ſemicirculo *fkn* occurrat in *e*, ſi per *e* recta deſcribatur *ez*, ipſi *fn* parallela, ac rectæ *tm* occurrens in *z*, erit *z* mercurii locus, ita ad circulum *fkny*, & ad verum horarium *sh*, verumque parallelum *sp*, relatus, quemadmodum ſpectandus fuiſſet, ſi refractiones nullæ intercesſiſſent; quapropter adiecta in ſchemate ecliptica, diametro ſcilicet, quæ eum angulum cum recta *sh* efficiat, quem obſervationis tempore ecliptica cum horario comprehendebat, vera planetæ longitudo, ac latitudo, eius phaſis tempore, circino inveniri poterit, quantum quidem per refractionum anomalias, earumque hypoteſes, nondum fortaſſe exactiſſime conſtitutas, licet.

Methodi huiuſce demonſtrationem omitto, quod eam ex hactenus dictis haud difficulter percipi, & rem hanc totam ex iis, quæ ſequuntur, ſatis illuſtrari exiſtimem.

Quæ fuerit ſemita a Mercurio intra ſolem in hocce congreſſu deſcripta.

UT ergo obſervationum noſtrarum phaſes, quatenus opus foret, hac methodo corrigerem, atque ex earum ſerie viam a mercurio intra ſolem deſcriptam inveſtigarem, modulum minutorum circuli maximi eius magnitudinis conſtruxi, ut minuta ex eo modulo ſexdecim, unciis circiter 5 bononienſibus exæquarentur, quo facile eſſet ſingula quævis, aut bina ſaltem, ſcrupula ſecunda viſu diſtinguere. Ex eo modulo ſumptis min. 16. 17, quæ fuit ſolis ſemidiameter obſervationis tempore, ea ſemidiametro circulum in charta deſcripſi. Hunc circulum, minori tamen forma exaratum figura II oſtendit. In eo tranſverſam diametrum duxi, quæ eclipticam referret, atque diametrum aliam gradibus 106. 35, occaſum verſus in ſuperiori ſemicirculo, ad illam prio-

rem

rem inclinatam, pro horario circulo ſtatui, quod nempe is ſit angulus, quem ecliptica in gradu 16. 45 ſcorpii (quo proxime loco tunc ſol verſabatur) cum meridiano, ſive cum horariis circulis efficit. Neque tamen horarium, neque alias, quæ deinceps ſequuntur, lineas hic notavi, ne tot linearum ductibus confuſio oriretur.

Ducta deinde ad horarium normali diametro, quæ parallelum centri ſolis exhiberet, mercurii poſitus ad ſingulas obſervatas phaſes in ſchemate deſignare aggreſſus, primum ſubductis rationibus reperi in ea phaſi, quæ numero I notata eſt, nulla correctione opus eſſe, quod in tanta altitudine, quantam eo tempore ſol ab horizonte habuit, nondum refractio quicquam erroris efficeret, quod ſenſu diſtingui poſſet. Itaque ex mercurii declinatione, quæ a boreali limbo obſervata eſt min. 17. 25, atque ex elongatione ab margine orientali ſec. 43, planetæ poſitum intra ſolem talem deprehendi, qualem in figura numerus I oſtendit.

Poſt hæc ad phaſim num. IX notatam, quæ omnium poſtrema eſt, perpendendam tranſivi. Ex declinatione ſolis, quæ fuit grad. 16. 52 mer. nec non diſtantia poli a vertice Bononiæ grad. 45. 31, ac demum ex hora pomeridiana 4. 29, angulum ab horario a verticali circulo in ſolis centro comprehenſum grad. 41. 14 comperi; itaque in figura diametrum aliam duxi, quæ cum horario hunc angulum efficiens, verticalem referret, eique diametro orthogonalem aliam ſtatui, quæ pro horizontali diametro foret.

Ex iiſdem datis prodiit mihi vera centri ſolis altitudo ad huiuſce phaſis tempus grad. 3. 29, atque diſtantia a vertice grad. 86. 31. Huic diſtantiæ in Caſſiniana refractionum tabula reſpondebat refractio min. 14. 23, ex qua vera diſtantia a vertice confieret grad. 86. 16. 37, ſi modo tabulæ eius refractiones veris, non viſis a vertice diſtantiis reſponderent. Rurſum igitur refractionem ex ea tabula quærebam, quæ viſæ diſtantiæ grad. 86. 16. 37 congrueret, reperiebamque min. 13. 37, quæ ablata ex diſtantia vera grad. 86. 31 efficit diſtantiam viſam non nihil magis accuratam grad. 87. 17. 23. Ad hanc ergo diſtantiam rurſum refractionem quærens, inveniebam min. 13. 40, qua dempta ex vera diſtantia a vertice grad. 86. 31, prodibat viſa grad. 86 17. 20, eaque accuratiſſima; cum enim iterum diſtantiæ

grad.

grad. 86. 17. 20 refractionem debitam quærerem, eamdem atque antea comperiebam, min. 13. 40, quæ propterea veriſſima erat ex hac tabula centri refractio.

Quoniam autem vera diſtantia a vertice centri ſolis erat grad. 86. 31, ſemidiameter autem eius min. 16. 17, colligebatur inde diſtantia a vertice vera limbi ſuperioris in verticali circulo grad. 86. 14. 43. Iterum ergo refractionem huic limbo congruentem eadem methodo inveſtigabam, ac reperiebam min. 12. 53. Itaque refractionum centri, ac limbi ſuperioris differentia erat ſec. 47, atque hæc quantitas ea eſt, quæ lineæ *k b* prioris figuræ reſpondet.

Semiellypſim igitur, quæ ſuperiorem ſolis ſemicirculum referret, in eo, quem dixi, ampliori circulo iuxta methodum ſupra traditam ex hiſce datis delineavi, nempe cuius axis primarius erat horizontalis ſolis diameter, ſecundarius vero ſemiaxis iuxta verticalem protenſus a primario ſecundis 47, ex modulo acceptis, deficiebat.

Poſt hæc centri ſolis diſtantiam a vertice ad horam 4. 30 (nempe uno temporis minuto ab obſervatione elapſo) iterum ſupputabam, eamque comperiebam grad. 86. 41, refractionem vero illi debitam min. 14. 9, quæ propterea refractionem centri hora obſervationis repertam, min. 13. 40, excedebat ſecundis 29. Deinde cum arcus paralleli, quem uno temporis minuto ſol percurrit, ſit min. 15, ſive ſec. 900, ut vero radius 100000 ad ſinum complementi declinationis ſolis grad. 16. 52, nempe ad 95698, ita 900 ad 861, colligebatur exinde rectæ *s p* (fig. I) longitudo partium circuli maximi 861, ſeu minutorum 14. 21, quare acceptis ex circuli centro *s* in linea *s p*, quæ parallelum referebat, partibus moduli 14. 21, occaſum verſus, punctum *p* nanciſcebar, per quod ducta *p a*, verticali *y k* parallela, longitudinis ſec. 29, per punctum *a* apparentem centri ſolis parallelum *a s d* ducebam; neque modicam eius a vero parallelo deflexionem inveniebam, quippe quæ gradus duos excederet. Poſtremo reliquis omnibus, ut expoſita antehac methodus præcipit, abſolutis, talis mercurii in ſole poſitus prodibat, qualis fig. II numero IX cernitur.

Eadem prorſus ratione reliquas phaſes in obſervationum ſerie, romanis numeris ſupra notatas, in ſchema retuli, quarum quidem phaſium, quæ ante horam quartam obſer-

obſervatæ ſunt, correctione nulla, refractionum cauſſa, indigere comperi, eas ſcilicet quæ numeris II. III. IV notantur, præter phaſim I, de qua ſupra dixi. Ex hora vero 4. 1, cui phaſis V reſpondet, corrigendæ omnes fuerunt, quod aberrationem a refractionibus ortam notabilem iam eſſe calculi oſtenderent; atque hoc pacto eos poſitus mercurii reperi, quos figura demonſtrat. Reliquæ phaſes, quæ nullo diſtinctæ ſunt numero, in ſchema referri non poterant, quod in iis mercurii a limbo ſolis declinatio obſervata non fuerit, elongationes tamen a limbo orientali, quæ in iis conſignantur, inter ſe ſe, & cum temporibus collatæ, ut plurimum cum reliquis conſentiunt, earumque veritatem confirmant.

Cum vero puncta illa ſingula in typo notata, minime omnia in eamdem rectam lineam incidere viderem, non melius ſemitam a mercurio deſcriptam definire me poſſe exiſtimavi, quam ſi phaſes duas maxime inter ſe diſſitas, nempe I, & IX, recta linea iungens, rectam hanc pro mercurii ſemita acciperem. Id ubi feceram, poſitionum reliquarum puncta ita ad hanc lineam comparata erant, ut aliqua citra, alia ultra eam iacerent, ac plurima eorum perexiguum quiddam ab ipſa diſtarent, quemadmodum figura oſtendit, id quod ſemitæ poſitionem illam confirmare videtur. Una eſt phaſis VII, quæ longius ab hac linea evagatur, quam ut tolerari poſſit, atque hoc, ni fallor, eius obſervationis vitium aliquod prodit.

Deſcripta hoc pacto ea portione ſemitæ, quam mercurius a phaſi I ad phaſim IX peragravit, eaque hinc inde producta, quouſque circulo utrimque occurreret, puncta duo nactus ſum, quorum alterum, ad orientem poſitum, mercurii ingredientis, alterum ad occaſum, egredientis locum demonſtrat. Horum punctorum perpendicularem ab ecliptica diſtantiam circino dimenſus, reperi in puncto ingreſſus min. 3. 13, in puncto egreſſus min. 7. 31, utrobique ad boream, atque hæ ſunt mercurii latitudines ſeptentrionales ad initium, finemque huiuſce ſub ſole tranſitus, quantum ex obſervationis noſtræ conditione definire eas licet; cum enim vix hora una, paullo amplius, planetam, propter ingruentem ſolis occaſum, proſecuti ſimus (quæ eſt eius itineris in ſole pars circiter quinta) non tantum in

hac

hac ſemitæ poſitione ſubtilitatem præſtare poſſumus, quantam quibus plus diei ad hanc proſequendam obſervationem ſuperfuit, uti pariſienſibus, ac londinenſibus aſtronomis contigiſſe accepimus.

Ex datis autem duabus hiſce latitudinibus, & ſolis ſemidiametro min. 16. 17, eas, quas ſubiungam, menſuras calculo trigonometrico adeptus ſum, quantæ etiam circino in ſchemate deprehendebantur.

Latitudo mercurii in puncto ingreſſus	min. 3	13	Bor.
Latitudo eiuſdem in puncto egreſſus	min. 7	31	Bor.
Differentia longitudinum mercurii, & centri ſolis in ingreſſu	min. 15	58	
Differentia longitudinum mercurii ac centri ſolis in egreſſu	min. 14	27	
Longitudo ſemitæ a mercurio intra ſolem ab ingreſſu ad egreſſum peragratæ	min. 30	41	
Perpendicularis diſtantia ſemitæ a centro ſolis	min. 5	25	
Angulus quem ipſa ſemita cum ecliptica comprehendebat	grad. 8	2	

Ex quibus ad reliqua omnia, quæ hanc coniunctionem ſpectant, inveſtiganda iam progrediar.

Determinatio coniunctionis mercurii cum ſole ex hiſce obſervationibus.

Antea tamen perſpiciendum eſt quæ ex obſervationibus in typum relatis eliciatur quantitas motus planetæ in ſole. Quum mercurii poſitiones in ſingulis phaſibus notatas inter ſe conferebam, inveniebam earum intervalla temporum intervallis minime exacte proportionalia, id quod ab iis, quos dixi, errorculis, inter obſervandum admiſſis, procul dubio oriebatur, atque ambiguam efficiebat horarii planetæ motus inveſtigationem. In hac dubietate nihil mihi tutius occurrebat, quam ſi e duobus longiſſime inter ſe diſſitis punctis huiuſce motus menſuram elicerem. Itaque cum portionem ſemitæ, quæ inter punctum ingreſſus planetæ, & poſtremam omnium phaſium, numero IX notatam, intercipitur, circino dimenſus reperirem min. 6. 20, ingreſſus

autem in horam 3. 27, ac poſtremæ phaſis tempus in horam 4. 29 congruat, quorum temporum intervallum eſt hor. 1. 2, ſubductis rationibus prodibat horarius motus in ſemita intra ſolem apparens min. 6. 8.

Sed ut motum hunc nonnihil adhuc accuratius obtinerem, animadvertebam mercurii diametrum in obſervatione fuiſſe nobis æſtimatam ſecundorum 9, ut ad phaſim III notatum eſt, quapropter ex horario motu illo, utcumque cognito, colligebam, portionem ſemitæ, mercurii diametro æqualem, ab eo peragratam tempore ſecundorum horariorum 89, atque hoc quam proxime fuiſſe oportet tempus, quod planeta impendit poſtquam ſolis limbum exterius tetigit, quoad eumdem interius contingens totus in ſole appareret. Quapropter cum interior contactus notatus fuerit hora 3. 27. 45, conſequitur primum eius ad oram ſolis appulſum accidiſſe hor. 3. 26. 16, tametſi nobis non ante hor. 3. 26. 22 eſt viſus; centrum vero ad limbum eumdem perveniſſe hor. 3. 27. 0. Poſtremæ vero phaſis tempus, cum ſcilicet mercurius in ea phaſi circulum horarium tranſibat, erat hor. 4. 29. 12; intervallum igitur temporis ab ingreſſu centri mercurii ad hanc phaſim eſt hor. 1. 2. 12; atque hoc tempore minuta illa, quæ diximus, 6. 20 in ſua ſemita peragravit, ex quo horarius eius motus fit min. 6. 7 unico ſecundo minor atque antea repertus fuerat.

Hic quidem planetæ eſt motus in ea, quam deſcripſit, aut deſcripſiſſe viſus eſt, recta intra ſolem linea, quæ cum ad eclipticam angulo grad. 8. 2 inclinaretur (ſicut antea poſuimus) ſequitur horarium motum mercurii a ſole in longitudinem, ſive ad eclipticam reductum, fuiſſe min. 6. 3.

Nunc igitur cum mercurius, horæ unius ſpatio minuta 6. 7 propriæ ſemitæ in ſole percurrat, ſequitur totam eius viæ longitudinem (quam min. 30. 41 ſupputavimus) peragratam horis 5. 1. 9, & ſemitæ dimidium horis 2. 30. 34, quibus adiectis ad tempus ingreſſus centri hor. 3. 27. 0, conflatur medium tranſitus hor. 5. 57. 34, atque eodem pacto colligitur tempus, quo centrum mercurii a ſole exceſſit hor. 8. 28. 9.

Præterea cum, ex iis, quæ diximus, differentia longitudinis, qua mercurius centrum ſolis ſequebatur, ipſo ingreſſus

greſſus tempore fuerit min. 15. 58; horarius autem motus in longitudinem a ſole min. 6. 3, conſequens eſt mercurium ad eamdem cum centro ſolis longitudinem perveniſſe poſt horas ab ingreſſu 2. 38. 21, nempe poſt meridiem hor. 6. 5. 21, atque hoc tempus eſt verum coniunctionis planetæ cum ſole. Caſſinianæ tabulæ exhibent eo tempore (quod iuxta medios motus eſt h. 5. 49. 23) ſolis longitudinem in ſcorpionis grad. 16. 47. 10, quibus ad unguem conſentiunt obſervationes per hoſce dies a nobis habitæ ad maximum gnomonem, qui Bononiæ in Divi Petronii æde ab ipſo Caſſino conſtructus extat. Atque hæc eadem eſt mercurii e tellure viſa hoc tempore longitudo, cui e diametro opponitur telluris longitudo a ſole, & mercurio viſa, in Tauri grad. 16. 47. 10.

Latitudinem vero quod attinet, quam mercurius in ipſo coniunctionis articulo habere viſus eſt, cum ab ingreſſu ad egreſſum tempus interceſſerit horarum 5. 1. 9, atque eo intervallo augmentum latitudinis ex numeris ſupra poſitis colligatur min. 4. 18; ab ingreſſu vero ad coniunctionem lapſæ fuerint hor. 2. 38. 21, conſequitur incrementum latitudinis ab ingreſſu ad coniunctionem min. 2. 16. Quare cum latitudo in ingreſſu inventa fuerit min. 3. 13, erit latitudo tempore coniunctionis min. 5. 29 ſeptentrionalis.

Ex iis ephemeridibus, quas anno 1715 e Caſſinianis tabulis ſupputatas edidi, elicitur coniunctionis huiuſce tempus verum h. 6. 41 nempe 36 minutis ſerius atque ex obſervatione, id quod min. 3 circiter in mercurii longitudine exceſſum oſtendit; latitudo autem ex Ephemeridibus min. 5. 0, ſecundis tantummodo 29 ab obſervatione deficiens. Earum ephemeridum continvationem in annum 1750, brevi evulgandam, adornamus ex iiſdem tabulis, quibus tamen correctiones nonnullas ab inſigni aſtronomo Maraldo, Caſſini nepote, e propriis obſervationibus deductas, ac nobiſcum communicatas, in iove præſertim, ac ſaturno, adhibuimus, ac partim etiam in mercurio. Sed ex hac ipſa obſervatione mercurii motus fortaſſe ulterius adhuc corrigi poterunt.

Determinatio nodi aſcendentis mercurialis orbitæ.

NUnc cum eo, quod poſuimus, latitudinis incremento haud difficulter indagabimus quo tempore mercurius in ipſa orbitæ ſuæ, atque eclipticæ ſectione, abſque latitudine ulla, verſatus fuerit, quas ſectiones aſtronomi nodos appellant. Quoniam enim ex dictis latitudinis augmentum min. 4. 18 horas 5. 1. 9 ſibi depoſcit, manifeſtum eſt tempus, cui reſpondeat augmentum minutorum 3. 13 latitudinis, (quanta ſcilicet in ingreſſu deprehenſa eſt) horarum fuiſſe 3. 45. 9, quibus deductis e tempore ingreſſus centri mercurii in ſolem hor. 3. 27. 0, confiet tempus, quo mercurius in ipſo nodo, eoque ſeptentrionali, ſive aſcendenti, verſabatur hor. 23. 41. 51 poſt meridiem diei 8 novembris. Atque adeo cum coniunctio hora 6. 5. 21 a meridie diei 9 commiſſa fuerit, intervallum temporis, quo planetæ adventus ad nodum coniunctionem anteceſſit, fuiſſe liquet horarum 6. 23. 30.

Ut autem inveniamus nodi longitudinem e tellure viſam, quo tempore mercurius, nodum ipſum attingens, eclipticæ planum traiecit, quoniam horarium mercurii a ſole motum in ecliptica ſupra elicuimus min. 6. 3; inter coniunctionem vero, ac tempus, quo mercurius nodum tetigit, horas interceſſiſſe comperimus 6. 23. 30, cui tempori competunt eius motus min. 38. 37, erit hæc differentia longitudinum ſolis, & mercurii e tellure viſa ad horam 23. 41. 51, quo ſcilicet tempore planeta in nodo verſabatur. Atqui ſolis longitudo colligitur eo tempore in ſcorpii grad. 16. 31. 5; mercurius igitur, atque adeo nodus ipſe telluri ſpectabatur in ſcorpii grad. 17. 9. 42.

Denique ut appareat ad quodnam longitudinis punctum nodus hic, e ſiſtematis planetarii centro, hoc eſt e ſole, viſus, referatur, aliquid præcogniti ex aſtronomicis hypotheſibus aſſumemus, quod tamen tale erit, ut in eo vel nihil, vel parum admodum errari poſſit, nempe illud: qui fuerit planetæ motus e ſole viſus, eo, quod diximus, temporis intervallo, horarum 6. 23. 30. Hunc ego motum e Caſſinianis tabulis collegi, in orbita quidem mercurii grad.

1. 38.

1. 38. 16, ſed ad eclipticam reductum grad. 1. 37. 34, ac tantus eſt angulus elongationis mercurii in coniunctione exiſtentis a nodo, in plano eclipticæ ſumptus, quem ſcilicet angulum recta linea, a ſole ad nodum ducta, cum ea recta comprehendit, quæ ipſo coniunctionis tempore ex ſole ad tellurem pertinebat; quo tempore cum telluris longitudo (quam recta hæc deſignat) e ſole viſa ſupra poſita fuerit in tauri grad. 16. 47. 10, relinquitur longitudo nodi ex ſole in tauri grad. 15. 9. 36.

Determinatio inclinationis orbitæ mercurii ad eclipticam.

ET ſi perdifficile eſt ex obſervationibus planetæ prope nodum habitis orbitæ eius inclinationem ad eclipticam dimetiri, tentabimus tamen, quæ nobis prodeat in hoc mercurii tranſitu inclinationis huiuſce quantitas. Inclinationem vero orbitæ cum dicimus, non eum angulum ſpectamus, quo ſemita a mercurio in ſole peragrata, eclipticam ſecare viſa eſt, quæ mere apparens eſt inclinatio, e duorum motuum, mercurii, & ſolis, compoſitione, nec non ex utriuſque planetæ a tellure diſtantiis pendens, quam equidem ſupra graduum 8. 2 invenimus; ſed angulum illum, quem planum orbitæ cum eclipticæ plano conſtanter (quantum equidem Aſtronomi arbitrantur) comprehendit.

Hunc ergo angulum ut inveſtigemus, iterum aſtronomicas hypotheſes in ſubſidium advocabimus, quod ſine illis res hæc expediri nequeat. Quoniam igitur ipſo coniunctionis tempore, hora ſcilicet 6. 5. 21 a meridie diei 8 novembris, apparenti tempore, ſed æquali hor. 5. 49. 23 e caſſinianis tabulis diſtantia telluris a ſole ea erat, cuius logarithmus 499527; diſtantia vero mercurii a ſole ea, cuius logarithmus 449436; in triangulo autem ad mercurium, tellurem, & ſolem conſtituto, ut hæ, quas dixi, diſtantiæ, ita ſinus angulorum iis oppoſitorum, quorum angulorum is, qui ad tellurem exiſtit, notus eſt, nempe latitudo mercurii apparens coniunctionis tempore, min. 5. 29; ex ea, quam dixi, analogia prodit angulus ad mercurium grad. 179. 42. 37, quocirca tertius angulus, qui ſcilicet ad ſolem pertinet, erit grad. 0. 11. 54, atque hanc coniunctionis tempore

fuiſſe

fuiſſe conſtat mercurii viſam e ſole latitudinem, qua reperta, angulus orbitæ mercurii cum ecliptica latere non poteſt; erat enim ex antea dictis mercurii, in coniunctione exiſtentis, atque e ſole viſi, diſtantia a nodo, ſive latitudinis argumentum in orbita acceptum grad. 1. 38. 16, atque ut ſinus huiuſce argumenti ad radium, ita eſſe oportet ſinum latitudinis e ſole viſæ min. 11. 54 ad ſinum quæſitæ inclinationis, quæ propterea elicietur grad. 6. 57. 15 minutis tribus maior atque a Keplero, ac pleriſque omnibus, poſt eum tabularum authoribus, ſtatuitur.

Comparatio motuum mercurii in hac, aliiſque cum ſole coniunctionibus obſervatorum.

POſt inventum teleſcopium congreſſus mercurii cum ſole omnino ſex ab Aſtronomis, ante hunc, de quo ſcribimus, congreſſum obſervatos accepimus.

Primus a Gaſſendo Pariſiis anno 1631 novembris die 7 mane, in quo tamen nihil præter planetæ e ſole egreſſum accurate ſibi notatum teſtatur auctor, propterea quæ fuerit mercurii, ſolem peragrantis, celeritas minime ex ea obſervatione inferre licet.

Secundum tranſitum a Scakerleo anglo anno 1651 die 3 novembris in inſula Surata perſpectum ferunt, ſed eius obſervationis numeros non vidi.

Tertius & Londini Hugenio, ac Mercatori, & Gedani Hevelio, anno 1661 die 3 maii obſervatus, cum prope nodum mercurii deſcendentem inciderit, in quo longe alia eſt planetæ celeritas, cum noſtra hac obſervatione, ad nodum aſcendentem habita, conferri nequit.

Quartus ab Halleyo in inſula S. Helenæ anno 1677 die 7 novembris, idemque Avenione a Galleto, & ſociis animadverſus. Halleyus quidem tempora ingreſſus, atque egreſſus planetæ diligentiſſime definivit, in reliquis ſibi ipſi non ſatisfecit, nam neque, propter maximam ſolis altitudinem, micrometrum uſui eſſe poterat, & poſitus illos duos ad verticalem circulum, in quibus utramque hanc phaſim contigiſſe memorat, æſtimatione potius ab ſe deſignatos, quam menſuris perſpectos teſtatur; propterea in diſſertatione, quam hac de re edidit, planetæ latitudinem e Galleti

men-

menſuris, quam e propriis, deſumere maluit. Verum in hanc ipſam Galleti obſervationem, eſto accurate habitam, vitii aliquid irrepſiſſe, & du Hamel in Hiſtoria regiæ Academiæ pariſienſis anni 1697 agnoſcit, & res ipſa loquitur, plures enim eius obſervationis numeri (in Ephemeride eruditorum gallica anni 1677 editi) cum Halley numeris, ac ſibi invicem aperte pugnant, ut difficile ſit quicquam inde exculpere, quo de planetæ motu ſatis conſtitutum videatur.

Ne tamen hoc ipſum intentatum relinquam, utar mercurii latitudine, quam Galletus in egreſſu notavit min. 6. 12. Ex hac, & ſolis ſemidiametro min. 16. 17, fit longitudinis differentia inter ſolem, & mercurium min. 15. 3. Deinde cum ex totali egreſſu, tam in inſula Sanctæ Helenæ, quam Avenione animadverſo, colligatur Avenionem minutis temporariis 45. 2 ea inſula orientaliorem eſſe, medium autem eclipſis in S. Helenæ fuerit hor. 0. 3. 50, fuiſſe oportet medium Avenione hor. 0. 48. 53. Ex quo patet perperam ab Galleto coniunctionem ſtatui hor. 0. 39, cum coniunctio medium illud ſubſequi, non præcedere debuerit.

Iam ex perpendiculari diſtantia mercurialis ſemitæ a centro ſolis, quam min. 4 circiter fuiſſe ex obſervatione liquet, atque ex eius inclinatione ad eclipticam, quæ a gradibus 8 non valde abeſſe poteſt, conficitur ſemitæ portio inter medium eius punctum, & coniunctionis articulum intercepta ſecundorum 34.

Ad hæc cum ea, quam dixi, inclinatione grad. 8, & differentia longitudinis a ſole, quam mercurius egrediens obtinuit, min. 15. 3, efficitur pars ſemitæ inter coniunctionem, & egreſſum min. 15. 12, quibus ſi ſecunda illa 34 adiiciantur, fiet dimidia ſemitæ longitudo, quæ ſcilicet a medio tranſitus ad egreſſus locum protenditur, min. 15. 46, atque eam mercurius horis 2. 37. 10, iuxta Halley obſervationem, peragravit. Apparens igitur motus planetæ in propria ſemita unius horæ ſpatio min. 6. 2, & ad eclipticam reductus min. 5. 58, quinque ſecundis minor eo, quem in poſtrema hacce coniunctione ſupra invenimus.

Quintum congreſſum anno 1690 die 10 novembris Erfordiæ Kirkius, Norimbergiæ Wurtzelbau, & Eimmart, Cantone PP. Fontenay, & le Compte, atque alii alibi obſer-

ſervarunt. Erfordiæ, & Norimbergæ vix quicquam notatum præter planetæ exitum. Cantone diu quidem mercurius in ſole viſus, eiuſque iter deſcriptum, ſed deſcriptionis exemplum, primum parum accuratum, deinde emendatius ad regiam academiam pariſienſem delatum, nuſquam tamen (quod ſciam) vulgatum eſt; quæ vero ex eo autographo in Hiſtoria academiæ ipſius ſparſim relata extant, ad motum mercurii definiendum non ſufficiunt.

Sexta denique extat huiuſce generis obſervatio Lutetiæ a Caſſino, Hiræo, Maraldo, Roterodami a Iacobo Caſſino, Viennæ a Co: Marſilio, Norimbergæ a Wurtzelbau habita die 3 novembris anni 1697.

In hac obſervatione motum mercurii a ſole tempore minutorum horariorum 44. 33 reperit Caſſinus (referente Du Hamel in Hiſtoria academiæ anni 1697) minutorum circuli 4. 33. Subductis rationibus fit horarius planetæ a ſole motus min. 6. 8, quem nos in tranſitu huiuſce anni ſecundis, haud amplius, 5 minorem invenimus. Itaque motus hic noſter horarius min. 6. 3 medius eſt inter eum, quem in coniunctione anni 1697 a Caſſino accepimus, atque eum quem ex Galleti obſervatione anni 1677 ſupputavimus.

Ac neſcio an ex his, quæ diximus, non nihil corrigendum ſit in durationibus ſolarium a mercurio eclipſium, quarum tempora egregius aſtronomus Halleyus in præclara illa de hoc argumento edita diſſertatione (quæ e regiæ Societatis londinenſis Tranſactionibus in Acta eruditorum I ipſiæ anni 1693, nec non in aſtronomicas Whiſtoni prælectiones translata extat) conſignavit, ut maxima quidem duratio, quam ille dimidiam horarum 2. 44 ſtatuit, fiat horarum 2. 40; ac reliquæ omnes proportione eadem minuantur. Sed hæc ſummi illius viri iudicio relinquemus.

Hæc quidem de longitudinis motu. Mutationem vero quod attinet, quam planeta iuxta latitudinem in hiſce coniunctionibus ſubit, ex qua præſertim apparentis eius ſemitæ ad eclipticam inclinatio pendet; quoniam in congreſſu anni 1677 longitudinem dimidiæ ſemitæ, a mercurio in ſole deſcriptæ, invenimus min. 15. 46, ex ea, & ſolis ſemidiametro min. 16. 17, fit angulus a ſemita, atque ab ipſa ſemidiametro in egreſſus puncto comprehenſus grad. 14. 28. Ex latitudine vero, egreſſus tempore adnotata, min. 6. 12, con-

conflatur angulus ſemidiametri cum perpendiculo, in eclipticam e puncto egreſſus demiſſo, grad. 67. 37. Horum angulorum ſumma grad. 82. 5 ex grad. 90 ablata, angulum ſemitæ apparentis mercurii cum ecliptica graduum 7. 55 efficit; cum quo, & ſemitæ totius longitudine min. 31. 32, elicitur differentia latitudinum in ingreſſu, atque egreſſu min. 4. 21, atque hoc eſt latitudinis incrementum, quod planeta ſpatio horarum 5. 14. 20 (quæ eſt eclipſis duratio ab Halleyo obſervata) ſuſcepit. Iuxta hanc rationem debuit in hac poſtrema eclipſi intervallo horarum 5. 1. 9 (nempe ab ingreſſu ad egreſſum) mercurii latitudo augeri min. 4. 10 id quod octo ſecundis deficit ab eo latitudinis incremento min. 4. 18, quod ex obſervatione hac poſtrema deduximus.

Non diffiteor motum hunc latitudinis in congreſſu anni 1677 paullo alium repertum iri, ſi ex aliis latitudinum menſuris in ea obſervatione captatis perquiratur. Verum cum harum numeri ſibimet ipſis non omnino conſentiant, & tamen ab eorum progreſſu liqueat mercurii egredientis latitudinem ab ea denique min. 6. 12 quantitate haud multum diſtare poſſe, nullam huiuſce rei indagandæ potiorem rationem exiſtimavimus ea, quam ſecuti ſumus.

Porro in congreſſu anni 1697 nonnihil minor invenietur latitudinis mutatio, ſi ea, quæ habet du Hamel in Hiſtoria academiæ pariſienſis anni 1697, cum iis conferantur, quæ in commentariis eiuſdem academiæ anni 1707 a Caſſino peculiari diſſertatione ſcripta extant. Ait enim du Hamel inter coniunctionem, & egreſſum interceſſiſſe horas 2. 11. 26, & mercurii egredientis latitudinem obſervatam perhibet min. 8. 58. Caſſinus vero latitudinem fuiſſe memorat auſtralem min. 10. 42, ſcilicet in coniunctione ipſa. Quapropter latitudinem ſpatio horarum 2. 11. 26 decreviſſe patet min. 1. 44, nimirum cum ipſa auſtralis eſſet; atque, ea ratione ſervata, latitudinem borealem intervallo horarum 5. 1. 9 augeri oportet min. 3. 59; a quo obſervatio anni 1677 ſec. 10, noſtra autem ſec. 19, utraque in exceſſum diſcrepat. Sed videlicet perdifficile eſt hoſce motus ex obſervationibus brevi temporis ſpatio habitis (quo ſcilicet tempore mercurius quartam, aut quintam ad ſummum itineris ſui in ſole partem peragrabat) exacte definire, ac il-

lud potius mirandum tam modica inveniri inter haſce obſervationes diſſidia, præſertim cum in noſtra, mercurii poſitiones per tot refractionum ambages nobis exquirendæ fuerint.

Inveſtigatio mediorum motuum mercurii.

OBſervationum huiuſce generis uſus eſt non contemnendus in mediis motibus definiendis. Ea propter qui denique motus ex hac obſervatione noſtra cum antiquioribus collata eliciatur, nunc diſpiciemus methodo eadem, quam celeberrimus Caſſinus in ea, quam diximus, egregia diſſertatione, hanc indaginem eſt aggreſſus.

Ac primum illud notandum ab antiquiſſima obſervatione, quam a Gaſſendo habitam retulimus anno 1631, ad Halley obſervationem anni 1677, parem annorum numerum effluxiſſe, atque ab hac ad noſtram, quæ anno 1723 eſt habita, annos ſcilicet utrobique 46. Ante omnia igitur dierum quoque, & horarum intervalla comparabimus, & quatenus ſibi conſentiant perpendemus.

Gaſſendus obſervatum ſibi ait egreſſum mercurii e ſole die novembris 6 anni 1631 hora, ex altitudine ſolis, 22. 28; punctum vero limbi, in quo egreſſus contigit, ita deſcribit, ut de eo dubitationem omnem non tollat. En eius verba: *quantum præciſe ea limbi pars diſtiterit a diametro, verticalem repræſentante, iurare omnino non auſim, quippe ſol tempore tam brevi ante hunc exceſſum illuxit.... ut non ſatis notarim punctum, e quo factus eſt exitus. Aut fallor tamen, aut is fuit inter 32, & 33 gradus; memini enim non longe abfuiſſe a gradu 35, an citra tamen, an ultra fuerit, hoc eſt quod doleo non adnotatum. Utcumque ſe res habet, ſuſpicio ad illud propendet.* Ex inde ſupputationes ſuas ita inſtituit, quaſi planeta e gradu 32 min. 30 exceſſiſſet, quo poſito provenit illi latitudo eo tempore min. 6. 20, atque aſſumpto e rudolphinis tabulis mercurii motu, ac ſolis ſemidiametro, coniunctionem elicit hor. 19. 58. Verum ob eas cauſas, quas afferam, ubi ad motum nodorum ventum erit, probabile mihi eſt planetæ exitum tantundem ſaltem ultra gradum 35 contigiſſe, quantum ipſe citra eum gradum ſtatuit, nempe in gradu 37 min. 30, quo poſito erit mercurii

egre-

egredientis latitudo min. 5. 25, ex qua, & ſolis ſemidiametro min. 16. 17 conſit differentia longitudinum ſolis, & mercurii min. 15. 21, quam differentiam, horario motu obſervationibus noſtris definito, explet mercurius horis 2. 32, atque his ab egreſſus hora deductis, fit coniunctionis tempus hor. 19. 56 pariſiis, quæ bononiæ eſt hora 20. 32.

Iam vero in obſervatione 1677, poſita ea, quam ſupra dixi, longitudinum differentia in egreſſu min. 15. 3, ac horario motu longitudinis mercurii a ſole min. 5. 58, prodit intervallum inter coniunctionem, & egreſſum hor. 2. 31. Egreſſus vero in inſula Sanctæ Helenæ obſervatus eſt hor. 2. 41; ergo coniunctio ibi hora 0. 10, quæ bononiæ eſt hora 1. 20 poſt meridiem diei 7 novembris, atque idem fere tempus elicitur, ſi medio huiuſce tranſitus, ſupra invento in ea inſula hor. 0. 4, addantur minuta horaria 6, quæ ſecundis illis 34 mercurialis ſemitæ, inter medium eclipſis, & coniunctionem interceptis, debentur.

Ex quo obiter notare licet tempora harum mercurii coniunctionum, cum hactenus obſervatarum, tum quæ deinceps obſervandæ erunt, a clariſſimo Halleyo in ea, quam memoravimus, diſſertatione tradita, ita accipienda eſſe, ut minime ipſum coniunctionis articulum (quanquam hoc tituli præſeferant) ſed potius medium tranſitus planetæ oſtendant. Coniunctionem enim mercurii anni 1677 conſignat hora londini 0. 28, quæ in inſula S. Helenæ eſt hor. 0. 4, id quod minime in tempus coniunctionis, ſed in medium eclipſis, ibi obſervatum optime quadrat.

Porro quoniam ex anno 1631 die 6 novembris hor. 20. 32 ad annum 1677 die 7 novembris hor. 1. 20 anni effluxerunt 46, quorum biſſextiles 12, ac præterea hor. 4. 48; fit intervallum inter haſce coniunctiones dierum omnino 16802 hor. 4. 48. Pariter cum ex anno 1677 die 7 novembris hor. 1. 20 ad annum 1723 die 9 novembris hor. 6. 5 interceſſerint anni 46, quorum 10 biſſextiles (annus enim 1700 ex gregoriana correctione communis eſt habitus) ac inſuper dies 2 hor. 4. 45, conflatur harum coniunctionum intervallum dierum iterum 16802 horarum 4. 45, quod a priori illo dierum 16802 hor. 4. 48 tribus, haud amplius, horariis minutis diſcrepat, miro plane in tam difficili indagine obſervationum, ac calculorum conſenſu. Eo igitur ſe-

 curius

curius ad medium planetæ motum inveſtigandum progrediamur.

Ad hoc autem obſervationes duas inter ſe ſe remotiſſimas comparabimus, Gaſſendi ſcilicet, & noſtram, quarum intervallum ex dictis colligitur dierum 33604 hor. 9. 33, ſeu minutorum 48390333 temporis veri, ac tantumdem medii; æquatio enim dierum nihil turbat, quippe quæ ad ſenſum eadem utroque hoc tempore ex aſtronomicis hypotheſibus deducitur; atque hoc tempore mercurius periodos 382, puta gradus 137520 vero motu, ſive e ſole viſo abſolvit, ac tantum præterea zodiaci arcum, quanta eſt inter telluris longitudinem, utroque hoc tempore ſole viſam differentia; quam ego quidem e caſſinianis tabulis colligo grad. 2. 5, longitudinem enim telluris in priori illa coniunctione invenio in grad. 14. 42, in hac vero poſtrema in grad. 16. 47 tauri, ut propterea fiant gradus omnino 137522 min. 5, ſive minuta 8251325. Hinc inquam verus eſt mercurii motus, qui equidem a medio non nihil diſcrepat, quod fieri poſſit utroque hoc tempore minime eamdem eſſe planetæ ab aphelio diſtantiam. Verum cum inter coniunctionis utriuſque loca gradus 2. 5, haud amplius, interſint, quo arcu promotior eſt poſterioris huiuſce, quam prioris locus, aphelium vero, annorum 92, qui interceſſerunt, ſpatio, haud multum citra, vel ultra hanc eamdem graduum 2 menſuram promoveri conſtet, exiguum denique quiddam errari poteſt, ſi diurnum planetæ motum, hac comparatione elicitum, tamquam medium ſpectemus. Ductis igitur minutis circuli 8251325 in 1440 horaria minuta, quæ dies unus continet, & producto per 48390333 horaria, e quibus intervallum coaleſcit, diviſo, prodit diurnus motus mercurii grad. 4. 5′. 32″. 34‴. 50⁗.

Eum motum ex anno 1631 ad 1697 invenerat Caſſinus grad. 4. 5′. 32″. 21‴, ex anno autem 1631 ad 1690 graduum 4. 5′. 32″. 42‴, propterea medium quoddam ſumens, ſtatuerat grad. 4. 5′. 32″. 32‴, vel ſi obſervationum quoque aliarum, a Bullialdo expenſarum, ratio haberetur, grad. 4. 5′. 32″. 35‴. 37⁗, id quod 47, haud amplius, quartis ſcrupulis inventam a nobis excedit menſuram.

Quod ſi tamen hunc motum, ex conſtitutis utcumque planetæ inæqualitatibus, nonnihil ſubtilius decernere lubeat; quo-

quoniam mercurii aphelium annorum 92 ſpatio gradibus 2. 41 promoveri pleræque aſtronomicæ tabulæ ſtatuunt, ſi ab hocce arcu auferantur gradus 2. 5, qui inter prioris, ac poſterioris coniunctionis loca interceſſerunt, reſiduum grad. 0. 36 erit arcus interceptus inter huius poſtremæ locum, & punctum illud zodiaci, quod ubi mercurius in hac noviſſima revolutione attigit, æqualem ab aphelio diſtantiam obtinuit, atque in priori coniunctione obtinebat; hunc vero arcum mercurius motu ex ſole viſo, in hac, ubi verſabatur, ab aphelio diſtantia media ſignorum nempe 5, grad. circiter 13, peragrat horis 2. 21 (ubi ſcilicet horis 6. 23. 30 motus eius e ſole apparens eſt grad. 1. 38, ut ſupra poſitum eſt). Ergo hora poſt coniunctionem 2. 21 mercurius eamdem ab aphelio diſtantiam eſt aſſecutus, quæ fuit tempore coniunctionis anni 1631; atque hoc temporis intervallo, ſupra revolutionis 382, ac gradus 2. 5, antea inventos, minuta quoque circuli 36 in zodiaco eſt emenſus. Quare, ſi iterum ratio ineatur, fient ſcrupula circuli 8251361 in 1440 horaria ducenda, ac per ſcrupula temporis 48390474 dividenda; unde prodit diurnus motus medius grad. 4. 5′. 32″. 36‴. 7⁗. Ex poſtrema hac indagine (quam propter longius, quod nobis obtigit, intervallum tutiorem arbitror) fit motus medius in anno communi ſign. 1. 23. 43′. 19″. 42‴. 35⁗ quatuor, aut quinque ſecundis maior atque in rudolphinis, ricciolianis, & hiræanis tabulis.

Inveſtigatio motus nodorum mercurii.

SI quid in hac re, quam agimus, difficultatem habet, habet ſane nodorum mercurialis orbitæ motus indago, quæ cum e duarum obſervationum collatione pendeat, in quibus obſervationibus ſingulis arduum eſt nodi poſitum accurate decernere, multo maioris operæ eſt ex utroque hoc poſitu eius puncti progreſſum æſtimare.

De hoc argumento agens ſummus aſtronomus Ioannes Dominicus Caſſinus in ea, cuius ſæpe meminimus, diſſertatione, cum nodi aſcendentis longitudinem ad omnium coniunctionum, eatenus obſervatarum, tempora, qua pollebat ſolertia, indagaſſet, has, quæ ſequuntur, e tellure viſas longitudines reperit, quibus longitudinibus locus nodi e

ſole

ſole ſpectatus ex diametro opponitur; nimirum: 1631 novembris 6 ſcorpii 13. 8, 1677 novembris 7 ſcorpii 14. 12; 1690 novembris 10 ſcorpii 14. 32. 25; ac denique medio tempore inter obſervationes 1690, & 1697 (quod tempus incidit in menſem maium anni 1694) ſcorpii 14. 42. 10, e quibus prodit annuus nodi motus, modo min. 1. 21, modo 1. 26, modo 1. 31, ex obſervatione tamen Hevelii, anno 1661, 3 maii ad nodum deſcendentem habita, quæ puncti huius longitudinem exhibet in tauri grad. 14. 24, ſi ea cum Gaſſendi obſervatione conferatur, celeriorem nodi motum colligi obſervat, quippe qui in annis 30 nondum expletis foret 1. 16, nempe in annos ſingulos min. 2. 32.

Annui motus nodi quantitas min. 1. 20, vel 1. 21 parum ab ea diſcrepat, quam plerique aſtronomi, qui elapſo ſeculo floruerunt, in eorum tabulis conſignarunt. Alii tamen ſunt, qui eum motum non maiorem 50, vel 51 ſecundis ponant, qui fixarum ſtellarum motus eſt annuus, quod in copernicana ſententia eo redit, ut nodi ſint plane immobiles, ac ea tantum celeritate progredi appareant, qua æquinoctiorum puncta regrediuntur, atque hanc ſententiam celeberrimus Halleyus in ea, quam ſæpe memoravi, diſſertatione, de ſolis, atque inferiorum planetarum coniunctionibus, eſt amplexatus.

Cum tentarem, quænam motus quantitas e ſingulis nodi longitudinibus a Caſſino inventis, & cum noſtra collatis, eliceretur, quæ locum nodi e ſole viſum anno 1723 novembris 9 exhibet in tauri grad. 15. 9. 36, videbam ex ea determinatione, quæ ad annum 1694 pertinet, fieri motum annuum ſec. 57, quæ ad 1690 min. 1. 9, quæ ad 1677 min. 1. 16, quæ denique ad 1631 min. 1. 20, ac ſi ad hevelianam quoque anni 1661 reſpicerem, ſecunda haud amplius 45 annua reperiebam. Motus nodi fere ſemper minor erat minutis illis 1. 20, propius tamen ad hanc menſuram accedebat, ſi obſervatio noſtra cum antiquioribus, quam ſi cum recentioribus compararetur.

Et ſi dubium non erat, quin hæc diſcrimina ab ipſarum obſervationum errorculis, ex parte ſaltem, orirentur (ut propterea minime neceſſe ſit inæqualitates ullas in nodorum motu comminiſci) atque ea demum motus menſura præferenda videbatur, quæ ex Gaſſendi, ac noſtris obſervatio-

tionibus, quippe omnium inter ſe remotiſſimis, colligitur min. 1. 20, cum tamen inter annos 1631, 1677 tantumdem temporis intereſſet, atque inter 1677, ac 1723, anni videlicet utrobique 46, lubuit experiri, an res hæc ſubtilius adhuc enucleari poſſet.

Cum ergo mercurii latitudines in coniunctionibus hiſce tribus obſervatas expenderem, ac viderem anno 1631 a Gaſſendo ſtatui min. 6. 20, in ipſo planetæ egreſſu, a Galleto autem anno 1677 min. 6. 12, ac denique hoc anno 1723 ex figura colligi min. 7. 31, ac propterea ab anno 1631 ad 1677 ſecundorum 8 diminutionem, ab anno autem 1677 ad 1723 minutorum 1. 19 incrementum perſpicerem, facile agnovi in aliqua ex obſervationibus hiſce tribus vitium latere.

Poſtquam autem obſervationis ſuæ enarrationem a Gaſſendo ſcriptam in manus ſumpſi, atque ea, quæ ſupra retuli, verba legi; quibus verbis ambiguam relinquit puncti eius, e quo mercurius exceſſit, determinationem, agnovi latitudinem illam, non invito authore, non nihil minui poſſe, ſi nempe planetæ egreſſum contigiſſe ponamus tantumdem ultra gradum trigeſimum quintum a vertice numeratum, quantum citra eum gradum dubitanter ipſe ſtatuerat, nempe grad. 2. min. 30. Itaque deſcripto typo, notatoque in illo verticali circulo ad eclipticam debite inclinato (inclinationem hanc grad. 56. 48 calculo inveni) ac deſignato puncto ſolaris limbi, quod ab huius vertice grad. 37 min. 30 diſtaret, eius puncti, atque adeo egredientis mercurii latitudinem circino inveni min. 5. 25. Hoc ipſum (quo fidentius crederem) exiſtimaſſe videtur clariſſimus Halleyus, qui cum in illa coniunctione diſtantiam ſemitæ mercurii a centro quaſi obſervatam conſignaverit min. 3. 18, hoc ipſo latitudinem in egreſſu min. circiter 5 min. 30 ab ſe ſuppoſitam indicat.

Quapropter cum hæc anno 1677 deprehenſa fuerit min. 6. 12, ac anno 1723 min. 7. 31, nullum in hiſce diſſidium maius apparet, quam quod obſervationum ipſorum exiguis, neque evitabilibus erroribus, tribui queat. Neque temere crediderim latitudinem illam anni 1631 paullulum adhuc fortaſſe minuendam, ſed nihil ultra mutare volui, ne clariſſimi obſervatoris verbis vim inferre viderer.

His

His ita conſtitutis, quoniam in obſervatione caſſiniana anni 1697 invenimus motum latitudinis ſpatio horarum 2. 11. 26 fuiſſe min. 1. 44, quod in ſingulas horas efficit ſec. 48, in obſervatione autem Galleti anni 1677 eum motum ſpatio horarum 5. 14. 20 comperimus min. 4. 21, nempe unius horæ ſpatio ſec. 50, ac denique in noſtra horis 5. 1. 9, min. 4. 18, ſive hora una ſec. 51; medium inter hoſce latitudinis motum horarium eligentes ſec. 50, inveniemus latitudinem illam egredientis mercurii in obſervatione Gaſſendi horas ſibi 6. 30 depoſcere; quibus ab hora egreſſus 22. 28 lutetiæ ſubductis, fit tempus, quo planeta nodum attigit in meridiano pariſienſi hor. 15. 58. Fuit autem coniunctio pariſiis, ut ſupra dictum, hor. 19. 56; tranſitus igitur per nodum coniunctionem anteceſſit hor. 3. 58. Porro cum mercurii motum e ſole viſum prope hunc nodum, ad eclipticam reductum, ſupra ſtatuerimus grad. 1. 37. 34 intervallo horarum 6. 22. 30, qui in horis 3. 58 fit grad. 1. 0. 33, ſi hic e longitudine telluris, coniunctionis tempore e ſole viſa, ſubducatur, quæ longitudo fuit tauri grad. 14. 41. 47, prodit longitudo nodi e ſole in obſervatione anni 1631 in tauri grad. 13. 41.

Haud ſecus in congreſſu anni 1677 inveniemus latitudinem illam, qua cum mercurius e ſole exceſſit, nempe min. 6. 12, horas requirere 7. 26, ab exitus tempore, quod in inſula S. Helenæ fuit hor. 2. 41, ſubducendas, ut habeatur hora tranſitus mercurii per nodum hora 19. 15. Quare cum coniunctio ibidem fuerit hor. 0. 10, fit intervallum inter tranſitum mercurii per nodum, ac coniunctionem hor. 4. 55. Huic tempori debetur mercurii motus a ſole viſus grad. 1. 15. 3, demendus loco telluris e ſole viſo tempore coniunctionis, nempe tauri 15. 44. 31, fietque locus nodi in obſervatione anni 1677, tauri 14. 29.

Ab anno igitur 1631 ad 1677 motus nodi hinc elicitur min. 48, hoc eſt in annos ſingulos ſec. 62. Ab anno autem 1677 ad 1723 minutorum 41, nempe in annos ſingulos ſec. 53, ac denique a 1631 ad 1723 motus extitit grad. 1. min. 29, nempe pro quolibet anno ſec. 58, atque hæc poſtrema ſecurior videtur huiuſce motus definitio.

Verum cum certum ſit paucorum ſecundorum errorem in latitudine, minutis aliquot longitudinem nodi mutare poſ-

ſe,

ſe, id quod modico hoc temporis ſpatio, a prima Gaſſendi obſervatione elapſo, non contemnenda efficiat in annuo nodorum motu diſcrimina, is unus ætate noſtra ſupereſſe videtur harum obſervationum uſus, non tam ut ex his huiuſce motus quantitatem inquiramus, quam ut comparando experiamur, cuinam motus hypotheſi obſervationes ipſæ propius reſpondeant. Duas ergo illas, quas dixi, hypotheſes, alteram, quæ motum ſec. 51, alteram, quæ circiter min. 1. 20 nodo in annos ſingulos tribuit, ad coniunctiones hactenus obſervatas expendemus. Coniunctionum ipſarum tempora, & loca, nec non mercurii latitudines, quibus ad haſce comparationes utemur, hic præmittimus.

1631. Coniunctio mercurii cum ſole novembris *6* hora bononiæ 20. 32 tempore vero, ſed æquali hor. 20. *16*, ut ſupra invenimus. Locus coniunctionis in ſcorpii grad. 14. 41. 47. Latitudo mercurii min. 3. 18 bor. quanta elicitur ex latitudine tempore egreſſus (quam fuiſſe oſtendimus min. 5. 25) ex motu horario latitudinis ſec. 50, & ex intervallo inter coniunctionem, atque egreſſum ſupra tradito hor. 2. 32.

1677. Coniunctio novembris 7 hora bononiæ 1. 20 temp. ver., ſeu hor. 1. 4 temp. med. locus coniunctionis ſcorpii grad. 15. 44. 31, ut paullo antea ſupputavimus. Latitudo in ipſa coniunctione min. 4. *6* bor. Elicitur ex latitudine egreſſus min. *6*. 12, ex motu horario latitudinis ſec. 50, & ex intervallo quo coniunctio egreſſum præceſſit hor. 2. 31.

1690. Coniunctio novembris *9* hora bononiæ 18. 57 temp. ver., ſeu hor. 18. 41 temp. med. locus coniunctionis ſcorpii 18. 19. 57. Elicitur ex medio tranſitus Cantone obſervato hor. 1. *26* (ut Caſſinus referente du Hamel in Hiſtoria academiæ *1698*) ex angulo ſemitæ apparentis cum ecliptica grad. circiter 8, ex latitudine tempore coniunctionis, mox ſubiicienda, ex motu horario mercurii in ſemita ſua min. *6*. 7, & ex differentia meridianorum Cantonis ac bononiæ hor. *6*. *46*. Latitudo in ipſa coniunctione min. 12. 22 bor. Caſſin. in comment. acad. 1707.

1697. Coniunctio novembris 2 hora bononiæ 18. 34 temp. ver. ſive hor. 18. 18 temp. med. locus coniunctionis ſcorpii grad. 11. 34. 45. Elicitur ex hora pariſiis a Caſſino obſer-

obſervata 17. 58, & ex differentia meridianorum bononiæ ac lutetiæ min. 36. Latitudo tempore coniunctionis min. 10. 42. au. Caſſin. in comment. acad. 1707.

1723. Coniunctio novembris 9 hora bononiæ 6.5 temp. ver. nempe hor. 5.49 temp. med. locus coniunctionis ſcorpii grad. 16. 47. 10. Latitudo tempore coniunctionis min. 5. 29. bor. quemadmodum ſupra invenimus.

Locus coniunctionis, ſive ſolis longitudo in hiſce obſervationibus, e caſſinianis tabulis deprompta eſt. Inclinatio plani orbitæ ad eclipticam in ſubſequentibus calculis aſſumitur grad. 6. 54, quanta ab aſtronomis paſſim ſtatuitur, obſervatione hac noſtra parum diſcrepante. Denique logarithmi diſtantiarum mercurii, necnon telluris, a ſole iidem uſurpantur, quos ſupra tradidi; neque enim hæc elementa exactiſſime nota eſſe in hoc negotio requiritur.

In coniunctionibus annorum 1631, 1677, intervallo annorum 46.

Locus terræ ex ſole in coniunctione 1631		♉ 14°41′47″
Locus terræ in coniunctione 1677		♉ 15 44 31
Ergo terræ locus promotior in ſecunda obſervatione		1 2 44
In hypotheſi motus annui nodorum ſec. 51 motus annis 46 competens		39 25
Ergo incrementum diſtantiæ mercurii a nodo		23 19
Huic incremento reſpondet incrementum latitudinis a ſole viſæ, calculis ſubductis,		2 55
Sed incrementum latitudinis ex tellure viſæ		1 21
In hypotheſi vero motus annui nodorum min. 1. 20, annis 46 debentur		1 1 20
Ergo incrementum diſtantiæ a nodo		0 1 24
Cui competit incrementum latitudinis ex ſole		0 7
Sed ex tellure		0 3
Latitudo mercurii in coniunctione anni 1631	bor.	3 18
Latitudo in coniunctione anni 1677	bor.	4 6
Ergo incrementum latitudinis ex tellure obſervatum ab anno 1631 ad 1677		0 48

Eo-

Eodem pacto in reliquis coniunctionum comparationibus incrementa, aut decrementa latitudinis in utraque hypotheſi ſupputavimus, atque eadem, ſicut obſervata fuerunt adiecimus. Sed compendii gratia, calculis omiſſis, rem totam in ſynopſim hanc, quæ ſequitur, contulimus.

Coniunctionum comparationes	*Intervallū ann.*	*Incrementum, vel decrementum latitudinis e tellure viſæ a prima ad ſecundam coniunctionem.*				
		Ex hypotheſi motus annui nodi ſec. 51.		Ex hypotheſi motus annui nodi min. 1. 20.		Ex obſervatione ipſa
1631 1677	46	*incrementum*	1 21	*increm.*	0 3	0 48
1631 1690	59	*incrementum*	9 25	*increm.*	7 52	9 4
1631 1697	66	*decrementum*	13 28	*decrem.*	15 21	14 0
1631 1723	92	*incrementum*	2 42	*increm.*	0 6	2 11
1677 1690	13	*incrementum*	8 4	*increm.*	7 49	8 16
1677 1697	20	*decrementum*	14 49	*decrem.*	15 29	14 48
1677 1723	46	*incrementum*	1 21	*increm.*	0 3	1 23
1690 1697	7	*decrementum*	22 53	*decrem.*	23 13	23 4
1690 1723	33	*decrementum*	6 43	*decrem.*	7 46	6 53
1697 1723	26	*incrementum*	16 10	*increm.*	15 27	16 11

Ex his iudicare licebit, utri ex iis, quas diximus, hypotheſibus melius obſervationes reſpondeant. Mihi Gaſſendi præſertim obſervatio motum quidem nodorum, æquinoctiorum præceſſione nonnihil celeriorem poſtulare videtur; multo tamen eum lentiorem eſſe, quam pro annuis min. 1. 20 manifeſto liquet. Ac neſcio an in illa Gaſſendi obſervatione latitudo adhuc ſec. circiter 30 minuenda fuerit, ut reliquis propius reſpondeat, quod ſi fiat, comparationes

omnes cum hypotheſi motus annui ſec. 51 fere ad unguem conſentient.

Ceterum hunc motum longe deficere ab annuis min. 1. 20, ni fallor, confirmatur ex mercurio ad nodum alterum in ſole non viſo die 8 maii 1720, id quod planetæ latitudinem (tunc auſtralem) maiorem oſtendit, quam ex pleriſque aſtronomorum tabulis, poſteriori huic hypotheſi innixis, efficitur, atque hoc ipſo nodos nonnihil retrahendos ſignificat.

In tychonico mundi ſyſtemate nihil refert quantus ſit nodorum mercurii, vel planetæ alterius primarii motus. In pythagorica autem hypotheſi non æque integrum arbitror. Si enim planetarum nodos, pluſquam æquinoctia retrocedunt, progredi, hoc eſt vere moveri, obſervationes evincant, plana ipſa orbitarum neceſſario movebuntur. Atqui terreſtris orbitæ, nempe eclipticæ, planum non moveri ex immutatis inerrantium ſiderum latitudinibus conſtat; mirum igitur, ſi tellus planeta eſt.

Meridianorum differentiæ quædam ex obſervationibus huiuſce mercurii cum ſole congreſſus.

DUm hæc ſcriberem, obſervationes nonnullas de hoc mercurii ſub ſole tranſitu, aliis in locis habitas, accepi. Earum obſervationum cum noſtris collatione differentiam temporariam meridiani bononienſis ab eorum locorum meridianis deduxi.

Patavii vir clariſſimus Ioannes Marchio Polenus, eius gymnaſii mathematicus præſtantiſſimus, in epiſtola, quam ea de re Gabrieli fratri meo inſcriptam vulgavit, mercurium ad ſolis marginem obſervatum ſibi memorat hor. 3. 29. 54, atque hoc eſt tempus ingreſſus centri, quemadmodum ex ipſius verbis facile colligitur. Fuit autem ingreſſus centri, ex iis, quæ ſupra poſuimus, bononiæ h. 3. 27. 0, ergo differentia temporis, qua Patavium bononia in ortum vergit min. 2. 53, intra ſec. 30 conſentiens cum ea differentia, quam ex aliis obſervationibus antehac collegimus min. 2. 24.

Romæ Illuſtriſſimus Præſul Franciſcus Blanchinus ingreſ-

ſum

ſum quidem mercurii in orbem ſolis non notavit, verum in iis, quas ad me dedit, literis deprehenſam ſibi narrat differentiam temporariam aſcenſionis rectæ mercurii, ac limbi orientalis ſolis ſecundorum temporis ſex hora 3. 44, atque iterum ſecundorum 26 hora 4. 38. Ex pluribus autem cum lunæ, tum ſatellitum iovis eclipſibus ab eodem viro celeberrimo romæ, atque abs me bononiæ obſervatis conſtat romam bononia orientaliorem eſſe min. 4. 25 ſat proxime; quæ differentia, ſi ex horis 3. 44, & 4. 38 ſubducatur, fient tempora duarum, quas dixi, mercurii obſervationum in meridiano bononiæ hor. 3. 40, & hor. 4. 34, quibus temporibus differentias aſcenſionis rectæ mercurii, & limbi orientalis fere ad unguem eaſdem nobis, atque ipſi obſervatas, ex obſervationum noſtrarum ſerie apparet.

Genuæ vir doctrina, iuxta ac nobilitate, ſummus, Paris Marchio Salvagus, ampliſſimæ eius reipublicæ Senator, mercurii ac ſolis contactum obſervavit hora 3. 20. 33, cui tempori conſenſiſſe refert a clariſſimo Abbate Barabino habitam eiuſdem phaſis determinationem, etſi utramque, nonnullis, quas memorat, de cauſis, nonnihil dubiam exiſtimat. Si ergo id de interiori mercurii, & ſolis contactu interpretemur, quoniam hic bononiæ accidit hora 3. 27. 44, erit genua occidentalior bononia minutis temporariis 7. 12. Hanc tamen differentiam minutorum ſaltem 9 ex lunæ eclipſibus utrobique obſervatis alias, ac certius, ni fallor, deduximus.

Pariſiis in obſervatorio regio celeberrimus aſtronomus Iacobus Philippus Maraldus (ut ſuis ad me literis ſignificavit) mercurium in limbo ſolis primum deprehendit hora 2. 50. 13. Nos bononiæ hora 3. 26. 22; obſervatorium ergo pariſienſe noſtro occidentalius eſt minutis 36. 9. Contactus interior ſolis, & mercurii pariſiis accidit hora 2. 51. 48; bononiæ vero hora 3. 27. 45. Iterum ergo pariſienſe obſervatorium occidentalius bononienſi min. 35. 57. Poſterior hæc determinatio certior videtur, quod in priori illa obſervatione conſtare nequeat, an utrobique, cum primum planeta videri cœpit, eadem diametri ſuæ parte ſoli immerſus eſſet. Utraque autem optime conſentit obſervationibus aliis permultis, lutetiæ, ac bononiæ habitis, quarum plurimæ in commentarios regiæ illius academiæ relatæ extant.

Bibur-

Biburgi ad danubium, quod oppidum min. 1. 40 ingolſtadio orientalius perhibetur, mercurius ortivum ſolis limbum ingreſſus erat hor. 3. 30. 0, ut ex literis doctiſſimi, atque ornatiſſimi P. Nicaſii Grammatici Soc. Ieſu, qui ingolſtadii degens (ubi matheſim ſumma cum laude profitetur) tranſitum hunc, ob interpoſitas nubes, obſervare nequivit, quod idem ſibi norimbergæ accidiſſe ſignificavit vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus Ioannes Philippus Wurtzelbau. Quoniam ergo totalis ingreſſus notatus eſt nobis hor. 3. 27. 45, erit biburgum orientalius bononia min. 2. 15 temporis.

Ingolſtadium vero (quippe biburgo occidentalius min. 1. 40) erit orientalius bononia min. 0. 35. Harum urbium duarum meridianos ex lunari quoque eclipſi die 28 iunii 1722, utrobique obſervata, parum aut nihil differre compertum habemus.

Oeniponte mercurius totus ſolem ingreſſus erat hor. 3. 29. 13, ut ex eiuſdem P. Grammatici literis cognovi. Bononiæ hora 3. 27. 45. Ergo œnipons orientalior bononia min. 1. 28.

Fig. II.

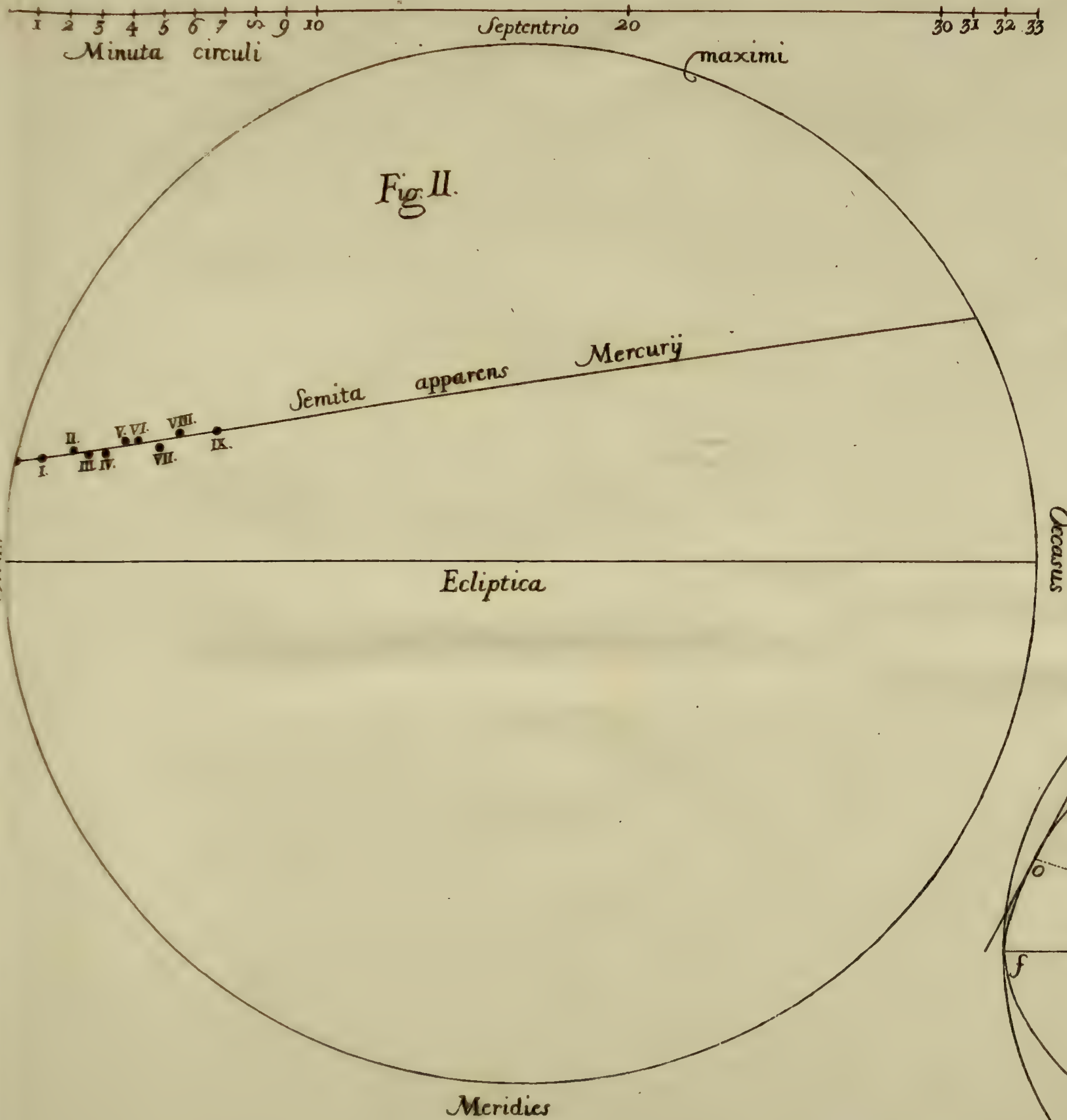
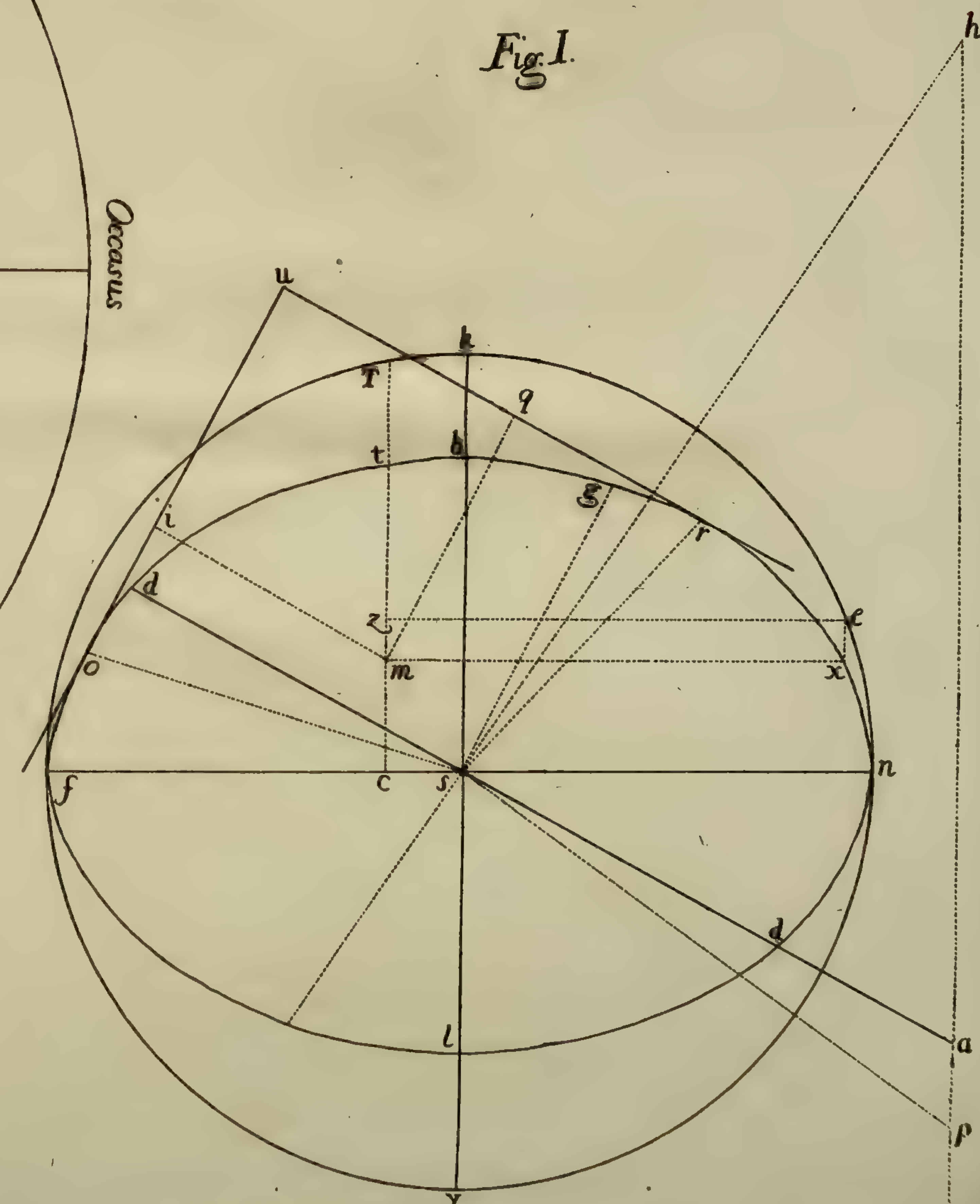

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Septentrio 20
30 31 32 33
Minuta circuli maximi
Semita apparens Mercurij
I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX.
Ortus
Occasus
Ecliptica
Meridies

Fig. I.


h
u
k
T
q
t
b
g
r
i
d
z
e
m
x
o
f
c
s
n
d
l
a
p
y

EUSTACHII MANFREDII

De iovis & martis coniunctione heliocentrica obſervata anno MDCCXXVII.

SUperiori anno MDCCXXVII menſibus maio, iunio, & iulio determinata ſunt in hoc obſervatorio permulta temporis puncta, quibus vel mars vel iuppiter meridianum circulum traiecerunt, necnon & meridianæ eorumdem planetarum altitudines; conſtabat enim fore, ut hi planetæ die 29 menſis iunii in una linea recta, ſeu potius in uno plano, eoque ad planum eclipticæ perpendiculari, ſimul cum centro ſolis exſiſterent; per quod tempus planetarum alterius ab altero diſtantia minima fuit illarum omnium, quas vel in illa converſione ſynodica obtinere potuimus, vel in ſequenti exſpectamus, quæ anno MDCCXXVIIII, ſeptembri menſe exeunte, finietur. Atque ego quidem obſervationes illas, & calculos, qui ad has ſpectarent, necnon & alia, quæ ipſe in martis motibus per id tempus animadvertiſſem, proximo ſuperiori auguſto menſe ad Iacobum Riccatum Comitem, ſodalem noſtrum, miſi, cum omnia in epiſtolam contuliſſem. Idque feci, ut ſatisfacerem viro doctiſſimo, ac me dudum hortanti, ut obſervatione quapiam perquirerem, an marte ad iovem quamproxime accedente, appareret aliqua in illius curſu irregularitas aut perturbatio, qua illa Nevtoni hypotheſis confirmaretur, planetas, atque adeo corpora omnia ſe mutuo trahere. Nunc illius epiſtolæ ſummam exponam.

Planetæ, quos diximus, ad meridianum circulum perveniebant provecto iam die. Iuppiter, cum meridianum ipſum attingeret, iam inde a die 17 menſis maii ante meridiem obſervari potuit, quo tempore, quamvis non longius a ſole abeſſet, quam gradus circiter 13, tamen & eius tempora, & altitudines ſatis commode notabantur per ſemicirculum muralem illum, quem dudum Aloyſius Ferdinan-

nandus Marſilius in obſervatorium contulerat. Et tempora quidem illarum iovis traiectionum, eiuſdemque altitudines, tum aſcenſiones rectas, declinationes, longitudines, latitu-

Obſervationes ♃		*Tem. ver. poſt meri:*			*Altitudo merid. corr:*			*Aſcenſio recta.*		
		H	′	″	G	′	″	G	′	″
Maii	16	23	7	6	60	13	35	40	19	37
	25	22	39	$20\frac{1}{2}$	60	51	5	42	21	52
	27	22	33	5	60	59	25	42	48	59
Iunii	4	22	7	$42\frac{1}{2}$	61	30	35	44	37	17
	9	21	51	$35\frac{1}{2}$	61	49	25	45	44	1
	11	21	45	$2\frac{1}{2}$	61	56	35	46	9	21
	23	21	5	$32\frac{1}{2}$	62	37	37	48	42	47
	25	20	58	$55\frac{1}{2}$	62	43	48	49	7	58
	26	20	55	36	62	46	50	49	20	19
	27	20	52	$15\frac{1}{2}$	62	49	55	49	32	12
	29	20	45	$35\frac{1}{2}$	62	55	50	49	56	17
	30	20	42	$14\frac{3}{4}$	62	58	45	50	8	4
Iulii	4	20	28	$56\frac{1}{4}$	63	10	18	50	55	34
	5	20	25	36	63	13	10	51	7	8
	23	19	25	$44\frac{1}{4}$	63	57	55	54	19	41

dineſ-

dineſque, quas initis calculis ex obſervationibus ſelectioribus, eiſque ipſis quindecim, deduximus, ſequens tabula oſtendit.

Declinatio Septen:			Longitudo ♉			Latitudo Merid:		
G	′	″	G	′	″	G	′	″
14	42	41	12	29	1	0	56	41
15	20	13	14	32	57	0	56	13
15	28	32	15	0	23	0	56	3
15	59	43	16	49	11	0	56	5
16	18	34	17	55	59	0	56	2
16	25	44	18	21	20	0	55	53
17	6	47	20	53	55	0	56	4
17	12	58	21	18	44	0	56	18
17	16	0	21	30	55	0	56	24
17	19	5	21	42	40	0	56	22
17	25	0	22	6	25	0	56	36
17	27	55	22	18	2	0	56	39
17	39	28	23	4	47	0	56	56
17	42	20	23	16	10	0	56	55
18	27	7	26	34	38	0	57	39

Quo loco animadvertere licet, iovis poſitus obſervatos nobis, conſignatoſque in hac tabula iis calculis, quos ex tabulis Caſſini inivimus habita ratione poſtremarum corre-ctionum motuum iovis, quas correctiones Maraldus edidit, tantum reſpondere, quantum poſtulare æquum eſt. Contra vero decem ipſa minuta aberrant ab iis calculis, quos ego & Ioſephus Marcheſius, ſodalis noſter, ex tabulis tum Hi-rei, tum Viſtoni ſubduximus.

Obſervationes martis non æque faciles fuerunt, ut io-vis. Die 26 menſis maii obſervari primum Mars in meri-diano cœptus eſt, ante meridiem, cum diſtaret a ſole gra-

Obſervationes ♂		*Temp: ver: poſt merid.*				*Altitudo merid. corr.*			
		H	'	''		G	'	''	
Maii	25	22	23	10	dub.	60	6	28	dub.
Iunii	4	22	11	$13\frac{1}{2}$		62	21	34	dub.
	5	22	10	$2\frac{1}{2}$	dub.	62	33	29	dub.
	25	21	45	36		66	9	59	dub.
	28	21	41	59		66	36	15	dub.
	30	21	39	$32\frac{1}{2}$		66	51	0	dub.
Iulii	4	21	34	$51\frac{3}{4}$		67	20	57	
	5	21	33	$41\frac{1}{4}$		67	28	1	
	6	21	32	$21\frac{1}{4}$		67	35	6	dub.
	7	21	31	$24\frac{1}{2}$		67	40	36	dub.
Auguſti	1	21	4	$45\frac{1}{2}$		69	18	38	dub.

dus

dus 24, unde ſpes erat, ut inſequentibus diebus recedens a ſole magis magiſque, quotidie melius cerni poſſet. Spem illam fefellit ſæpe tenuis nebula, quæ quaſi ad conſtitutum tempus inter meridiem, & occidentem excitata, ultra altitudinem illam efferebatur, quam planeta per meridianum tranſiens obtinere debuiſſet; ipſumque idcirco non niſi ægre admodum cerni, patiebatur. Quod dico, ut intelligatis, obſervationes illas omnes, quas fecimus, altitudinum in primis, non niſi tamquam dubias a nobis poni. Eas ſequens tabula oſtendet.

Aſcenſio recta.			*Declinatio ſepten.*			*Longitudo* ♉			*Latitudo merid.*		
G	'	''	G	'	''	G	'	''	G	'	''
38	18	30	14	36	8	10	35	37	0	26	51
45	30	10	16	51	14	17	52	22	0	20	57
46	14	1	17	3	9	18	35	57	0	21	7
							♊				
60	50	8	20	39	39	2	52	19	0	6	46
63	2	25	21	5	55	4	58	40	0	4	8
64	29	58	21	20	40	6	21	36	0	3	57
67	27	13	21	50	37	9	9	5	0	1	8
68	11	21	21	57	41	9	50	37	0	0	20
										S	
68	55	26	22	4	46	10	32	6	0	0	43
69	40	12	22	10	16	11	13	56	0	0	21
87	59	10	23	48	18	28	9	27	0	20	3

Ut cognoſceretur, an aliqua ex hiſce obſervationibus incurſu martis oſtenderetur perturbatio, ſubductæ ſunt longitudines, quas in ſingularum obſervationum temporibus habere mars debuiſſet ex illis aſtronomorum tabulis, quæ accuratiſſimæ adhuc habentur, ideſt Caſſini, Hirei, & Viſtoni. Hæ ſic ſe habent.

Longitudines ♂		*ex Caſſini* ♉			*Hiræi* ♊			*Wiſtoni* ♉			*Obſervationibus* ♉		
		G	'	''	G	'	''	G	'	''	G	'	''
Maii	25	10	32	49	10	34	52	10	34	49	10	35	28
Iunii	4	17	50	3	17	51	51	17	51	49	17	52	22
	5	18	33	28	18	35	16	18	35	12	18	35	57
			♊			♊			♊			♊	
	25	2	49	12	2	51	57	2	50	38	2	52	19
	28	4	55	27	4	58	19	4	56	53	4	58	40
	30	6	19	26	6	22	24	6	20	45	6	21	34
Iulii	4	9	6	44	9	9	40	9	7	43	9	9	5
	5	9	48	21	9	51	20	9	49	22	9	50	37
	6	10	29	56	10	32	58	10	30	54	10	32	6
	7	11	11	29	11	14	33	11	12	22	11	13	56
Auguſti	1	28	8	33	28	11	46	28	8	52	28	9	27

Quod

Quod ad latitudines ſpectat, difficile eſt eas ſic comparare, ut certi aliquid concludere poſſimus; idque propter irregularitatem illarum, quæ ex obſervationibus ducuntur, quæ irregularitas oritur ex illa, quam modo diximus, altitudinum determinandarum incertitudine. Tamen obſervatarum latitudinum hic ordo eſſe videtur, ut quamdiu meridionales ſunt, nempe ad diem uſque quintum iulii, plerumque minores ſint, quam illæ, quæ ex una qualibet aſtronomorum, quos ſupra memoravimus, hypotheſi eliciuntur; e contrario fere ſemper maiores ſint, cum ſeptemtrionales evaſerint, nempe ex die quinto iulii. Harum ſeries hæc eſt.

Latitudines ♂		*ex Caſſini* M			*Hiræi* M			*Wiſtoni* M			*Obſervationibus* M		
		G	′	″	G	′	″	G	′	″	G	′	″
Maii	25	0	27	57	0	27	53	0	29	0	0	26	51
Iunii	4	0	21	23	0	21	35	0	22	42	0	20	57
	5	0	20	45	0	20	55	0	22	2	0	21	7
	25	0	7	21	0	7	31	0	8	36	0	6	46
	28	0	5	12	0	5	24	0	6	27	0	4	8
	30	0	3	49	0	3	58	0	5	1	0	3	57
Iulii	4	0	1	0	0	1	8	0	2	11	0	1	8
	5	0	0	14	0	0	25	0	1	27	0	0	20
			S			S						S	
	6	0	0	27	0	0	18	0	0	43	0	0	43
									S				
	7	0	1	9	0	1	2	0	0	0	0	0	21
Auguſti	1	0	19	25	0	19	33	0	18	39	0	20	3

Cum

Cum hæc adhuc obſervarentur, animadverti, martem diebus illis, quibus propius aberat a coniunctione heliocentrica cum iove, haud multum abeſſe a parallelo arcturi, quæ ſtella inſignis eſt, cuiuſque traiectiones per meridianum tum ad horologia examinanda, tum alias ob cauſas quotidie notabantur. Conſtitui ergo, martem ad hanc ſtellam referens, eius motus perquirere, notando ſcilicet differentiam temporum, quibus tum hæc, tum ille per meridianum ipſum tranſibant, quæ methodus multo ſimplicior eſt, minuſque erroribus obnoxia, quam prima illa, in qua tempora traiectionum planetæ ad meridiei horam referuntur, &

♂		*Tempus medi: inter ♂ & Arcturum.*			*Aſcenſio recta. ♂*		
		H	′	″	G	′	″
Iunii	25	9	58	82	60	49	41
	28	9	49	35¾	63	1	37
	30	9	43	43¾	64	29	51
Iulii	4	9	31	59¼	67	26	16
	5	9	29	3½	68	10	31
	6	9	26	7¼	68	54	42
	7	9	33	10½	69	39	0

ſupputationes e loco ſolis dependent in ecliptica ſane variabili. Atque hac quidem methodo obſervationes fieri potuerunt non plus ſeptem, ex quibus ſupputationes ſequentes peractæ ſunt, ſic quidem ut aſcenſio arcturi ſumeretur grad. 210. 49′. 46″, quanta ſcilicet ex aliis obſervationibus, eodem hoc anno vertente factis, elicitur. Quamquam minime neceſſarium erat aſcenſionem hanc accuratiſſime definire; hic ſiquidem non tam de veris planetæ locis ſoliciti eramus, quam de eius velocitatibus, quæ differentiæ ſunt longitudinum inter unum locum & alterum.

Declinatio ſuperius inventa.			*Longitudo* ♊			*Latitudo Merid.*		
G	′	″	G	′	″	G	′	″
20	39	40	2	51	55	0	6	39
21	5	55	4	57	56	0	4	0
21	20	40	6	21	30	0	3	57
21	50	37	9	8	12	0	1	0
21	57	40	9	49	50	0	0	14
							S	
22	4	46	10	31	25	0	0	49
22	10	16	11	12	50	0	0	29

Ut

Ut autem cognoſcatur, utrum hiſce obſervationibus perturbatio ulla motus martis, ab iovis attractione orta, oſtendatur, abſque eo quod vires directioneſque ſubtilius perquiramus, quibus ſol, iuppiter, & mars agere in ſe mutuo, in hac attractionum hypotheſi, debuiſſent; diverſoſque angulos metiamur, ſub quibus aliæ, atque aliæ partes orbitæ, quas mars deinceps propter eas vires deſcriberet, e terra conſpici debuiſſent; mihi quidem ſatis videtur, duo tantum conſiderare; quorum unum ad id ſpectat, quod efficere appropinquatio iovis debuiſſet in martis latitudine, trahendo ipſum paullatim extra eius orbitam ad eam partem, ubi ipſe iuppiter verſabatur; alterum ad id ſpectat, quod velocitas motus martis in longitudine manifeſtare ſane debuiſſet; quam velocitatem, adveniente vi iovis attractiva, mutari non nihil oportebat, ab eoque ordine diſcedere, quo planeta ante vel accelerabatur ipſe per ſe, vel retardabatur.

Quod autem ad primum ſpectat, cum ſit his temporibus, iuxta aſtronomorum hypotheſes, nodus aſcendens martis circa grad. 17. 30′ tauri, eiuſque orbita inclinationem ad eclipticam habeat grad. 1. 52′. Nodus vero iovis circa grad. 7. 30′ cancri; eiuſque orbita inclinationem ad eclipticam habeat grad. 1. 20′; ex his ſane trigonometrica ratione comperio, communem ſectionem, qua ſe interſecant duæ orbitæ, quas planetæ hi tenent, cadere circa grad. 2 hinc arietis, hinc libræ; cum iovis orbita, qua parte ab ariete ad libram procedit, meridionalior ſit, quam martis.

Ex his porro ſequitur, ut cum planeta uterque in illo ſuæ orbitæ ſemicirculo verſatur, qui a 2°. grad. arietis iuxta ſignorum ordinem uſque ad 2 libræ protenditur (in hoc autem ſemicirculo verſati ambo ſunt per totum obſervationum noſtrarum tempus) iuppiter ſemper ex ea parte ſit, quæ marti eſt auſtralis; quo ſane fit, ut ſi iuppiter attractiva vi ſua deducere martem poteſt extra planum illius orbitæ, quam tenet, debeat utique ipſum trahere verſus partem meridionalem; eaque re fieri neceſſe eſt, ut latitudo martis (ſive e terra ſpectetur, ſive e ſole), ſi meridionalis quidem ſit, maior videri debeat, ſin autem ſeptemtrionalis, minor, quam videretur, ſi iovis attractio eſſet nulla.

Nunc vero ex obſervationibus, quas ſupra retulimus, manifeſtum fit, illo quidem tempore, quo obſervabamus, rem

rem plane ſecus cecidiſſe ; quemadmodum paullo ante animadvertimus. Nam utique latitudo martis, cum eſſet meridionalis, (fuit autem uſque ad diem 5 iulii) plerumque minor comperta eſt ; & contra ex illo die, cum iam eſſet ſeptemtrionalis, maior, quam ferant tabulæ aſtronomorum, quas ſupra dixi, quæque accuratiſſimæ ſunt inter omnes, quas nos quidem novimus. Si quid ergo ex his latitudinum obſervationibus ad rem noſtram poteſt colligi, id ſane non attractionem iovis confirmat, ſed potius tollit. Quod ſi obſervationes fieri potuiſſent accuratiſſime, facile crediderim futurum fore, ut nihil, ad ſenſum utique, diſcreparent a calculis, quos ex Caſſini, aut Hirei tabulis ſubduximus ; quæ tabulæ, quod ad latitudines ſpectat, nihil fere ab obſervationibus diſſentiunt, ut videantur, in hoc quidem, viſtonianis anteponendæ. Et ſane obſervationes martis, quæ diebus 4 & 5 iulii habitæ fuerunt, quæque inter ceteras certiſſimæ ſunt, nihil quidquam ab iis calculis diſcreparunt.

Quod vero ad illud ſpectat, quod ſecundo loco propoſueram ; ſit S centrum ſolis, qui in illa attractionum hypotheſi ponendus eſt tamquam immobilis, cum terra e contrario tamquam mobilis ponenda ſit, quaſi orbem quemdam annuum TEL percurreret circa ſolem. Sit præterea IVP pars illa orbitæ iovis, quam iuppiter obſervationum noſtrarum tempore perluſtrabat ; MAR illa, quam perluſtrabat mars. Sit autem punctum M illud ipſum, in quo primum attractio iovis, ante eius cum marte coniunctionem ſenſibilis fieri cœpta eſt. Oportet ergo, martem, propter hanc attractionem, ex ipſo puncto M diſcedere ſenſibiliter cœpiſſe ab orbita ſua MAR, aliamque ingredi curvam lineam MON, quæ orbitam MAR in M exterius tangeret. Sit demum SOV illa recta linea, in qua planetarum coniunctio heliocentrica ſecuta eſt, cum exſiſteret iuppiter in puncto V ſuæ orbitæ, mars vero in puncto O curvæ MON.

Iam vero ſi illa attractionum hypotheſis valet, non eſt dubium, quin toto illo tempore, quo mars ex M ad O proceſſit, vis illa, qua trahebatur ab iove, eo tenderet, ut ipſum, oblique licet, verſus lineam immobilem SOV, pariter traheret ; qua in linea planetæ ambo tandem coniuncti ſunt ; quæ vis propterea conſpirabat cum vi illa, qua mars ceteroqui ſecundum ordinem ſignorum ex M verſus lineam

SOV fertur. Contra vero poſt coniunctionem, quo tempore mars ex O proceſſit, verbi gratia, uſque ad N, attractiva vis iovis ipſum retrahebat verſus lineam SOV; & nitebatur quodammodo contra directionem vis illius, quæ ceteroqui martem, per eius orbitam, ex A verſus R, detuliſſet; quæque ipſum deferebat in illa curva, quam dixi, ex O verſus N.

Ut ergo ignoretur, & quantum mars ex harum virium compoſitione deinceps progredi debuiſſet, & præterea, idque multo magis, quanto maiores, minoreſve in dies videri progreſſiones regreſſioneſve martis debuiſſent, e terra, pro vario ipſius poſitu, ſpectatæ, quam viſæ eſſent, ſi mars ſuum curſum ſine perturbatione ulla tenuiſſet; manifeſtum certe videtur, debuiſſe vim iovis accelerare motum martis in longitudine ante coniunctionem, poſt coniunctionem retardare. Quo mihi videtur motus quoque apparens martis e terra ſpectatus eamdem fere legem debuiſſe ſequi, diverſo curvarum MAR, MON poſitu nihil id aut certe parum impediente; facit enim attractivæ vis exiguitas, ut hæ curvæ parum admodum inter ſe diſtent.

Atque hoc poſito animadvertendum eſt, velocitatem apparentem martis, e terra ſpectatam, vel ſine ulla attractione iovis, per totum illud tempus, quo obſervationes peregimus, debuiſſe perpetuo minui, idque duabus de cauſſis, quæ ſimul iunctæ eodem ſpectabant. Una eſt, quod planeta in ea parte orbitæ verſabatur, qua ſecundum ordinem ſignorum progrediens a perihelio verſus aphelium fertur, qua in parte realis eius motus ſemper retardatur. Altera eſt, quod mars reſpectu terræ a coniunctione verſus oppoſitionem ſolis procedebat, quo tempore, etiamſi realis eius motus eſſet æquabilis, tamen apparens, ſaltem quoad planeta directus eſt, (fuit autem per obſervationum tempus) debebat perpetuo minui. Componendo igitur perpetuam hanc motus retardationem cum vi iovis attractiva, martem, ut ſupra diximus, accelerante modo, modo retardante, affirmare poſſe mihi videor, velocitatem martis apparentem, poſt eius heliocentricam cum iove coniunctionem, propter iovis ipſius attractivam vim, debuiſſe plus minui (nempe ſi ad velocitatem, quæ erat ante coniunctionem, comparetur) plus, inquam, minui, quam calculi poſtulabant; plus ſcilicet,

cet, quam ſi nulla omnino eſſet attractio. Idque ſane indicio eſſe poteſt ad cognoſcendum, utrum ulla ſenſibilis attractio interceſſerit, etiamſi ſatis non ſit ad quantitatem eius declarandam.

Ut autem hoc argumento utamur, ſcire convenit tempus ipſum, quo planetarum coniunctio facta fuit, quod tempus etſi accuratiſſime definiri non poteſt, ſi mars quidem e ſua orbita elapſus curvam lineam MON peragraverit, tamen ex illo conſenſu, qui inter loca iovis obſervata & caſſinianas tabulas compertus eſt; illoque trium admodum minutorum exceſſu, qui pariter in iiſdem tabulis compertus eſt, cum ad loca martis obſervata conferrentur, ſtatui utique citra errorem poteſt, coniunctionem ipſam paucis horis calculos anteceſſiſſe, quos ex his tabulis ſubduximus. Ac cum hi calculi coniunctionem ipſam oſtenderint die 29 iunii hor. 8 poſt meridiem, putare facile poſſumus, ipſam die 29 circa meridiem ſecutam eſſe, quippe de horis aliquot incertos nos eſſe, ad id quidem, quod volumus, nihil intereſt.

Ponemus igitur obſervationem martis, quam notavimus die 28 iun. hor. 21. 41'. 59'', ut certum quemdam quaſi terminum, quo diſtinguantur motus martis, qui coniunctionem anteceſſerunt, ab iis, qui poſt coniunctionem eamdem ſecuti ſunt, ut videamus tandem, an hi motus ea lege, eaque ratione retardati ſint, quam modo diximus.

Viſtoni tabulæ, quæ in longitudinibus martis videntur inter alias accuratiſſimæ (quippe quæ ad minutum unum cum obſervationibus conſentiunt diebus vel illis, a quibus omnis aberat perturbationis ſuſpicio; uti dies ſunt 25 maii, & 4 & 5 iunii) die 25 iunii tempore obſervationis martem ſtatuunt in grad. 2. 50'. 38'' gemin.; die porro 28 in grad. 4. 56'. 53'' ſigni eiuſdem. Quapropter planetæ motus in his tribus diebus, ſeu potius in tribus hiſce martis reverſionibus, erat e Viſtoni tabulis grad. 2. 6'. 15''; nempe in diebus duobus, proportione ſervata, grad. 1. 24'. 10''. Iam ex iiſdem tabulis eodem modo colligitur, motus martis a die 28 ad 30 iunii grad. 1. 23'. 52''. Velocitas ergo, quæ marti convenit ex his tabulis in diebus duobus, qui coniunctionem ſecuntur, ab illa deficit, quam mars habet per duos illos dies, qui coniunctionem antecedunt ſecundis non am-

 plius

plius 18″. Ex obſervationibus autem, quas peregimus (illis quidem, quæ ad ſolem relatæ ſunt), compertum eſt, motum martis a die 25 ad 28 fuiſſe grad. 2. 6′. 21″, nempe grad. 1. 24′. 14″ in dies duos; motum autem duorum ſequentium dierum a 28 ad 30, fuiſſe grad. 1. 22′. 54″. Velocitas ergo obſervata per dies duos poſt coniunctionem ab illa deficit, quæ diebus duobus ante coniunctionem obſervata eſt, minutis ipſis 1′. 20″. Ex obſervationibus ergo plus deficit, quam ex calculis, minutis 1′. 2″. Atque id quidem attractionum hypotheſi eſſet ſatis conſentaneum.

Verum ſi pro illis longitudinibus, quas ex obſervationibus martis ad ſolem relati notavimus, illis utamur, quas deductas habemus planetam ad arcturum referentes, inveniemus motum trium dierum, qui coniunctionem præceſſerunt, ideſt a die 25 uſque ad 28 fuiſſe grad. 2. 6′. 1″, ut diebus duobus grad. 1. 24′. 0″ conveniant; dierum vero duorum, qui coniunctionem ſunt ſecuti, motum, ideſt a die 28 ad 30, fuiſſe 1. 23′. 34″. Atqui ſecunda hæc velocitas a prima illa deficit ſecundis ipſis 26″; cum calculis compertum ſit debere eam deficere ſecundis 18″. Nihil ergo ad confirmandam attractionum hypotheſim reliquum eſt, niſi ſecundorum 8″ differentia; quæ ſane, ad concludendum quidpiam, nihil eſt; poteſt enim eadem hæc differentia ex eo oriri, quod quarta tantum parte unius ſecundi minuti temporis erratum ſit in determinando vel martis, vel arcturi tranſitu, ſive etiam in corrigendo horologio, aut murali inſtrumento die 28; neque ad ſubtilitatem tantam aſpirare obſervando quiſquam poteſt.

Atque ego quidem nullus dubito, quin differentiæ longitudinum, ſive motuum martis, quas ex arcturo, multo certiores ſint tutioreſque, quam illæ, quas ex ſole deduximus; idque ut credam tum methodi ſimplicitas facit, tum ipſa datorum, quæ ad rem adhibentur, paucitas. Huc accedit ipſa velocitatum obſervatarum progreſſio; namque in illis, quæ a ſole pendent, diverſi quidam quaſi irregulares ſaltus animadvertuntur, qui in aliis nulli ſunt, neque cum ipſa perturbationum hypotheſi ullo modo conſentiunt. Optandum ergo erat maxime, ut obſervationes martis cum arcturo plures haberentur, nec non & eius declinationes certiſſimæ, diebus præſertim 26. 27. 29 iunii; ut & comparari

ſimul,

ſimul, & componi multis modis poſſent, concluſioneſque, quæ inde ductæ eſſent, aliæ aliis confirmari, & corrigi. At cum dierum non amplius trium motum ante coniunctionem, nempe a die 25 ad 28, habeamus cognitum, in eoque oporteat, quæſtionem hanc ſubtiliſſimam totam verti, neceſſarium utique eſſet, hunc ipſum motum accuratiſſime cognoviſſe, ac ſine illa dubietate, quæ in determinationem præſertim altitudinum irrepſit.

Tamen ad rem totam, quoad eius fieri poteſt, illuſtrandam, comparavi velocitatem, quæ in dierum, quos modo dixi, intervallo colligitur, cum illis velocitatibus, quæ intervallis aliis, inter viceſimum octavum diem, alioſque, qui coniunctionem ſecuti ſunt, conveniunt. Ac cum id ſimiliter fecerim in iiſdem velocitatibus, ut ſunt e viſtonianis numeris deductæ; inveni plerumque ſecunda minuta paucula, quæ perturbationem oſtendere quamdam viſa ſunt, cum interdum tamen perturbationem hanc, quam quærimus, adeo non oſtenderent, ut eſſent potius contraria. Omninoque affirmare poſſe mihi videor, in hac quidem coniunctione nihil ad ſenſum perſpicue ſatis ex obſervationibus noſtris in marte apparuiſſe, quod iovis attractioni eſſet tribuendum.

Ac primum quidem hæc ratio nihil pugnare videbitur cum ſyſtemate illo univerſo, in quo corpora omnia creduntur trahere ſeſe mutuo. Etenim vel illi, qui hanc hypotheſin tuentur maxime, facile concedunt attractionem iovis non eſſe utique in marte ſenſibilem. Graveſandus ſupputationem quamdam ſuam profert, qua oſtendat in coniunctione horum planetarum cum ſole, vim iovis non poſſe imminuere vim illam, qua mars verſus ſolem trahitur, quaque in peripheria ſuæ orbitæ continetur, niſi quantum ſit 1 ad 11577. Nihilominus videntur hic mihi diſtinguenda eſſe duo: effectus inſtantaneus attractionis, quem unice Graveſandus conſiderat in ſuis calculis; & effectus totalis, qui ex ea fit, cum iam corpori, quod trahitur, applicata fuit ad tempus aliquod. Et ſane ſi iuppiter martem ad ſe trahere non potuiſſet, niſi puncto illo temporis, quo mars in puncto C ſuæ orbitæ exſtitit, quod punctum C in lineam coniunctionis SV cadit; ac tum ſtatim attractio omnis ceſſaviſſet, procul dubio nulla ſenſibilis mutatio in curſu martis

ſecuta

ſecuta eſſet. Verum cum diſtantiæ horum planetarum IM, PN, tum ante coniunctionem, tum poſt, per tempus aliquod æquales diſtantiæ VO ad ſenſum conſerventur; augeantur etiam aliquantum; non ſtatim tranſgredi illos terminos poſſunt, intra quos valet proportio per calculos determinata, unde ſequitur, ut quærendum adhuc ſit, an talis vis, quamlibet parva, tamen applicata marti per dies aliquot, ipſumque perpetuo agitans, eum effectum edere debeat, qui in martis curſu tandem aliquando manifeſtetur.

Aliud eſt autem, quod conſideremus in attractionibus, quibus generatim planetæ primarii dicuntur ſe mutuo trahere. In omni coniunctione heliocentrica planeta inferior aberrare aliquantulum debet, quantumcumque id ſit, ab orbita ſua elliptica propter vim attrahentem ſuperioris; in eaque aberratione curvam quamdam lineam ſequi debet, uti MON, quæ ſemper extra, numquam intra orbitam excurrit, ut planeta eam tenens a ſole ſemper recedat, ad ſolem accedat numquam. Quapropter ubi planeta inferior ad id punctum N pervenerit, ubi vis attractiva ſuperioris inſenſibilis plane ſit, non ſane video, quid cauſæ ſit, cur ad primam deſertamque orbitam redeat. Videtur potius, meo quidem iudicio, ellipſin quamdam novam debere ingredi, quæ alterum quidem focum in ſole habeat, uti prima, ſed eius ſpecies, & poſitus, & longitudo abſoluta maioris axis omnino pendere debent a longitudine lineæ SN, & velocitate illa ac directione, quam forte habet planeta in N eo temporis puncto, quo vis attractiva ſuperioris iam ceſſat. Videtur mihi ergo in planetæ orbita, non modo poſitus maioris axis (de quo illi etiam concedunt, qui attractivas vires tuentur), ſed etiam ipſius orbitæ ſpecies, & maioris axis longitudo abſoluta debere paullatim mutari; ac veriſimile omnino eſt, debere hunc axem paullatim longiorem fieri, niſi illud modo oſtendatur, velocitatem planetæ ac diſtantiam a puncto S ita compenſari, ut axis, quem dixi, eamdem teneat longitudinem, quam habebat. Et horum quidem contraria videntur mihi debere evenire planetæ ſuperiori, ſi is utique trahitur ab inferiori.

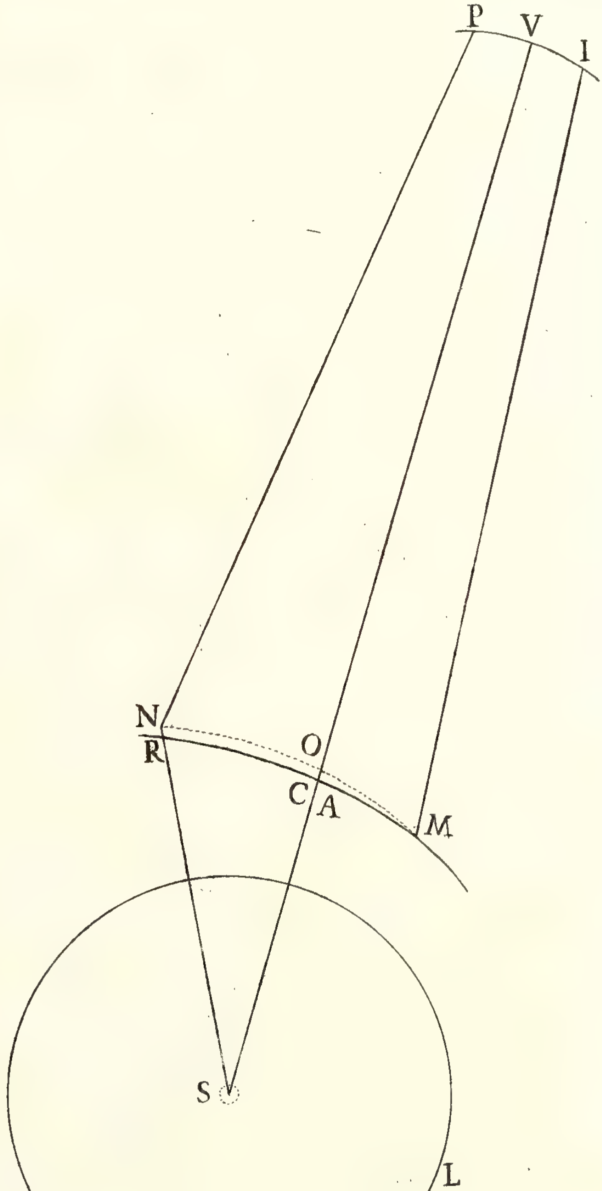
Hic vero, ut illud mittam, quod dixi, debere ellipſeos ſpeciem, ac formam mutari, quam mutationem mutatio ex-

cen-

centricitatis manifeſtaret, dubitandum minime eſt, quin ſi hæc omnia ita fiant, uti attractionum ratio poſtulat, elongatio maioris axis, quæ in martis orbita attractione iovis fieri debet, ſeculorum curſu manifeſtanda ad ſenſum ſit, martis motu medio imminuto, ſive, quod eodem recidit, periodico aucto tempore. Utrum autem in hoc planeta id vere accidat, non auſim iudicare; ad id enim requiritur obſervationum multarum tum antiquarum, tum recentium comparatio; antiquæ autem plerumque ſunt non admodum accuratæ. Utique tamen ſcio, Maraldum, virum doctiſſimum, in Commentariis academiæ regiæ ſcientiarum anni 1718, non ſine gravi cauſa adductum eſſe, ut valde ſuſpicetur motus medios tum ſaturni, tum iovis mutatos fuiſſe, ſic tamen, ut cum iſta attractionum hypotheſi minime conſentiant. Etenim iuppiter, qui planeta inferior eſt, ſi ad ſaturnum comparetur, & in quo vis huius attractiva ſenſibilis admodum eſſe putatur, deberet profecto ex iis, quæ modo diximus, dilatata orbita aliquid de motu ſuo medio remiſiſſe; ſic ferret illa attractionum hypotheſis. Atqui Maraldus comperit, ipſum contra motu medio auctum eſſe. E contrario ſaturnus, qui eſt ſuperior, ſi comparetur ad iovem, & in quem iuppiter vim attractivam exercet, ſi calculis fides eſt, ſatis magnam, deberet, contracta orbita motum ſuum acceleraſſe; cum tamen ex Maraldi ſententia videatur retardaviſſe.

Ac de his omnibus, ut iam ab illo academico, ad quem hæc ſcripſi, iudicium fieri volui; ſic nunc idem ab univerſa academia requiro; non enim id egi, ut aliquid in hac re affirmarem, obſervationibus præſertim nixus, quas imperfectas eſſe vel ipſe ſentio; multoque minus ut hypotheſin oppugnarem, quam maximorum hominum confirmat auctoritas, quæque etiam dicitur obſervationibus niti non nullis; quamquam, niſi erro, in publicam lucem nondum prodierunt. Quod ſi operæ pretium eſſe videbitur, perquiſitionem hanc perſequi, in planeta martis inſtitutam; id ſane fieri poterit in coniunctione eius heliocentrica cum iove, quæ proxime ſequetur, quemadmodum ſupra dixi, circa finem menſis ſeptembris anni ſequentis 1729. Aſtronomis curæ erit coniunctiones alias perſequi.

EUSTA-


P
V
I
N
R
O
C
A
M
S
L
E
T

EUSTACHII MANFREDII

De congreſſu mercurii cum ſole in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti obſervato die XI *novembris* MDCCXXXVI *mane.*

Tab. obſerv. aſtronom. fig. 1.

CUm mihi ob adverſam valetudinem tranſitum hunc mercurii cum ſole nonniſi per intervalla ſpectare, neque in eo mihi ipſi ſatisfacere licuerit, referam paucis quæ in hac ſpecula non tam a me, quam a viris doctiſſimis, qui frequentes huc adventare conſueverunt, obſervata fuerint, præſertim vero ab egregio iuvene *Euſtachio Zanotto Phil. Doc.*, qui meas in aſtronomica profeſſione vices gerit; deinde ea ſubiungam, quæ poſtmodum ex obſervationibus in typum relatis, atque ad calculos expenſis una cum illo definivi.

In ſupremo ſpeculæ conclavi, undè maiores tubi optici promi, aptarique poſſunt, intenderat *Zanottus* in ſolem optimæ notæ teleſcopium, a campano elaboratum, pedes 22 bononienſes longum, quo ipſum, ſi fieri poſſet, mercurii in marginem ſolis incurſum notaret; ac quando incurſum illum quorumdam aſtronomorum calculi maturius, aliorum ſerius, complurium ſcrupulorum diſſidio, pollicebantur, cum *Ioſepho Roverſio* condixerat, ſi quando ipſe ceſſaſſet, ut is confeſtim eidem teleſcopio ſuccederet. Alii interea aliunde brevioribus tubis in idem intendebamus. Cælum erat nitidiſſimum, aer nullo ventorum flatu perturbatus. Obtigit *Roverſio*, ut omnium primus planetam ad ſolis marginem deprehenderet hora poſt meridiem 22. 8. 37, ac mox interiorem eius cum ſole contactum definiret hora 22. 11. 12. Horologiis utebamur ad meridianam lineam per

eoſdem dies expenſis, quam ipſam lineam *Zanottus* per æquales altitudines matutinas, ac veſpertinas pluries ad ſolem exegit.

Obſervatoribus aliis paullo ſerius planeta in ſolis limbo eſt animadverſus. Mihi, ex inferiori conclavi collimanti teleſcopio campani pedum 11 non ante horam 22. 9. 5 eſt conſpectus, cum iam ſat notabili ſui parte ſolem delibaret, contactus autem interior eodem tubo æſtimatus hor. 22. 10. 53. Sed longe certior prior illa obſervatio, quippe quæ præſtantiori inſtrumento eſt habita. Quoniam tamen ex temporibus egreſſus planetæ mox afferendis conſtitit eius corpuſculum in exceſſu impendiſſe min. 3. 16, ſi tantumdem ex tempore contactus interioris a *Roverſio* notati, ſubduxerimus, fiet contactus exterior, ſive primus mercurii ad ſolem appulſus adhuc certior hor. 22. 7. 56.

Deinceps obſervationes eo ſpectarunt, ut puncta aliquot invenirentur eius ſemitæ, quam planeta in ſole deſcribere viſebantur. Ea puncta ſingula ad circulum horarium, necnon ad parallelum per centrum ſolis ductum retulimus, caſſiniana methodo, notatis ex horologio temporibus, quibus & limbi ſolis, & mercurius filum horarium micrometri, hic vero præterea etiam obliqua pertranſiret, interea dum ſol boreo ſui margine filum ipſum parallelum perraderet. Multa eiuſcemodi puncta nactus eſt *Zanottus* teleſcopio pedum 8; unum ego vel alterum tubo pedum 6, cui tubo micrometrum aptatum erat exquiſiti operis a v. cl. *Io: Iacobo Marinonio mathematico cæſareo* excogitatum, atque huic obſervatorio dono miſſum. Eodem & *Roverſius*, & *Thomas Perellus M. D.* nonnulla puncta alia determinarunt. Huc etiam pertinet obſervatio a *Perello* in ipſo meridiano habita, murali ſemicirculo, qua obſervatione inventa eſt planetæ aſcenſio recta ſecundis 11½ temporariis maior, declinatio autem ſecundis 58½ temporariis minor, quam centri ſolis. Illud præterea *Zanottus* ſibi ſumpſit, ut inſigniorum macularum, quæ plures eo die in ſole cernebantur, poſitus deſcriberet. Ab iis maculis facile erat planetam internoſcere, & quod exacte rotundus, & quod nigerrimus, & quod nulla areola eſſet obſeptus.

Ad mercurii egreſſum quod attinet, *Franciſcus Algarottus*, qui nuper ex gallia, & britannia in italiam redux huiuſce

ſce phænomeni ſpectandi gratia bononiam ſe contulerat, tubo pedum 8 uſus initium notavit hora a meridie o. 50. 1, finem hor. o. 53. *6*; ego vero teleſcopio illo 11 pedum initium hor. o. 51. 7, finem hor. o. 53. 44; *Roverſius* teleſcopio pedum 14 finem tantum advertit hor. o. 54. 1; verum hæ obſervationes minus certæ cum ob mediocrem tuborum præſtantiam, tum quod ventus id temporis coortus tubos ipſos nonnihil agitaret. Præferenda ergo hiſce omnibus obſervatio teleſcopio illo pedum 22 habita, quo *Franciſcus Vandellius*, in hoc ſcientiarum Inſtituto *militaris architecturæ profeſſor*, interiorem contactum definivit hor. o. 50. 50, exteriorem hor. o. 54. *6*, unde mora planetæ in limbo min. 3. *16*, & tempus egreſſus centri hor. o. 52. 28, quod ex mea obſervatione foret hor. o. 52. 25.

Hactenus obſervationes ipſæ; nunc quæ ex earum inter ſe ſe collatione una cum *Zanotto* deduxerim, perſequar. Aſſumpta ſolis diametro min. 32. 34, ac tempore eius tranſitus per circulos horarios min. 2. 17 (quos numeros & recentiorum aſtronomorum tabulæ exhibent, & obſervationes ipſæ comprobarunt) puncta illa planetariæ ſemitæ obſervando definita in typum retulimus; ac cum ob exiguas obſervationum fallacias minime omnia examuſſim in eamdem rectam lineam inciderent, nullam eorum conciliandorum rationem aptiorem invenimus, quam ſi ſtatueremus perpendicularem lineam ex centro ſolis ad planetæ ſemitam ductam angulum cum horario circulo comprehendere grad. 23. 40 ad ortum: eius vero perpendicularis longitudinem a centro ad ipſam ſemitam poneremus min. 13. 58 ad boream. Ex his reliqua omnia calculo deduximus in hunc modum.

			′	″
Initium ingreſſus mercurii in ſolis diſcum	hor.	22.	7.	*56*
Ingreſſus centri	hor.	22.	*9*.	34
Totalis ingreſſus	hor.	22.	11.	12
Initium egreſſus	hor.	o.	50.	50
Egreſſus centri	hor.	o.	52.	28
Totalis egreſſus	hor.	o.	54.	*6*

		′ ″
Mora centri mercurii in diſco ſolis	hor.	2. 42. 54
Semimora	hor.	1. 21. 27
Tempus medii tranſitus	hor.	23. 31. 1
Angulus lineæ perpendicularis ad ſemitam planetæ cum circ. horario ab obſervationibus definitus ad ortum	gr.	23. 40
Angulus eclipticæ cum horario ex tabulis aſtronomicis ad ortum	gr.	105. 48
Inde angulus eclipticæ cum perpendiculari ad mercurii ſemitam apparentem	gr.	82. 8
Et angulus ſemitæ app. cum ecliptica	gr.	7. 52
Diſtantia ſemitæ a centro ſolis ab obſervationibus inventa ad bor.	gr.	0. 13. 58
Semidiameter ſolis	gr.	0. 16. 17
Longitudo ſemitæ intra ſolis diſcum	gr.	0. 16. 45
Eius longitudinis dimidium	gr.	0. 8. 22
Ex his motus horarius mercurii in ſemita apparenti	gr.	0. 6. 10
Motus horarius apparens in ecliptica	gr.	0. 6. 6
Inde portio ſemitæ inter medium tranſitus, & coniunctionem	gr.	0. 1. 58
Portio ſemitæ ab ingreſſu ad coniunctionem	gr.	0. 10. 20
Portio eiuſdem a coniunctione ad egreſſum	gr.	0. 6. 24
Differentia longitudinis mercurii & ſolis in ingreſſu	gr.	0. 10. 15
Differentia longitudinis in egreſſu	gr.	0. 6. 21
Tempus a medio tranſitus ad coniunctionem	hor.	0. 19. 2
Tempus ipſum coniunctionis bononiæ t. ver.	hor.	23. 50. 3
t. med.	hor.	23. 34. 25
Longitudo ſolis, & mercurii in ipſa coniunctione e caſſinianis tabulis *ſcorpii*	gr.	19. 23. 30
Huic longitudini reſpondet intra ſec. 4 obſervatio a *Petro Lilio I. U. D.* eodem die habita gnomone meridiano ad Divi Petronii.		
Latitudo mercurii in ingreſſu bor.	gr.	0. 12. 37
Latitudo in egreſſu bor.	gr.	0. 14. 54

Inde

			′	″
Inde motus horarius in latitudinem	gr.	0.	0.	50½
Et latitudo in ipſa coniunctione bor.	gr.	0.	14.	1
Ex his intervallum temporis a tranſitu mercurii per nodum aſcendentem ad coniunctionem	hor.	16.	39	
Et tempus ipſum tranſitus per nodum t. ver.	hor.	7.	11	
t. med.	hor.	6.	55	
Ex tabulis caſſinianis motus mercurii in orbita e ſole viſus intervallo horarum 16. 39 circa hoc tempus, ſeu argumentum latitudinis in coniunctione	gr.	4.	15.	47
Idem motus ad eclipticam reductus	gr.	4.	13.	56
Inde locus nodi aſcendentis mercurii e ſole viſus *tauri*	gr.	15.	9.	34
Diſtantia mercurii a ſole ad tempus coniunctionis e tabulis caſſinianis	log.	449301		
Diſtantia telluris a ſole ex iiſdem tabulis	log.	499503		
Inde latitudo mercurii in coniunctione, e ſole viſa bor.	gr.	0.	30.	31
Unde inclinatio orbitæ mercurii ad eclipticam	gr.	6.	51	
Tempus a contactu interiori mercurii ad exteriorem in egreſſu ex obſ.	hor.	0.	3.	16
Portio ſemitæ hoc tempore a mercurio peragrata	gr.	0.	0.	20
Angulus ſemitæ ipſius cum ſemidiametro ſolis in egreſſu	gr.	58.	50	
Inde diameter apparens mercurii quamproxime	gr.	0.	0.	10

EUSTA-

EUSTACHII MANFREDII

De cometa anni MDCCXXXVII.

Cometa labentis huius anni milleſimi ſeptingenteſimi trigeſimi ſeptimi Matteuccio & Boldrino rem aſtronomicam exercentibus die viceſima ſecunda februarii in conſpectum venit cum cælum nitidiſſimum eſſet, quod ſuperioribus diebus & nebula obductum, & prætermodum lucido crepuſculo coruſcare viſum fuerat. In occidentali plaga infra venerem tanquam ſtella nebuloſa apparebat, magnitudine veneri æqualis, ſed debiliori lumine, & colore ſubalbido, cauda ſoli oppoſita & duos gradus longitudine circiter æquante, in extrema parte latiore, minuſque vivida. Ope teleſcopii in cometæ capite obſervatus eſt nucleus haud rotundus, nubecula quadam obductus, cuius extremitas dubia; latitudo caudæ prope caput potius diametro nubeculæ, quam nuclei reſpondere viſa eſt. Dum hæc curioſius conſpiciuntur, cometa vaporibus immergi cœpit, paullo poſt occidit, atque adeo obſervationi locus ſublatus eſt. Hoc tantum conſtitit, quod inter ceti, & piſcium aſteriſmum verſabatur; ſequentes vero obſervationes eum trans æquatorem in meridionali hemiſphærio reſpectu polorum mundi clare ponunt, quod quidem confirmant tranſitus auſtralioris trium ſtellarum in collo ceti, & cometæ per idem immobile teleſcopium.

Die 23 horis 7. 24 cometæ locum determinavimus ope ſtellæ fixæ aſteriſmi piſcium, adnotando ſcilicet tempus tranſitus utriuſque per obliqua & horarium micrometri ad teleſcopium ſex pedum aptati. Fixa minutis 2. 59 prius ad horarium, quam cometa apellebat, eratque borealior ſecundis 30½. Nos eam cenſuimus, quam in aſteriſmo piſcium Bajerus f vocat, ſed poſteriores obſervationes neque illam eſſe neque aliam quampiam adhuc adnotatam oſtenderunt, atque adeo hæc obſervatio ad locum ſtellæ inveniendum,

ſtatim

ſtatim ac ſolaribus radiis ſe abduxerit, apta erit, ut inde cometæ aſcenſio recta, & declinatio eruatur. Cometam ſecundum ordinem ſignorum progredi, atque etiam borealiorem fieri hoc veſpere iudicavimus.

Die 24 horis 7. 14 cometæ poſitum ex configuratione ſtellarum definivimus. Recta linea ab α piſcium ad venerem ducta baſis erat trianguli ferme iſoſcelis, quod verſus meridionalem plagam extendebatur, & verticali angulo cometa inhærebat; hic obtuſus erat, latuſque cometam & venerem coniungens aliquanto longius erat latere a cometa ad fixam ducto. Huiuſmodi determinatio obſervationibus, quæ poſteris diebus habitæ ſunt, bene congruit. Iam vero ut exactius locum determinaremus, ſtellam fixam obſervavimus, quæ minutis 21. 17 poſt cometam per micrometri horarium tranſibat, & auſtralior erat ſecundis temporariis 41; verum hæc quoque ab auctoribus ommiſſa eſt. Cæli portio obſervationibus noſtris expoſita ita inſignioribus ſtellis vacua erat, ut nequaquam datum fuerit quampiam reperire ab auctoribus deſcriptam, quæ & parallelo cometæ ſat proxima, & in aſcenſione recta haud valde diſſita eſſet.

Die 25 nobis tandem contigit, ut cometæ locum ſtabiliremus ex α piſcium, quæ non procul aberat ab eius parallelo. Hac ratione horis 7. 30 aſcenſio cometæ prodiit grad. 22. 1, & declinatio borealis grad. 1. 6; atque adeo eius longitudo ♈ grad. 20. 46, & latitudo auſtralis grad. 7. 35. Hic notandum eſt, nos fixarum numeros a catalogo britanico Flamſtedii deprompſiſſe.

Die 26 horis 7. 13 relato ad eamdem, & ad alias fixas cometa, eius aſcenſio recta reperta eſt gr. 23. 55. 30, & declinatio borealis gr. 1. 31; hinc longitudo ♈ grad. 22. 43, & latitudo auſtralis gr. 7. 53.

Die 27 cælum nubibus obductum fuit.

Poſtrema die februarii ope ſtellæ 108 piſcium ex catalogo britannico aſcenſio recta cometæ horis 7. 33 fuit grad. 27. 37, declinatio borealis grad. 2. 21, longitudo ♈ grad. 26. 29½, & latitudo auſtralis grad. 8. 27.

Die prima martii horis 8. 2 teleſcopium micrometro inſtructum in cometam intendimus, eiuſque tranſitum per filorum centrum adnotavimus, viſuri ſcilicet, an per immotum teleſcopium aliqua ceti ſtella tranſiret, cum nulla amplius

plius ex conſtellatione piſcium inſervire poſſet. Minutis primis circiter 51 elapſis apparuit lucida mandibulæ *Menkar* dicta, notatoque tempore tranſitus per obliqua & horarium, cometæ aſcenſionem eruimus grad. 29. 25, declinationem borealem grad. 2. 47, longitudinem ♈ grad. 28. 21, & latitudinem auſtralem grad. 8. 41.

Die 2 horis 7. 35 ope eiuſdem ſtellæ aſcenſio recta cometæ inventa eſt grad. 31. 11, declinatio borealis grad. 3. 5, longitudo ♉ grad. 0. 8, latitudo auſtralis grad. 9. 1. Cauda admodum imminuta erat, & dimidium ferme gradum longitudine æquabat.

Die 3 horis 7. 2 ope eiuſdem ſtellæ cometæ aſcenſionem rectam deprehendimus grad. 32. 44, declinationem 3. 27, longitudinem ♉ grad. 1. 44, latitudinem auſtralem grad. 9. 12.

Die 4 cælum nubilum.

Die 5 horis 7. 35 cometa cum ſtella ceti, quæ a Bajero litera *ν* diſtinguitur, & ab ipſo nuncupatur *trium in collo borealior*, ſed a Flamſtedio *ad ſupercilium ſive oculum*, comparatus aſcenſionem rectam habuit grad. 36. 0, declinationem grad. 4. 7, longitudinem ♉ grad. 5. 4, & latitudinem auſtralem grad. 9. 39.

Die 6 horis 7. 9 adhibita eadem ſtella aſcenſionem cometæ invenimus grad. 37. 30, declinationem borealem grad. 4. 28, longitudinem ♉ grad. 6. 37, latitudinem auſtralem grad. 9. 48. Adhuc cometa a vividioribus oculis nullo inſtrumento inſtructis viſebatur, etiamſi ad quintam diem fulgeret luna, & ab eo vix 7, aut 8 gradibus abeſſet.

Die 7 horis 7. 30 iterum cum ſuperiori ſtella cometam contulimus, atque inde eius aſcenſionem rectam definivimus grad. 38. 58, declinationem borealem 4. 50, longitudinem ♉ grad. 8. 9, latitudinem auſtralem grad. 9. 56. Abſque teleſcopio cometa non diſtinguebatur nebula, & lunæ fulgore impediente. Caudam tamen omnem nondum amiſerat.

Cælum nubibus opertum fuit uſque ad diem 17 martii, atque adeo ſpes nobis cometam iterum videndi ſublata erat.

In menſuris hactenus relatis exactitudinem minuit difficultas obſervandi cometæ tranſitum per fila micrometri, exi-

exiguum enim lumen micrometro illuſtrando aptum facile cometæ lumen ſuperabat, ſic ut vel cometa, vel micrometri fila ſpectatori auferrentur. In ſchemate tamen rite adnotatis cometæ locis ſuperius inventis, non modo ſingula ad rectam lineam pertinere deprehendimus, quæ ſemitam in firmamento a cometa deſcriptam repræſentat, verum etiam ſic inter ſe diſpoſita eſſe, ut facile cometam tardius in dies moveri oſtendant. Si quæ tamen errata occurrunt, quæ diurnum eius motum, aut directionem perturbent, hæc non amplius, quam ad duo, vel tria minuta aſſurgunt.

Cometæ ſemita æquatorem ſecat ad gradus 17 verſus orientem a vernali æquinoctio numeratos, & cum eo in boreali hemiſphærio verſus orientem angulum comprehendit 12, aut 13 graduum; ſic ut ea ſemitæ portio, quam hoc tempore cometa emenſus eſt, tota intra æquatorem iaceat, & eclipticam. Circulus maximus, quem hæc recta repræſentat, ſi producatur verſus occidentem, inter piſcium, & ceti aſteriſmum tranſit prope quatuor informes ſtellas a Baiero ſupra caudam ceti deſcriptas, & eclipticam, ut ex calculo eruitur, ſecat in grad. 11. 30 ♓, angulum efficiens grad. 11. 53 circiter; ſi vero orientem verſus, taurum ingreditur, tenditque verſus orionis clypeum.

Cum nobis allatæ fuerint a P. Abbate Revillas noſtræ academiæ ſocio obſervationes, quas habuit a die 16 februarii, qua die primum ab eo obſervatus eſt, uſque ad diem 25, optime eas novimus ſibi invicem reſpondere, ſupponentes cometam initio ſuæ apparitionis motum habuiſſe per rectam eamdem, quam noſtris obſervationibus determinavimus, apparentemque eius motum primis diebus velociorem, æquabilioremque fuiſſe, quod indicat cometam die 16, qua detectus fuit, non procul abfuiſſe a perigæo; eapropter a terra impoſterum receſſiſſe: quod quidem confirmat apparentis magnitudinis perpetua imminutio.

Semita, quam cometa inter aſteriſmos ſequutus eſt, non multum differt ab illa, quam habuit primus duorum, qui menſe februario anni milleſimi ſeptingenteſimi ſecundi apparuerunt, quantum videlicet deducere licet ex obſervationibus ſupra caudam habitis a Blanchino, & a Maraldo romæ, & a nobis bononiæ, caput enim tunc videri haud poterat. Hoc tantum intereſt, quod poſtremus hic cometa

in iiſdem longitudinibus borealior ſit, perinde ac ſi deſcendens nodus in conſequentia aliquot gradus proceſſiſſet, aut angulus orbitæ cum ecliptica fuiſſet imminutus.

Dominicus Caſſinus relatis ad invicem obſervationibus cometæ 1668 ab ipſo bononiæ viſi, & eius, qui apparuit anno milleſimo ſeptingenteſimo ſecundo, eumdem eſſe ſuſpicatus eſt, qui periodum ſuam annis 34 abſolverit; neque defuerunt antiquiores cometæ, qui hanc revolutionem confirmarent. Hinc Ghiſilerius academicus noſter in ſuis ephemeridibus aſtronomos monuit poſt æquale temporis ſpatium facile eumdem recurrere poſſe. Verum integro ferme anno tardius apparuit, quod fortaſſe explicari poſſet ſupponendo perihelium in antecedentia adeo motum fuiſſe, ut ad obtinendum in iiſdem longitudinibus eumdem ad ſolem aſpectum, tantumdem temporis impenderet, quod etiam conduceret ad explicandum, cur cometa hac vice minori cauda apparuerit. Fieri ergo facile poteſt, ut cometa omnino idem redierit; noſtriſque temporibus illud Senecæ, (quamvis, cum antiquum ſit, irrideatur,) tamen verum eſſe appareat. *Veniet tempus, quo iſta, quæ nunc latent, in lucem dies extrahet, & longioris ævi diligentia. Ad inquiſitionem tantorum ætas una non ſufficit, ut tota cælo vacet. Erit qui demonſtret aliquando in quibus cometæ partibus errent, cur tam ſeducti a ceteris eant, quot qualeſque ſint.*

Sequuntur obſervationes Cometæ menſibus martii & aprilis habitæ.

DIe 18 martii cælum tandem ſerenum patuit poſt undecim dies nivibus imbribuſque horridos, ac cum luna non niſi duabus poſt horis oritura eſſet, teleſcopium in eam cæli partem intendimus, ubi præcedentes obſervationes cometam debere eſſe oſtendebant. In aſteriſmo tauri eum invenimus ferme in recta linea inter ſtellam a Baiero adnotatam litera ξ, & aliam valde lucidam ab ipſo intra talem aſteriſmum omiſſam, in confinia vero arietis recenſitam, quam quidem ſupponimus adnotatam litera ν in flamſtediano catalogo. Cometa tamen borealior erat hac recta, propiorque primæ duarum ſtellarum. Cauda, quæ illi ſuper-

pererat, barbam potius referebat. Magnitudine & lumine adeo imminutus apparuit, ut difficulter eius poſitio adnotari potuerit. Horis autem 8. 37 ope ſtellæ 43 tauri, quæ tardius, quam cometa, 26 minutis ad teleſcopium appellebat, aſcenſio recta cometæ inventa eſt grad. 53. 8, declinatio borealis 7. 21½, longitudo ♉ grad. 22. 37, latitudo meridionalis grad. 11. 27.

Die 19 cælum nubilum fuit, at die 20 ſerenum: itaque hac nocte directo in cometam teleſcopio, & rite diſpoſito micrometro cometæ tranſitum per centrum filorum adnotavimus. Immoto teleſcopio ſtellæ a nemine adnotatæ appulſum ad obliqua, & ad horarium 31 minutis ſegnius obſervavimus. Hanc ſequenti nocte cum ſtella tauri a Baiero litera μ adnotata contulimus, ex qua aſcenſio recta cometæ horis 8. 42 diei 20 deducta eſt grad. 55. 14, declinatio grad. 7. 49, longitudo ♉ grad. 24. 47, & latitudo auſtralis grad. 11. 30.

Die 21 ex ſtella μ tauri aſcenſionem rectam cometæ horis 8. 54 invenimus grad. 56. 15½, declinationem borealem grad. 7. 55, longitudinem ♉ grad. 25. 49, latitudinem auſtralem grad. 11. 38.

Die 22 cometa prope duas ſtellas ignotæ poſitionis verſabatur, quarum alteram ferme atmoſphæra ſua operiebat. Horis 7. 53 cometam ab hac ſtella tribus tantum minutis circuli verſus occaſum diſtare æſtimavimus; cometam vero unico minuto ſtella auſtraliorem. Stellam cum μ tauri contulimus, atque hinc deduximus cometæ aſcenſionem grad. 57, 12, declinationem grad. 8. 6, longitudinem ♉ grad. 26. 48, latitudinem auſtralem grad. 11. 40.

Die 23. Adeo difficile erat cometam internoſcere, ut, niſi oculus in tenebris aliquantiſper verſatus omnem luminis ſenſum amiſiſſet, eum videre nequaquam poſſet, attamen horis 9. 12, ut licuit, ope ſtellæ μ tauri, & 44 eiuſdem conſtellationis ex Flamſtedio aſcenſionem invenimus grad. 58. 8, declinationem grad. 8. 27, longitudinem ♉ grad. 27. 47, latitudinem auſtralem grad. 11. 31. Hæc obſervatio dubia eſt.

Die 24 cælum nubilum fuit.

Die 25. Uſque adhuc cometam ad ſtellas retulimus ope micrometri, quod tenui lumine illuſtrabamus, ut fila

diſcernerentur; impoſterum id fieri non potuit, ſiquidem cometa penitus evaneſcebat ex quocumque lumine, quod micrometro affunderemus. Itaque ad ocularem æſtimationem confugimus tum diſtantiæ, tum aſpectus cum iis ſtellis, quæ intra teleſcopium eodem tempore apparebant, quarum poſitus, ſi ipſæ ab auctoribus omiſſæ fuiſſent, ex aliis ſtellis cognitis determinari potuiſſet. Horis 7. 50 cometa cum ſtellis μ, & 44 tauri, a qua parum diſtabat, & cum tertia quadam ignotæ poſitionis eodem tempore intra teleſcopium apparebat. Trapetii, quod cometa cum dictis tribus ſtellis comprehendebat, figura & laterum proportione oculorum indicio definitiva aſcenſionem eruimus grad. 60. 2, declinationem grad. 8. 34, longitudinem ♉ grad. 29. 42, latitudinem auſtralem gr. 11. 48.

Diebus 26, 27 martii cælum nubilum.

Die 28 locum cometæ inquiſivimus ex quatuor ſtellis, quæ intra teleſcopium ſimul aderant cum cometa, æſtimatione videlicet aliquorum laterum triangulorum ab ipſo cum ſtellis comprehenſorum. Inter has unica tantum erat notæ poſitionis, nempe ν tauri; alias ad hanc obſervatione retulimus, ſed difficulter, lumini enim ſuſtinendo non erant pares, quapropter huic obſervationi parum deferendum eſt. Horis 8. 23 aſcenſio recta cometæ inventa fuit grad. 62. 38, declinatio grad. 8. 59, longitudo ♊ grad. 2. 21½, latitudo grad. 11. 53.

Die 29 non abſimili ratione cometæ locum ope trium ſtellarum ignotæ poſitionis collegimus, tum has ad d tauri retulimus, quæ paullo poſt in teleſcopium incurrebat. Horis itaque 8. 23 cometam aſcenſionem rectam habere deprehendimus grad. 63. 40, declinationem grad. 9. 11, longitudinem ♊ grad. 3. 25, latitudinem auſtralem 11. 53.

Die 30 cometa ſimul cum ſtella d tauri in teleſcopio apparebat, & alia fixa in eadem recta linea interiacebat, quæ ad tertiam partem totius diſtantiæ reſpectu d verſabatur. Hæc ſimplex ſtellarum & cometæ configuratio, fixæ incognitæ loco prius adinvento, aſcenſionem cometæ exhibuit horis 8. 13 grad. 64. 27, declinationem grad. 9. 8 longitudinem ♊ grad. 4. 11, latitudinem auſtralem grad. 12. 4.

Die 31 duæ ſuperiores ſtellæ parvum triangulum cum cometa conſtituebant, cuius quidem æſtimatio a ratione laterum

terum ducta facilis fuit. Hinc poſitio cometæ deducta eſt; nempe aſcenſio recta horis 7. 30 grad. 65. 15, declinatio grad. 9. 18, longitudo ♊ grad. 5. 1, latitudo auſtralis 12. 3.

Die prima, & ſecunda aprilis cælum nubilum fuit.

Die 3 ſtellam d tauri per centrum micrometri traduximus, ac parallelum filum percurrere curavimus; deinceps ablato quocunque lumine per immotum teleſcopium tranſitum cometæ expectavimus, de quo certiores nos fecerant præteritæ obſervationes. Poſt aliquod tempus cometa, vel potius incertum luminis veſtigium prædictum parallelum ferme ſtrinxit. Temporis differentia inter appulſum ſtellæ, & cometæ ad centrum micrometri, quantum æſtimare licuit, fuit minutorum 9. 30, ex quo deduximus aſcenſionem rectam cometæ horis 8. 12 grad. 67. 42, declinationem borealem grad. 9. 35½. Poſt minuta 12 circiter cometæ poſitum cum duabus proximis ſtellis adnotavimus, eiuſque locum invenimus, facta ſcilicet comparatione duarum ſtellularum ad ſecundam ex duabus ſtellis π orionis. Nova hæc obſervatio aſcenſionem rectam exhibuit grad. 67. 51, declinationem grad. 9. 37½. Si de aſcenſione recta ſermo ſit, ea, quæ ex prima obſervatione colligitur, melius cum prioribus, ac poſterioribus aſcenſionibus congruit; contra vero declinatio, quæ ex poſtrema obſervatione colligitur, melius cum aliis præcedentium, ac ſubſequentium dierum declinationibus convenire videtur, quapropter ſtatuimus cometæ longitudinem ♊ grad. 7. 36, & latitudinem auſtralem grad. 12. 8.

Die 4 aprilis etiamſi luceret luna, & ſeptem tantum gradibus a cometa diſtaret, is nihilominus affulſit nobis, obſervatoque eius poſitu reſpectu duarum præcedentium ſtellarum, aſcenſionem rectam eruimus horis 8. 23 grad. 68. 27½, declinationem grad. 9. 46, longitudinem ♊ grad. 8. 17, latitudinem grad. 12. 5½.

Die 5 cælum ſudum erat, & tamen cometa nobis inquirentibus latuit. Luna ad ſextum diem fulgebat, & a loco cometæ præfinito 12 gradus circiter diſtabat.

Die 6 aprilis Franciſcus Vandellus, qui anteactis noctibus primus omnium, utpote peracutis inſtructus oculis, cometam invenerat, & pleraſque obſervationes huc uſque relatas

latas fecerat, neſcio quid luminis vidit, quod cometam eſſe æſtimavit. Luna micrometrum illuſtrabat. Itaque debite hoc compoſito indicavit horis 8. 9 differentiam aſcenſionis inter cometam, qui præcedebat, & ſecundam duarum ſtellarum π orionis maiorem eſſe intervallo, quo inter ſe diſtant duo micrometri fila horarios circulos repræſentantia, quæ diſtantia alias emenſa fuit minutorum 15. 34 circuli maximi; ſimiliter differentiam declinationis maiorem eſſe intervallo inter duo fila parallelos indicantia, quæ & ipſa ad minuta 15. 34 aſſurgit. Ex his cometæ aſcenſionem rectam eruimus grad. 69. 51, declinationem borealem 9. 58, longitudinem ♊ grad. 9. 42, latitudinem auſtralem grad. 12. 5½. Sequentibus noctibus fruſtra laboravimus ut cometam inveniremus.

Obſervationum ſeriem tum quoad aſcenſiones, tum quoad declinationes ſuperius deductas examinantes, habita ad tempus, quo peractæ ſunt, debita ratione, nonnullas irrepſiſſe irregularitates novimus, quæ obſervationem fortaſſe aliquam errore haud vacare facile evincunt, orto præſertim ex difficili æſtimatione tranſitus aut fixæ, aut cometæ per fila micrometri. Immutanda igitur fuit aliqua ex parte obſervationum noſtrarum ſeries, quæ quidem mutatio, ſi aſcenſiones reſpicias, in pleriſque nulla, in aliquibus exigua, maior autem fuit minutorum 6 addenda die 28 martii, & minutorum 4 ſubducenda die 29, quas mehercle obſervationes ſuſpectas eſſe, & errori obnoxias, alias indicavimus. At ubi declinationes inſpicias, maior aliqua fuit mutatio in iis adhibenda; maxima fuit minutorum 10, aut 11 ſubtrahenda die 23 martii, & minutorum 8 pariter ſubducenda die 29. Nos hic miſſas facimus aſcenſiones, & declinationes ſic correctas exhibituri longitudines, & latitudines inde deductas, quas veroſimiliores, quantum fas eſt in huiuſmodi obſervationibus, reputamus.

Temporis mora ſupra horizontem admodum brevis parallaxis obſervandæ locum ſuſtulit, atque inde eruendæ diſtantiæ a tellure. Quare ad methodum nos convertimus, quam in arithmetica univerſali Newtonus tradidit, ſupponendo videlicet toto tempore, quod intercedit inter obſervationes dierum 25 februarii, & 6 martii, cometæ motum rectilineum fuiſſe, & æquabilem. In hunc finem quatuor

ſele-

ſelegimus obſervationes, duas videlicet nuper enunciatas, reliquas vero duas diebus reſpondentes 28 februarii, & 3 martii. Tali innixus methodo diſtantiam cometæ a terra diei 25 februarii reſpondentem definivit Euſtachius Zanottus $\frac{m}{55}$ illarum partium, quarum media diſtantia terræ a ſole $\frac{m}{100}$ continet; angulum quoque ſubduxit ab apparenti cometæ via ad eclipticæ planum reducta comprehenſum cum recta tunc temporis in eodem eclipticæ plano ad cometam e terra viſum directa grad. 70. 38; ſumendo nempe hunc angulum reſpectu poſterioris rectæ ad ortum, & ad partes terræ reſpectu prioris. Idem omnino invenit Bolſius Marcheſius calculum ſeorſim aggreſſus. Poſitionem quoque nodorum, inclinationemque plani orbitæ ad eclipticam calculi prædicti veſtigiis inhærendo definivimus. Elementa hæc parum abludunt ab iis, quæ Halleius in cometarum tabula ſubduxit pro cometa anni milleſimi ſexcenteſimi ſeptuageſimi ſecundi. Quamquam cum nonnullæ immutandæ fuerint longitudines, eaque præſertim minuto integro, quæ die 3 martii peracta eſt, opus ſane eſſet calculum iterum aggredi correctis obſervationibus inſtituendum ad diſtantiam, & cetera elementa melius ſtabilienda.

Cometæ

Cometæ longitudines, ac latitudines ex obſervationibus correctis.

		H	'	G		'	G	'
					♈		M	
Februarii	25	7	30	20		46	7	35
	26	7	13	22		43	7	53
	28	7	33	26		29½	8	27
Martii	1	8	2	28		20	8	43
	2	7	35	0	♉	4	8	58½
	3	7	2	1		45	9	12½
	5	7	35	5		4	9	38
	6	7	9	6		37	9	48
	7	7	30	8		8	9	57
	18	8	37	22		37	11	26
	20	8	42	24		47	11	34
	21	8	54	25		49	11	37
	22	7	53	26		48	11	40
	23	9	12	27		46	11	43
	25	7	50	29		42	11	49
	28	8	23	2	♊	27	11	57½
	29	8	23	3		19	12	0
	30	8	13	4		11½	12	3
	31	7	30	5		1	12	4
Aprilis	3	8	12	7		33	12	6
	4	8	23	8		17	12	5½
	6	8	9	9		42	12	5½

EUSTA-

EUSTACHII ZANOTTI

De cometa anni MDCCXXXIX.

NOcte inſequente diem vigeſimam ſeptimam maii cælo ſereno cometa ſe prodiit, qui nitens inter conſtellationes urſæ maioris, & aurigæ in medio trianguli inſidebat, quod ſtellæ tres *α* geminorum, capella, & *o* urſæ maioris paribus fere intervallis conſtituunt. Nudo oculo conſpicientibus tanquam ſtella tertiæ magnitudinis apparebat, quamquam nebula, qua circum ſeptus erat, novum quidpiam in cælo exortum oſtendebat. Adhibito tubo optico pedum viginti trium cometæ forma clarius enituit, nam & nucleus diſtinguebatur eius magnitudinis, quæ magnitudinem iovis æmulabatur, & denſa nebula cometæ caput, ſeu nucleum involvens, quæ in partem ſoli averſam ſe ſe longius protendens caudam referebat duos gradus longam, quæ quo magis a nucleo protrahebatur, eo latius explicabatur, & ſenſim evaneſcebat.

Cum is eſſet cometæ poſitus, manifeſtum eſt attenta huius loci latitudine ipſum tunc inocciduum fuiſſe; at poſt aliquot dies, cum ad meridiem motu proprio inclinaretur, ſub horizontem occultari cœpit. Eius motus retrogradus fuit, & in fine paullo velocior: ſemita inter ſtellas fixas deſcripta aurigam, & taurum traiiciens eclipticam ſecat in gr. 14. 54 geminorum, ac deinceps orionem ingrediens ibi tandem deſinit. Itaque cometa diſparuit in coſtellatione orionis, cum cæli tractum quinquaginta circiter graduum abſolviſſet.

Semita, quam diximus, a circulo maximo valde aberrat; quod quamvis manifeſtum fiat ex ipſo ſemitæ ductu in globo artificiali, in quo cometæ loca iuxta aſcenſiones rectas, & declinationes obſervatas notata fuerint, maluimus tamen id ex ipſis obſervationum numeris trigonometrica ratione inquirere, quo res luculentius definiretur. Itaque poſi-

poſitionem eius circuli maximi inveſtigavimus, qui per duo ſemitæ puncta tranſiret, eaque puncta in hoc negotio adhibita fuerunt, quæ duabus obſervationibus reſponderent dierum ſcilicet 28 maii, & 9 iunii. Hic circulus eclipticam ſecat in gr. 11. 18 geminorum angulum faciens gr. 48. 41 ad occidentem. Equidem ſi cometa motu ſuo per hunc circulum maximum excurriſſet, latitudo quælibet obſervata ad circuli peripheriam uſque pertingeret, quod ſi ab eo declinaverit latitudo obſervata, vel ultra circulum porrigetur, vel infra continebitur. Die 17 iunii latitudo cometæ fuit gr. 20. 51, & latitudo ad circulum pertingens, & cometæ longitudini reſpondens calculo conficitur gr. 18. 0, quapropter hæc minor eſt illa gr. 2. 51. Eumdem calculum inivimus pro cometæ loco diei 25 iunii, & invenimus latitudinem intra circulum contentam a latitudine obſervata defficere gr. 2. 45. Aliud huiuſmodi aberrationis indicium habemus a nodo cometæ, qui eclipticam traiecit in gr. 14. 54 geminorum, & circulus maximus, uti diximus, eclipticam ſecat in gr. 11. 18. Quæ omnia eo tantum ſpectant, ut demonſtretur quænam fuerit cometæ via in ſphæra univerſi, & quantum a circulo maximo deflexerit. Quamquam ſi quid coniicere licet, argumentum ab his deſumere poſſumus, quo probemus cometam non moveri in plano circa tellurem, ut planetæ faciunt circa ſolem, ſed aliud centrum motus aſſignandum eſſe, niſi forte volumus brevi eo tempore nodorum lineam in conſequentia proceſſiſſe gradus plus quam viginti.

Nunc de obſervandi modo nonnulla diſſeremus. Teleſcopio utebamur octo pedes longo haud amplius, cui micrometrum aptatum erat ex quatuor filis ita conſtructum, ut duo quælibet proxima, & ſe invicem interſecantia, angulum ſemirectum in centro micrometri conſtituerent. Ope huius micrometri cometam ad ſtellam referebamus, ſi qua ſtella cognita prope cometæ parallelum verſabatur. Si enim micrometrum ſic ſtabiliatur, ut unum ex filis parallelum exiſtat ſemitæ, quam ſtella motu diurno deſcribit, notatis temporibus, quibus cometa, & ſtella fixa reliqua micrometri fila prætergrediuntur, nihil facilius eſt, & aſtronomis uſitatius, quam differentiam aſcenſionis rectæ, & declinationis inter duo ſidera ex obſervationum numeris colligere. Verum

rum accidere aliquando poteſt, ut peracta obſervatione non eum deprehendamus fuiſſe micrometri poſitum, quem diximus, quod quidem a duobus temporum intervallis inter bina fila dignoſcetur, quæ intervalla ſi fuerint inæqualia, indicio erit nullum ex quatuor filis ſtellarum ſemitæ parallelum extitiſſe. Id quotieſcumque contigerit, vel obſervatio iterum peragenda erit, ſi fieri poterit, vel ratio excogitanda, qua obſervationum numeri emendentur. Quod ſi aliqua emendandi ratio ſuppetat, ea non mediocrem aſtronomis utilitatem afferre poteſt, etenim differentiam aſcenſionis rectæ, & declinationis eruere licebit, quicumque fuerit micrometri poſitus, neque opus erit ad obſervationem faciendam accedentes in ſtatuendo micrometro quidquam immorari, dummodo in conciliandis obſervationum numeris idonea correctio adhibeatur; & quamvis calculus paullo operoſior futurus ſit, iuvabit tamen, ſi obſervatio ipſa expeditior reddatur: tempus enim obſervationibus aliquando deficere poteſt, numquam tamen deficiet ſupputationibus.

Sit micrometrum BDI, & ſemita apparens ſtellæ BD, quæ tria micrometri fila traiiciens reliquo non ſit parallela. (*Tab. obſerv. aſtron. fig.* 2) Notata fuerint momenta temporis, quibus ſtella unumquodlibet filum prætergreſſa eſt in punctis B, A, D, ex quo data erunt intervalla BA, AD. Intelligatur a centro micrometri ducta recta IO perpendicularis ad ſemitam ſtellæ BD, quæ propterea vicem geret circuli horarii tranſeuntis per centrum micrometri. Denominetur primum intervallum $AB = m$, & ſecundum intervallum $AD = n$, & quæratur AO, & IO. Confecto calculo reperitur $AO = \frac{mn : \overline{m - n}}{mm + nn}$, & $IO = \frac{mn : \overline{m + n}}{mm + nn}$. Inventa AO addatur tempori quo ſtella fuit in A, vel ab eo ſubducatur, prout intervallum primum AB maius, vel minus fuerit altero AD, & conficietur tranſitus ſtellæ per horarium; & præterea a valore quantitatis IO dabitur diſtantia ſemitæ a centro micrometri. Quæ duo ſi eodem pacto determinentur in pluribus ſtellis, prodibit earum differentia aſcenſionis rectæ, & declinationis. Hoc micrometro pleraſque obſervationes exegimus, & quotieſcumque intervalla inter bina fila inæqualia reperta ſunt, methodo iam explicata

 aſcen-

aſcenſiones rectas, & declinationes cometæ ex obſervationum numeris deduximus.

Aliud micrometrum excogitavimus, quo uteremur cum cometa paullo debilior factus eſſet, neque amplius lucernæ lumen pati poſſet, quod ad colluſtranda fila in teleſcopium immittebatur. Conſtructionem eius paucis explicabimus; hæc enim in circello quodam ſolido, atque intus aperto conſiſtit. Duo fila adiunximus, quæ cum loco diametrorum poſita eſſent, ab eorum interſectione circuli centrum deſignabatur: quod commode nobis obtigit propterea, ut circuli diametrum definiremus; ſtellam enim, quæ prope æquatorem verſabatur in teleſcopio, ſic moveri curavimus, ut per centrum micrometri tranſiret, atque ex eius mora circuli diametrum conſtituimus minutorum 31. 50. Ad obſervationem faciendam quod attinet, ea ſic conficiebatur. Traiiciente ſtella per aperturam circuli duo momenta temporis notabantur, quibus ingrediendo & egrediendo circuli peripheriam adibat. Quoniam vero circulus horarius per centrum micrometri ductus chordas omnes a ſtellis deſcriptas bifariam dividit, ab obſervationum numeris tranſitus per horarium facile colligebatur; cumque longitudo chordæ ab ipſa obſervatione innoteſceret, & data eſſet circuli diameter, chordæ diſtantiam a centro brevi calculo aſſequebamur.

Hanc obſervandi rationem ſequuti ſumus a die 4 auguſti uſque ad ultimam diem, quo tempore cometa lumine adeo diminutus erat, ut nubecula potius videretur quam ſtella, & accedente quovis externo lumine diſpareret. His diebus ſi quid erraverimus in determinandis cometæ locis, id non modo obſervandi difficultati tribuendum exiſtimamus, verum etiam aliquam in micrometrum culpam transferendam concedimus; etenim ſi chordæ vel a ſtella, vel a cometa deſcriptæ parum a centro abſint, perexiguus error obſervationis diſtantiæ ſideris a centro micrometri non parum detrahet. Id autem quantum ſit, ad calculum redigere non prætermiſimus, & invenimus neglectis duobus ſecundis ſcrupulis temporariis minutum primum cum dimidio in dicta diſtantia peccari poſſe. Sed hoc micrometri vitium ferendum erat, quod tunc nulla aptior obſervandi ratio ſuppetebat.

In

In obſervationibus faciendis adiutores habui præſtantiſſimos iuvenes Petronium Matteuccium, & Ioſephum Roverſium, quibus primum contigit cometam videre, quem deinceps aliis indicaverunt. His ſe ſocium adiunxit Franciſcus Vandellus in hoc Inſtituto architecturæ militaris profeſſor, & in mathematicis verſatiſſimus; ac demum Ioſephus Garatonus, qui & medicinam cum laude profitetur, & in cælo, & ſideribus totus eſt. Hi non modo ſe ſocios præbuerunt in obſervationibus, ſed etiam ſupputationum laborem ultro ſuſceperunt. Non prætermittam nos in eruendis cometæ locis aſcenſiones rectas, & declinationes ſtellarum a catalogo britannico Flamſtedii deprompſiſſe, & eclipticæ obliquitatem poſuiſſe gr. 23. 28. 25, quantam ſcilicet ex duobus ſolſtitiis proxime elapſis collegimus. Quæ vero fuerint ſtellæ, quæ quotidianis obſervationibus inſervierunt, ſigillatim trademus.

Diarium obſervationum.

Die 27 maii nulla exiſtente ſtella notæ poſitionis prope cometæ parallelum, ad ignotas quaſdam ſtellas confugimus, quarum ea, quæ inſignior erat, in aſcenſione recta diſtabat ad ortum gr. 10. 28. 50, & ad ſeptentrionem declinabat gr. 0. 23. 14. Huius ſtellæ locum deinceps definivimus menſe ianuarii ſubſequentis anni, cum noctu meridianum circulum pertranſiret, & ſtatuimus eius aſcenſionem rectam pro die 27 maii 1739 gr. 111. 7. 48, & declinationem ſeptentrionalem gr. 51. 0. 51. Numeros, qui ad cometam pertinent, in hoc diario non reſcribimus, quod eos in tabula ſuo quoſque ordine diſpoſitos exhibebimus.

Die 28 maii etſi cometa aliquantulum demigraviſſet, nondum tamen parallelum circulum cognitæ alicuius ſtellæ aſſequutus erat, ideoque oportuit ſtellam adhibere, cuius locum deinceps definiremus comparatione facta cum ι urſæ maioris; & quoniam hæ duæ ſtellæ nimio plus in declinatione diſtabant, quam ut per micrometrum conferri poſſent, ad ſtellam quamdam intermediam confugimus, quæ duas illas invicem colligaret. Aſcenſio recta ſtellæ prodiit gr.

grad. 104. 44. 9, & declinatio ſeptentrionalis gr. 49. 53. 31.

Die 29 maii cometam cum ſtella ignotæ poſitionis comparavimus, ac deinceps per ι urſæ maioris deprehendimus ſtellæ aſcenſionem rectam gr. 106. 46. 59, & declinationem ſeptentrionalem gr. 49. 41. 36, hor. 14. 11 traiicientem cometam per inferiorem meridiani partem murali ſemicirculo obſervavimus, eodemque inſtrumento tranſitum α perſei notavimus, ut inde colligeremus cometæ locum. Fuit autem aſcenſio recta cometæ gr. 99. 0. 10, & declinatio ſeptentrionalis gr. 50. 6. 29.

Die 30 maii cometa adhuc ſeptentrionalior erat ι urſæ maioris; cum tamen uterque in teleſcopium ingrederetur, ea tantum habita obſervatione cometæ locum decernere potuimus. Hor. 14. 4 ope ſemicirculi cometæ locum iterum definivimus facta comparatione cum α perſei, cuius tranſitum ex numeris obſervationum præcedentis, & ſubſequentis diei tuto definire licuit. Aſcenſio recta prodiit gr. 98. 14. 37, & declinatio ſeptentrionalis gr. 49. 49. 35.

Die 31 maii obſervationi inſervivit eadem ι urſæ maioris. Hor. 13. 57 per ſemicirculi planum tranſivit cometa, qui propter nebulam vix diſcernebatur. Notavimus quoque tranſitum α perſei, & ex harum obſervationum numeris ſupputavimus aſcenſionem rectam cometæ gr. 97. 31. 50, & declinationem ſeptentrionalem gr. 49. 31. 40.

Die 2 iunii obſervationem inſtituimus cum eadem ſtella ι, atque comperimus cometam, & ſtellam in eodem parallelo verſari, & in aſcenſione recta tantummodo differre. Eadem nocte cometam vidimus per meridianum tranſeuntem, dum cælum ex ea parte boreali quodam lumine coruſcabat. Obſervatio dubia eſt, cometa enim ea luce circumfuſus vix internoſcebatur. Id porro contigit hor. 13. 43, cum eſſet eius aſcenſio recta 96. 9. 14, & declinatio ſeptentrionalis 49. 1. 8. Nulla impoſterum haberi potuit obſervatio meridiana; nam cum cometa a polo in dies magis elongaretur meridianum petens, horizonti propius accedebat, atque adeo in denſiores vapores immerſus deliteſcere cœpit. Meridianas haſce obſervationes pro inveſtiganda parallaxi aggreſſi ſumus, in quibus propterea ſatis eſt, ſi aſcenſio recta probe conſtituta fuerit, ſed quia propter ob-

ſer-

ſervandi difficultatem in declinationibus præſertim erroris ſuſpicio eſt, ideo in eam, quam trademus ſeriem, nequaquam diſtribuendas eſſe exiſtimavimus.

Die 3 iunii obſervatio cum eadem ſtella ι peracta eſt.

Die 4 iunii cum eadem ſtella.

Die 5 iunii ad ſtellam κ urſæ maioris nos convertimus, cum ſtella ι eiuſdem conſtellationis obſervationi non amplius inſervire poſſet. Quamquam aſcenſionis rectæ, & declinationis numeros ſtellæ κ a catalogo britannico non deprompſimus, ſed facta comparatione cum priore ſtella ope micrometri locum eius definivimus; ſic enim viſum eſt nobis cometæ loca in ordinem diſtributa melius convenire.

Die 7 iunii cometam retulimus ad eamdem ſtellam κ.

Die 8 iunii cum ſtella κ ad cometam non amplius referri poſſet, aliam minorem ſtellam adhibuimus, cuius locum didicimus ex ipſa κ. Itaque poſita aſcenſione recta huius ſtellæ gr. 104. 7. 46, & declinatione ſeptentrionali gr. 47. 40. 32 cometæ locum determinavimus.

Die 14 iunii capella cometam præcedens eius locum indicavit.

Die 15 iunii cometam contulimus cum β aurigæ.

Die 16 iunii cum eadem β.

Die 17 iunii cum eadem β.

Die 25 iunii cometa ſolem prætergreſſus ſummo mane in hemiſpherio orientali inquirendus erat, & quia ſuſpicabamur fore, ut a matutino crepuſculo obrueretur, inſignem ſtellam elegimus, quam ad cometam referremus, quæque in eodem parallelo ipſum præcederet. Directo itaque teleſcopio ad γ andromedæ, quam dicunt *Alamak*, & in ea poſitione per immobile fulcrum retento poſt debitum tempus cometa ſe ſe nobis obtulit obſervandum.

Die 28 iunii ad τ, & υ aurigæ.

Die 2 iulii obſervationem exegimus cum duabus ſtellis υ, & θ aurigæ.

Die 3 iulii peracta obſervatione cum duabus ſtellis, quas nocte ſuperiore adhibuimus, cometæ caudam diligenter metiti ſumus, atque eius longitudinem conſtituimus unius gradus; directio autem non videbatur ſoli oppoſita, ſed aliquantulum declinare ad ſeptentrionem.

Die 6 iulii quamvis ſtella ξ perſei cometam longe præ-

præcederet, eam tamen elegimus, quod nulla inſignis ſtella habebatur in conſtellatione aurigæ, quæ ad cometam referri poſſet.

Die 7 iulii eadem ξ perſei obſervationi inſervivit.

Die 9 iulii cometa parallelum φ aurigæ aſſequutus, neque admodum a parallelo ξ perſei diſſitus ad utramque ſtellam referri potuit. Loca, quæ ex utraque obſervatione deduximus, mirifice inter ſe convenire deprehendimus.

Die 12 iulii cometa parum aberat a parallelo ι aurigæ.

Die 14 iulii ad ſtellam $\varkappa$ eiuſdem conſtellationis.

Die 15 iulii cælum caliginoſum erat, & cometa vix diſcernebatur, attamen referre potuimus ad ſtellam (26) aurigæ ex catalogo Flamſtedii.

Die 16 iulii ad eamdem ſtellam.

Die 20 iulii poſtquam cometam cum γ aurigæ de more comparaverimus novum micrometrum experiri voluimus, cometam referentes ad eamdem ſtellam; neque diſſidia inter obſervationum numeros invenimus, quæ minutum excederent.

Die 21 iulii cum eadem γ aurigæ.

Die 22 iulii cum ſtella (127) tauri.

Die 26 iulii cometæ locum definivimus facta comparatione cum ſtella (123) tauri. Cælum nebuloſum erat.

Die 27 iulii cum ea ſtella, quæ inter pleiades *taygeta* nuncupatur.

Die 2 auguſti cometa iovem ſequebatur, & parum ab eius parallelo aberat, ac ne quid obſervationi deeſſet cometam retulimus ad ſtellam fixam nempe ad ω tauri.

Die 4 auguſti cum cometa vix internoſceretur novum micrometrum adhibere oportuit, quo ipſum retulimus ad ε tauri.

Die 10 auguſti ad o orionis *in exuviis ſecundam*.

Die 17 auguſti cometam teleſcopio inquirentes, quem nudo oculo videre non amplius licebat, tandem comperimus prope ſtellam π orionis *in exuviis ſextam*, atque eius locum ex hac proxima ſtella determinavimus. Poſt hanc diem nulla obſervatio habita eſt, neque, cum luna ad oppoſitionem accederet, & maiorem in dies lucem effunderet, ulla ſpes erat, ut cometam adeo lumine diminutum

per-

perciperemus; & revera ſequentibus diebus id nunquam nobis obtigit, quamvis omnem diligentiam in eo perquirendo adhibuerimus.

De Theoria Cometæ.

PEractis obſervationibus in id primum animum intendimus, ut videremus, an ulla exſiſteret parallaxis, quæ nos moneret de cometæ diſtantia a tellure, cuius diſtantiæ cognitio plurimum faceret pro ſtabilienda aliqua huius planetæ theoria. Obſervationes, quæ detegendæ parallaxi inſervirent, iam in promptu erant, iis enim diebus, quibus cometa circulum perpetuæ apparitionis deſcribebat, eius aſcenſionem rectam ſemel, atque iterum eadem nocte determinavimus, videlicet cum ipſe adhuc a meridiano diſtabat 90 gradus, & cum in meridiano verſabatur. Harum obſervationum altera in hemiſphærio occidentali habita eſt, ubi cometam retulimus ope micrometri ad ι urſæ maioris, alteram vero obſervationem exegimus in meridiano interea, dum cometa per planum ſemicirculi muralis pertranſibat. Quamquam cometæ locum non deduximus ex eius tranſitu per meridianum, ſed ex comparatione cum ſtella α perſei, cuius tranſitus per eumdem ſemicirculum obſervatus fuerat, quæque parum in declinatione differebat. Hac ſcilicet ratione erroribus occurrere voluimus, qui forte in obſervationum numeros ex inſtrumenti vitio illapſi fuiſſent, cuius inſtrumenti limbus neque in omnibus ſuis punctis cum plano meridiani perfecte congruebat, neque aberrationis quantitas altitudinibus captis reſpondens explorata erat. Præterea, cum ex duabus prædictis obſervationibus deducendus eſſet cometæ motus, oportebat ſcire, quantum duæ ſtellæ ι urſæ maioris, & α perſei in aſcenſione recta differrent, quod quamvis ex catalogis fixarum depromi potuiſſet, attamen cum in iis diſſidia ſæpius reperiantur, propriis obſervationibus deffinire conſtituimus, idque commode per nos fieri potuit, cum utraque ſtella in eodem fere parallelo verſetur. Huiuſmodi cautiones in re, quæ maximam ſubtilitatem requirit, adhibendæ erant, eaſdemque hic recenſere voluimus, ut quiſque intelligat, quo fundamento de parallaxi iudicium proferamus.

Si qua parallaxis extitiſſet, quæ percipi potuiſſet, ea profecto ex obſervationibus dierum 29, 30, 31 maii, & 2 iunii prodiiſſet, quibus diebus cometæ locum bis definivimus, & in hemiſphærio occidentali prope ſemicirculum horæ ſextæ, ubi parallaxis horaria maxima eſt, & in meridiano, ubi eadem parallaxis evaneſcit. Quare cum cometa retrogradus fuerit, motus horarius, qui apparet inter duas huiuſmodi obſervationes, propter parallaxim minor fuiſſet eo, qui elicitur ex motu diurno. Verum ſubductis diligentiſſime calculis illud aſcenſionis rectæ decrementum inter obſervationes deprehendimus, quod motui diurno reſpondebat, ſi tamen diſſidia quædam exigua excipiantur, quæ ex obſervationum defectu facile oriuntur. Immo ſi tres priores obſervationes attendimus, inventis diſſidiis nihil quidquam deferendum eſſe ſtatuemus; hæc enim parallaxi refragantur, utpote quæ aſcenſionis rectæ decrementum maius efficiant, quam quod ex motu diurno colligitur: & quamvis obſervatio diei 2 iunii parallaxi favere videatur, huic tamen aſſentiri minime debemus tot aliis obſtantibus obſervationibus.

Quamquam & aliæ ſunt præter eas, quas memoravimus, obſervationes, quæ nullum de parallaxi indicium afferunt; nam quibus noctibus cometa prope inſignem aliquam ſtellam verſabatur, ſemel atque iterum eius locum definivimus; ſed cum huiuſmodi obſervationes non ſatis longo temporis intervallo inter ſe diſtent, detegendæ parallaxi minus idoneæ habitæ ſunt, eaſque propterea prætermittendas eſſe cenſuimus. Quod ſi ex his etiam argumentum deſumere vellemus, concludendum eſſet nullam, quæ ſane percipi potuerit, parallaxim extitiſſe.

Quoniam parallaxim nullam invenimus, quæ diſtantiam cometæ patefaceret, ad methodos ab aſtronomis traditas nos convertimus, in quibus, etſi aliquid ſupponere oporteat, id tamen concedendum videbatur, cum nulla melior ratio ſuppeteret, qua diſtantiæ calculus perficeretur. Suppoſuimus, inquam, brevem orbitæ arcum a recta linea nihil ad ſenſum differre, atque eius partes a cometa ſic abſolvi, ut temporum proportionem ſequerentur. Itaque cum ipſa calculi ratio poſtulet, ut quatuor cometæ loca adhibeantur, ea ex obſervationibus excerpſimus, quæ novem dierum inter-

ter-

tervallum complectebantur, quibus poſitis iuxta celeberimi Newtoni præcepta in arithmetica univerſali tradita calculum aggreſſi ſumus. Verum in eam contradictionem incidimus, per quam diſtantia calculo inventa penitus corruebat; linea enim, quæ dictam diſtantiam repræſentabat, in hemiſphærium ſoli oppoſitum, ubi cometa non erat, porrigebatur. Quod cum non ex ullo ſupputationis errore prodiiſſe cognoverimus, a principiis aſſumptis repetendum eſſe exiſtimavimus. Quis ſcit, an orbitæ arcum, quem cometa ſpatio illo novem dierum prætergreſſus erat, liceat ſupponere rectilineum? Quod ſi a linea recta valde deflexerit, nil mirum ſi calculus in illud abſurdum nos adduxerit. His animadverſis novam ſupputationem aggredi conſtituimus, & quo minus ſuppoſitio traiectoriæ rectilineæ nos abluderet, alias quatuor obſervationes elegimus, quæ minori temporis intervallo ſeiunctæ erant, eas nempe dierum 28, 29, 30, 31 maii; & quoniam calculus ab initio exordiendus erat, novitatis ſtudio permoti aliam ſupputandi rationem inivimus, atque adeo caſſinianam methodum ſequentes, quæ in actis pariſienſibus anni 1727 conſcripta legitur, elicuimus tandem diſtantiam cometæ a tellure die 28 maii *669* earum partium, qualium mediocris diſtantia ſolis a tellure continet 100; atque inde prodiit diſtantia cometæ a ſole earumdem partium *596*.

Verum ipſa calculi ratio nos docuit diſtantiam tali pacto inventam non ita certo conſtitutam fuiſſe, ut in dubium revocari minime poſſet, idque præſertim propter nimiam obſervationum viciniam. Nam cum cometæ loca, quæ adhibita fuerunt, valde proxima ſint, quatuor lineæ poſitione datæ, quæ in plano eclipticæ longitudinem cometæ referunt, parvulos angulos comprehendunt, & in ea angulorum exiguitate quivis error, ex iis quidem, qui inter obſervandum evitari nequeunt, magnum diſcrimen in diſtantiam adducere poteſt, per quod cometæ ſemita vel telluri propius admoveatur, vel ab ea longius removeatur; quod quidem facile concedetur ab iis, qui trigonometricis ſupputationibus dant operam. Cum hæc animadverteremus, quamvis ægre ferremus poſt tot experimenta nihil adhuc certum de cometa conſtitutum eſſe, attamen præteritus labor ad nova tentamina magis, magiſque excitabat; cum-

que nihil illuſtrius ſit, nihilque magis ab aſtronomis comprobatum, quam theoria Newtoni, prætermiſſis aliis, ad hanc ſtudium omne noſtrum convertimus. Newtoniana theoria, ut cuique notum eſt, longiſſimis calculis implicita eſt, ſed fecit Petronii Matteuccii diligentia, & in mathematicis rebus ſolertia, ut ea nobis minus operoſa videretur, is enim, ut eſt etiam ad calculos paratiſſimus, maximam ſibi laboris partem ſuſcepit. Itaque nos ex tribus delectis obſervationibus, quæ ab invicem longo temporis intervallo ſeiunctæ erant, ſingula theoriæ elementa deduximus, & parabolam determinavimus, quam cometa circa ſolem perluſtraviſſe videretur. Totius calculi rationem non expono, quæ paucis explicari nequit; præterquamquod me aſtronomis ſatisfacturum puto, ſi elementa tantum hic adiungam, quibus theoria continetur: nam ſi quis proprias obſervationes cum hac theoria conferre voluerit, ex ſequentibus numeris longitudines, & latitudines cometæ pro quovis dato tempore ſupputabit. Non eſt prætermittendum hunc cometam, cuius motus apparens retrogradus fuit, etiam in orbita motu retrogrado proceſſiſſe.

Longitudo perihelii	♋	gr. 12. 34
Longitudo nodi aſcendentis	♎	gr. 27. 18
Inclinatio orbitæ		gr. 55. 53
Diſtantia perihelia, poſita mediocri diſtantia ſolis a tellure partium 10. 000		6716
Tempus, quo cometa fuit in perihelio die 17 iunii		hor. 11. 43.

Ex his longitudines, ac latitudines obſervationum temporibus reſpondentes ſupputavimus, in quibus tantam cum obſervatis cometæ locis conſenſionem deprehendimus, quanta

ta expectari poteſt in rebus huiuſmodi. Sed quid plura? tabulas hic ſub oculos ponam, quarum altera obſervationes ipſas complectetur, altera vero longitudinum, ac latitudinum numeros ex elementis iam conſtitutis exhibebit, quibus manifeſtum fiet, quam præclare newtonianis legibus cometarum motus obſequantur.

Cometæ loca ex obſervationibus.

1739	Temp. ap.		Aſcen. rectæ			Declina.			Longitu.			Latitu.		
	H	'	G	'	"	G	'	"	G	'	"	G	'	"
Maii 27	10	50	100	38	58	S 50	37	37	♋ 7	35	25	S 27	26	2
28	9	28	99	55	52	50	22	36	7	6	2	27	8	51
29	9	50	99	10	30	50	7	24	6	34	53	26	51	34
30	9	46	98	24	53	49	50	32	6	3	18	26	32	46
31	9	9	97	41	23	49	36	25	5	33	0	26	16	29
Iunii 2	9	16	96	16	2	49	2	44	4	33	12	25	40	14
3	9	40	95	34	55	48	46	8	4	4	8	25	22	18
4	8	58	94	55	48	48	30	21	3	36	23	25	5	38
5	8	56	94	16	23	48	11	28	3	8	6	24	45	49
7	8	58	92	59	56	47	37	51	2	12	54	24	10	30
8	10	17	92	21	28	47	18	34	1	44	52	23	50	58
14	9	37	88	49	43	45	21	58	♊ 29	6	47	21	53	43
15	9	37	88	17	39	45	1	3	28	42	13	21	33	0
16	9	9	87	45	27	44	39	47	28	17	24	21	12	37
17	8	57	87	14	21	44	18	15	27	53	11	20	51	0
25	14	45	83	22	38	40	54	33	24	45	17	17	33	26
28	14	2	82	8	38	39	35	39	23	42	0	16	17	11
Iulii 2	14	46	80	40	42	37	44	1	22	23	45	14	30	22
3	13	57	80	20	9	37	16	59	22	5	5	14	4	30
4	14	0	79	59	43	36	47	12	21	46	12	13	35	59

Cometæ loca ex theoria Newtoniana.													
1739	*Logarit. diſt. Com. a Sole.*	*Longitu.*			*Latitu.*			*Diffe. Longi.*			*Diffe. Lati.*		
		G	′	″	G	′	″		′	″		′	″
Maii 27	390285	♋ 7	37	3	S 27	26	4	+	1	38	+	0	2
28	389724	7	6	0	27	9	21	—	0	2	+	0	30
29	389143	6	34	28	26	51	34	—	0	25		0	0
30	388579	6	4	0	26	34	20	+	0	42	+	1	34
31	388047	5	34	27	26	16	56	+	1	27	+	0	27
Iunii 2	386993	4	35	5	25	41	25	+	1	53	+	1	11
3	386490	4	5	42	25	23	25	+	1	34	+	1	7
4	386028	3	38	1	25	6	15	+	1	38	+	0	37
5	385580	3	10	22	24	48	5	+	2	16	+	2	16
7	384754	2	14	19	24	11	11	+	1	25	+	0	41
8	384363	1	45	5	23	51	10	+	0	13	+	0	12
14	382911	♊ 29	8	24	21	53	18	+	1	37	—	0	25
15	382802	28	42	50	21	32	2	+	0	37	—	0	58
16	382737	28	18	27	21	10	44	+	1	3	—	1	53
17	382711	27	53	59	20	48	53	+	0	48	—	2	7
25	384055	24	43	53	17	34	43	—	1	24	+	1	17
28	385144	23	41	51	16	17	53	—	0	9	+	0	42
Iulii 2	387005	22	22	37	14	30	2	—	1	8	—	0	20
3	387506	22	4	17	14	3	14	—	0	48	—	1	16
4	388041	21	46	0	13	34	53	—	0	12	—	1	6

Come-

Cometæ loca ex obſervationibus.

1739	Temp. ap. H	′	Aſcen. recta G	′	″	Declina. G	′	″	Longitu. G	′	″	Latitu. G	′	″
Iulii 6	15	11	79	22	36	S 35	45	49	♊ 21	10	56	S 12	36	55
7	15	11	79	2	18	35	16	17	20	51	46	12	8	43
9	15	22	78	26	42	34	13	30	20	16	55	11	8	30
12	15	1	77	40	3	32	40	12	19	29	32	9	38	45
14	14	26	77	9	3	31	35	38	18	57	9	8	36	14
15	14	19	76	55	0	31	2	27	18	42	56	8	4	45
16	14	52	76	39	39	30	28	51	18	25	48	7	33	57
20	15	14	75	39	1	28	9	45	17	19	26	5	17	47
21	15	11	75	24	11	27	34	33	17	2	20	4	45	28
22	14	39	75	10	27	26	57	45	16	46	53	4	10	4
26	14	26	74	17	7	24	28	6	15	43	17	1	46	22
27	14	39	74	3	46	23	47	28	15	26	45	1	7	13
Aug. 2	13	36	72	31	56	19	40	32	13	33	42	M 2	48	19
4	13	43	72	0	55	18	11	24	12	53	41	4	13	15
10	13	21	70	14	55	13	15	48	10	33	14	8	53	7
17	14	54	67	41	0	6	44	22	7	1	26	14	58	10

Come-

Cometæ loca ex theoria Newtoniana.

1739	*Logarit. diſt. Com. a Sole.*	*Longitu.* G	′	″	*Latitu.* G	′	″	*Diffe. Longi.* ′	″	*Diffe. Lati.* ′	″
Iulii 6	389178	♊ 21	9	21	S 12	36	34	— 1	35	— 0	21
7	389754	20	51	51	12	7	42	+ 0	5	— 1	1
9	390939	20	17	59	11	8	22	+ 1	4	— 0	8
12	392739	19	30	1	9	38	37	+ 0	29	— 0	8
14	393977	18	56	46	8	36	3	— 0	23	— 0	11
15	394596	18	40	45	8	4	24	— 2	11	— 0	21
16	395231	18	24	44	7	31	31	— 1	4	— 2	26
20	397722	17	20	49	5	17	21	+ 1	23	— 0	26
21	398336	17	4	57	4	43	51	+ 2	37	— 1	37
22	398934	16	49	6	4	9	48	+ 2	13	— 0	16
26	401343	15	42	57	1	45	37	— 0	20	— 0	45
27	401937	15	25	24	1	7	58	— 1	21	+ 0	45
Aug. 2	405357	13	34	58	M 2	49	2	+ 1	16	+ 0	43
4	406469	12	54	27	4	14	31	+ 0	46	+ 1	16
10	409642	10	34	26	8	49	39	+ 1	12	— 3	28
17	413133	7	2	50	14	57	28	+ 1	24	— 0	32

Obſervatio eclipſis ſolis habita in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 22 maii MDCCXXIV.

Ex obſervatione Euſtachii Manfredii, Ioannis Baptiſtæ Bandieri, & Dominici Weber, ut eſt ab ipſis deſcripta.

INgruente eclipſis tempore, nubes diſſipari cœperunt, quibus antea cælum obductum erat, quare nos teleſcopia, quæ in promptu erant, in ſolem direximus, & paulo poſt lunæ marginem in diſcum ſolis ingreſſum teleſcopio pedum 11 notavimus h. 6. 35′. 55″ tem. ver. p. m. Luminarium contactus in eo quadrante occurrit, qui a puncto infimo diſci ſolis, & ab extremo ſeptentrionali puncto diametri horizontalis comprehenditur. Prope marginem, in quo luna apparere cœpit, viſa fuerat facula, ubi præcedentibus diebus macula inſederat, ſed ea poſt incœptam eclipſim ob nebulam, & aeris denſitatem diſtingui amplius non potuit.

Obſervato eclipſis initio ſequentes phaſes definivimus teleſcopio pedum octo, cui tabella adiuncta erat concentricis filis diſtincta, & in duodecim digitos diſpertita. Tabellæ diſtantia a vitro oculari æquabat uncias 16¾, & diameter ſpeciei ſolaris uncias 3½.

H	′	″	T. v. p. m.
6	40	10	Deficiebat plus quam digitus.
6	44	0	Duo digiti } determinationes aliquantulum
6	48	50	Tres digiti } dubiæ.
6	53	16	Digiti quatuor.
6	57	29	Digiti quinque.
7	1	59	Digiti ſex)
7	5	24	Digiti ſeptem) inter nubes.
7	9	39	Digiti octo)

In præcedentibus phaſibus cum ſol manifeſto ellypticus propter refractiones appareret; imago eius in tabellam proiecta cum circulo exteriori ad ſolis diametrum dimenſo congruere nequaquam poterat; quare diligenter curabamus in determinandis digitis, ut diameter orizontalis ſpeciei ſolaris cum diametro circuli exterioris conveniret.

Dum eclipſis erat octo digitorum ſol inter nubes abſconditus eſt, & nulla impoſterum haberi potuit digitorum determinatio.

7 26 8 Sol iterum apparet, ſed ita nubibus involutus, ut nullo adhibito vitro fuligine tincto in eum commode inſpiceremus. Eclipſis longe aucta erat, eamque oculari æſtimatione definivimus excedere digitos $11\frac{1}{2}$.

7 28 48 Maxima obſcuratio iam prætergreſſa erat, & revera illuminationis cornua, & longiora fiebant, & latiora; eodemque tempore pars inferior ſolis detegebatur, quæ adhuc latuerat; locus enim maximæ obſcurationis in eum peripheriæ quadrantem inciderat, qui inter punctum inferius, & extremum punctum meridionale diametri horizontalis conſtituitur. Tempore maximæ eclipſis magna obtenebratio facta eſt, & plures ſtellæ apparuerunt, & venus, & mercurius. Ex iis, quæ notata fuerunt, coniecimus maximam obſcurationem fuiſſe digitorum $11\frac{13}{14}$, quia ſcilicet arcus ſolis emicans duplam latitudinem æquabat eius fili, quod in foco teleſcopii extenſum erat, quæ latitudo, ſeu craſſities bis ſumpta ſecunda decem, aut duodecim comprehendebat.

7 29 0 Cornua eclipſis horizonti parallela exiſtebant.

7 29 20 Limbus præcedens ſolis horizontem viſibilem tangit, qui cum nullus eſſet terreſtrium corporum interpoſitus, tamquam linea recta apparebat.

7 29 22 Limbus præcedens lunæ horizontem tangit; &

tunc

tunc cornu ſeptentrionale altius attollebatur cornu meridionali.

7 30 27 Cornu ſeptentrionale occidit; & quamvis ſol totus infra horizontem lateret, veſpertinum lumen adhuc augebatur. Peractis hiſce obſervationibus quadrante aſtronomico horizontis depreſſionem definivimus, ubi ſol occiderat, eaque inventa eſt minutorum 9. 30″.

Obſervationes aliæ habitæ a Iacobo Parma, & a Ioſepho Bolſio Marcheſio.

6 36 6 INitium eclipſis viſum teleſcopio pedum 8.
Sequentes obſervationes inſtitutæ ſunt ope tabellæ, quæ digitos referebat, & teleſcopio pedum 3 aptata erat. Tabella ab oculari vitro diſtabat uncias 18, & imaginis exceptæ diameter æquabat uncias $2\frac{1}{2}$.

6 43 52 Digiti duo deficiebant.
6 47 55 Digiti tres.
6 52 28 Digiti quatuor.
6 56 13 Digiti quinque.
7 0 34 Digiti ſex. Determinatio dubia.

Defe-

Defectus ſolis obſervatus e ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, & a Iacobo Parma die 25 ſeptembris MDCCXXVI *ut eſt ab ipſis deſcriptus.*

Tab. obſerv. aſtronom. fig. 3.

PLures maculæ in ſole viſebantur, quæ cum a luna obtegi deberent, ante eclipſis initium ope micrometri earum poſitum in ſole definivimus, eaſdemque in typum retulimus, & literis conſignavimus, quo facilius ſingularum immerſiones a nobis indicerentur. Macularum poſitum in diſco ſolis exhibet ſubiectum ſchema.

H	'	''	Tem. ver. p. m.
5	23	19	Initium eclipſis tubo pedum 11; iamque luna tangit marginem maculæ f.
5	25	15	Centrum maculæ e obtegitur.
5	29	7	Centrum maculæ b.
5	30	34	Centrum maculæ a.
5	32	45	Centrum maculæ c.
5	32	49	Centrum maculæ d.
5	41	49	Intervalla 15 diametri ſolis ab eclipſi immunis, quorum diameter ſolis erat $21\frac{1}{5}$.
5	44	46	Intervalla 14.
5	47	55	Intervalla 13.

5 51 12

H	′	″	Temp. ver. p. m.
5	51	12	Intervalla 12.
5	55	11	Intervalla 11.
5	56		Sol poſt montes abſconditur.

Ex intervallis ſuperius deſcriptis non ſatis conſtat de quantitate eclipſis; nam cum ſol prope horizontem verſaretur, eius figura a refractionibus nimium deformata conſpiciebatur.

Defectus ſolis obſervatus in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 15 ſeptembris MDCCXXVII *mane ab Euſtachio Manfredio, & ſociis, ut eſt ab ipſis deſcriptus.*

Tab. obſerv. aſtronom. fig. 4.

PRo determinandis eclipſis phaſibus machinam parallacticam teleſcopio inſtructam adhibuimus. Tabella circulis concentricis diſtincta e regione vitri ocularis tranſverſo bracchiolo teleſcopium deferenti infixa erat, cuius diſtantia ab oculari vitro æquabat uncias 9. Iacobus Parma, & Franciſcus Vandellus hoc inſtrumento definiendis digitis operam dabant.

Maculæ in ſole conſpiciebantur, quarum poſitus is erat, quem ſubiecta figura exhibet. Pleraſque earum immerſiones, & emerſiones, quas hic referemus, notatæ fuerunt a Comite Franciſco Algarotto, & ab Euſtachio Zanotto.

H	'	''	temp. ver. poſt meri.	
18	55	48	Eclipſis iam cœperat. Propter nubes verum initium determinari non potuit.	
18	57	14	Deficiebat dimidium digiti	
18	59	37	Digitus unus, atque aliquid amplius	obſervationes
19	3	12	Digitus unus cum ſemiſſe	dubiæ pro-
19	6	50	Digiti duo	pter nubes.
19	10	11	Digiti duo cum ſemiſſe	
			Interim ab obſervando ceſſavimus propter denſiores nubes.	
19	35	46	Nondum deficiebant digiti quinque.	

H	'	''	temp. ver. poſt mer.
19	40	47	Digiti quinque præterpropter.
19	44	31	Maior macula ex tribus notatis i centro ſuo ad lunæ marginem apellit.
19	47	27	Limbus lunæ tranſit inter duas maculas s.
19	47	46	Altera ex duabus maculis s tota latet.
19	51	37	Obſcuratio ſolis minor erat quinque digitorum.
19	54	12	Centrum maculæ p immergitur.
19	55	37	Centrum maculæ q.
19	59	2	Eclipſis manifeſto minuebatur, tunc enim non excedebat digitos quatuor cum ſemiſſe. Obſervatio dubia propter nubes.
20	1	22	Macula n penitus abſconditur.
20	10	10	Obſcuratio aliquantum minor eſt trium digitorum cum ſemiſſe.
20	11	47	Macula i detecta eſt.
20	15	0	Deficiebant digiti tres.
20	18	48	Digiti duo cum ſemiſſe.
20	18	49	Macula s detegi incipit.
20	22	26	Digiti duo.
20	26	14	Digitus cum ſemiſſe.
20	36	6	Finis eclipſis.

Deſe.

Defectus totalis lunæ obſervatus in ſpeculæ bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 13 *februarii* MDCCXXIX.

Ex obſervationibus Euſtachii Manfredii, Iacobi Parmæ, & Franciſci Vandelli.

H	'	''	tem. ver. poſt mer.
7	39	22	Initium eclipſeos dubium.
7	40	22	Ricciolius in umbra.
7	41	2	Grimaldus mergi incipit.
7	42	7	Grimaldus totus latet.
7	43	37	Umbra per medium galilei.
7	49	37	Per medium ariſtarchi.
7	50	12	Totus ariſtarchus. Umbra ad mare humorum.
7	51	23	Per medium gaſſendi.
7	53	25	Per medium mare humorum.
7	58	33	Ad copernicum.
7	58	48	Ad bullialdum.
7	59	8	Ad heraclidem.
8	0	23	Centrum copernici, & totus bullialdus.
8	1	23	Totus copernicus latet.
8	4	13	Incipit pitatus & erathoſtenes.
8	5	18	Per medium pitati.
8	6	4	Totus erathoſtenes.
8	7	31	Tycho ad umbram.
8	8	39	Medium tychonis.
8	8	59	Plato ad umbram.
8	10	24	Tycho totus latet.
8	10	39	Totus plato.
8	13	54	Umbra ad manilium, & ad mare ſerenitatis.
8	15	19	Totus manilius.
8	16	57	Eudoxus & ariſtoteles ad umbram.
8	17	59	Medium eudoxi, ariſtotelis & menelai.
8	19	4	Medium dioniſii.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
8	21	35	Ad plinium.
8	24	40	Ad mare nectaris.
8	24	50	Ad fracaſtorium.
8	26	5	Medium fracaſtorii.
8	27	3	Fracaſtorius totus latet.
8	28	55	Totum mare nectaris.
8	31	55	Snellius ad umbram.
8	32	10	Ad mare criſium.
8	34	5	Per medium mare criſium.
8	35	51	Totum mare criſium in umbra.
8	39	16	Totalis immerſio.
10	16	46	Initium emerſionis.
10	19	52	Ricciolius extra umbram.
10	20	26	Grimaldus detegi incipit.
10	20	57	Medium grimaldi.
10	21	43	Grimaldus totus emerſerat.
10	25	1	Medium galilei.
10	25	51	Mare humorum incipit emergere.
10	28	31	Per medium mare humorum. Gaſſendus ad umbram.
10	31	26	Per medium ariſtarchi.
10	31	49	Totus ariſtarchus emerſerat.
10	33	12	Keplerus.
10	35	40	Tycho ad umbram.
10	36	52	Medium tychonis.
10	38	17	Totus tycho extra umbram.
10	40	22	Copernicus ad umbram.
10	41	12	Medium copernici.
10	42	14	Totus copernicus extra umbram.
10	47	47	Totus erathoſtenes.
10	48	18	Plato incipit.
10	49	1	Medium platonis.
10	49	53	Totus plato extra umbram.
10	57	14	Totus manilius.
10	58	14	Umbra per medium eudoxi, & ariſtotelis.
10	59	19	Menelai, & dioniſii.
11	2	59	Maris nectaris.

11 3

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
11	3	12	Plinius emergit.
11	5	19	Mare nectaris extra umbram.
11	10	27	Taruntius emergit, nubeculis lunam involventibus.
11	12	20	Incipit mare criſium. Obſervatio dubia.
11	14	20	Medium mare criſium.
11	16	29	Totum mare criſium.
11	17	27	Finis eclipſis dubius propter nubes.

Obſervationes aliæ Franciſci Mariæ Zanotti, Ioſephi Bolſii Marcheſii, Comitis Franciſci Algarotti, Euſtachii Zanotti.

7	38	50	INitium eclipſeos.
7	44	9	Galileus totus latet.
7	49	37	Ariſtarchus ad umbram.
7	50	42	Totus ariſtarchus in umbra.
7	50	47	Mare humorum ad umbram.
7	51	28	Totus keplerus latet.
7	55	18	Totum mare humorum.
7	58	48	Incipit copernicus.
8	0	24	Bullialdus totus latet.
8	1	22	Totus copernicus.
8	7	34	Tycho incipit.
8	9	8	Plato.
8	9	11	Totus plato.
8	13	49	Mare ſerenitatis ad umbram.
8	13	53	Manilius.
8	15	9	Totus manilius immergitur.
8	18	44	Totus menelaus.
8	19	10	Dioniſius.
8	26	13	Promontorium acutum.
8	28	12	Promontorium ſomni.
8	31	50	Initium maris criſium.
8	35	27	Finis maris criſium.
8	39	0	Totalis immerſio.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
10	18	33	Initium emerſionis.
10	22	56	Grimaldus extra umbram.
10	26	49	Incipit mare humorum.
10	26	52	Galileus extra umbram.
10	31	58	Ariſtarchus.
10	36	42	Tycho detegi incipit.
10	37	18	Bullialdus extra umbram.
10	38	23	Totus tycho,
10	43	5	Totus copernicus.
10	51	44	Totus plato.
10	56	39	Centrum manilii.
10	57	28	Totus manilius.
10	59	40	Centrum menelai.
11	4	13	Centrum plinii.
11	11	0	Promontorium ſomni.
11	14	3	Incipit mare criſium nubeculis lunam involventibus.

Finis eclipſeos non eſt obſervatus propter nubes.

Totalis lunæ defectus obſervatus in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 8 auguſti MDCCXXIX.

Obſervatio habita a Ioanne Iacobo Marinonio cæſareo mathematico, & conſiliario, & a Ioſepho Bolſio Marcheſio.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
11	56	52	INitium eclipſeos.
11	58	32	Galileus totus latet.
12	3	47	Ariſtarchus.
12	4	42	Keplerus.
12	6	49	Gaſſendus.
12	7	12	Schikardus.
12	10	41	Bullialdus.
12	11	33	Copernicus ad umbram.
12	12	56	Medium copernici.
12	19	46	Tycho ad umbram.
12	20	54	Medium tychonis.
12	21	43	Tycho totus latet.
12	23	43	Plato mergi incipit.
12	24	42	Medium platonis.
12	25	23	Totus plato.
12	25	55	Inſula ſinus medii.
12	27	35	Manilius totus tegitur.
12	29	35	Ariſtoteles.
12	32	7	Menelaus.
12	35	0	Plinius.
12	38	49	Promontorium ſomni.
12	39	26	Promontorium acutum.
12	44	16	Fracaſtorius.
12	45	42	Proclus.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
12	46	59	Initium maris criſium.
12	49	47	Medium maris criſium.
12	52	19	Totum mare criſium obumbratur.
12	53	6	Petavius totus immergitur.
12	55	54	Totalis immerſio lunæ.
14	34	25	Initium emerſionis dubium.
14	35	25	Procul dubio emerſio cœperat.
14	37	30	Incipit grimaldus.
14	38	20	Galileus totus emerſerat.
14	38	28	Grimaldus.
14	39	45	Ariſtarchus.
14	44	47	Keplerus.
14	48	33	Incipit plato.
14	49	31	Medium platonis.
14	50	42	Totus plato extra umbram.
14	52	47	Copernicus totus emerſerat.
14	55	32	Bullialdus.
15	1	56	Initium tychonis.
15	2	36	Medium tychonis.
15	3	50	Totus tycho.
15	4	50	Manilius.
15	7	47	Menelaus.
15	11	2	Dioniſius.
15	11	37	Plinius.
15	18	53	Promontorium acutum.
15	20	30	Initium maris criſium.
15	20	59	Totus proclus.
15	23	34	Medium maris criſium.
15	26	19	Totum mare criſium extra umbram.
15	35	0	Finis eclipſeos.

Obſer-

Obſervationes aliæ habitæ ab Euſtachio Zanotto, & a Franciſco Vandello.

H	'	''	temp. ver. poſt mer.
11	59	12	GRimaldus totus tegitur.
12	4	9	Galileus.
	6	30	Keplerus ad umbram.
	9	29	Schikardus.
	11	3	Copernicus.
	12	48	Medium copernici.
	13	3	Totus copernicus latet.
	14	35	Totus timocharis.
	19	16	Tycho ad umbram.
	19	59	Medium tychonis.
	20	42	Totus tycho.
	23	21	Plato ad umbram.
	24	13	Medium platonis.
	24	53	Totus plato.
	26	0	Manilius umbram tangit.
	26	50	Manilius tegitur.
	30	37	Menelaus ad umbram.
	30	52	Totus menelaus.
	33	44	Dioniſius.
	34	4	Plinius.
	37	36	Initium maris nectaris.
	40	51	Totum mare nectaris.
	42	36	Meſſala ad umbram.
	45	44	Proclus.
	46	30	Mare criſium ad umbram.
	49	9	Medium maris criſium.
	51	44	Totum mare criſium.
	55	43	Totalis immerſio lunæ.
14	34	5	Initium emerſionis.
	38	2	Grimaldus emergit.
	38	10	Grimaldus totus emerſerat.
	39	45	Ariſtarchus.
	44	53	Keplerus.
	46	50	Helicon.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
14	49	33	Plato ad umbram.
14	50	40	Totus plato.
15	2	3	Tycho incipit.
	2	51	Medium tychonis.
	3	51	Totus tycho.
	4	37	Manilius emergere incipit.
	7	47	Menelaus.
	11	7	Totus Dioniſius exit.
	11	27	Plinius.
	16	37	Cleomedes.
	18	53	Promontorium acutum.
	20	33	Initium maris criſium.
	24	11	Medium maris criſium.
	26	33	Totum mare criſium.
15	35	0	Finis eclipſeos.

Defe-

Defectus ſolis obſervatus in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, Euſtachio Zanotto, Ioſepho Roverſio die 15 iulii MDCCXXX mane, ut eſt ab ipſis deſcriptus.

NUbes horizontem occupabant ex ea parte, qua ſol oriturus erat. Hor. 16. 39 ſol apparuit deficiens digitos 4½ præterpropter. Nulla interiecta mora ad machinam parallacticam confugimus, ut imaginem ſolis tabella, quæ illi adiuncta erat, exciperemus, & quantitatem eclipſeos pro more definiremus. Longitudo teleſcopii erat pedum 4, & diameter imaginis ſolaris ſuper tabellam proiectæ æquabat uncias 2½.

H	'	"	temp. ver. poſt mer.
16	44	12	Obſcuratio ſolis digitorum 4.
16	45	42	Totalis emerſio maculæ, quæ viſebatur in eadem recta linea cum duabus propius centrum ſolaris diſci conſtitutis.
16	47	40	Deficiebat dig. 3½.
16	48	53	dig. 3.
16	49	15	Alia macula emerſerat, quæ in eadem recta linea cum tribus ſupradictis verſabatur, & ſolis margini propior erat.
16	51	13	dig. 2½.
			Nubes ſolem occludunt.

H	′	″	temp. ver. p. m.
16	59	40	Sol iterum apparet deficiens dig. 2.
17	1	46	Deficiebat dig. 0½.
17	3	4	Emerſio alterius maculæ, quæ parum aberat a limbo ſolis.
17	4	10	Finis eclipſeos teleſcopio pedum 11.
17	4	11	Finis eclipſeos obſervatus in tabella machinæ parallacticæ.

Obſer.

Obſervatio eclipſeos lunaris Romæ habita die I *decembris* MDCCXXXII *in ædibus Eminentiſs. De - Via a D. Didaco Revillas Abbate Hieronymiano, Abbate Ioanne Bottario, & Euſtachio Manfredio.*

Obſervationes habitæ teleſcopio palmorum 10.

H	'	"	temp. ver. poſt mer.
8	45	28	PEnumbra iam ſenſibilis.
	49	14	Penumbra denſior.
	51	19	Initium eclipſeos.
	51	44	Grimaldus mergi incipit.
	52	47	Totus latet.
	52	54	Galileus.
	53	48	Umbra ad gaſſendum.
	56	2	Totus latet gaſſendus.
	57	23	Schikardus.
9	2	43	Keplerus.
	4	53	Ariſtarcus totus latet.
	5	0	Lansbergius, & M. humorum fere totum latet.
	6	13	Bullialdus.
	6	53	Capuanus.
	7	8	Umbra ad mare nubium.
	8	2	Copernicus mergi incipit.
	8	29	Per medium copernici.
	10	27	Umbra ad eraſtothenem; & copernicus totus latet.
	14	12	Tycho mergi incipit.
	14	45	Inſula ſinus medii.

9 15

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
9	15	37	Heraclides.
	16	22	Tycho iam latet.
	18	12	Tymocharis.
	20	4	Archimedes.
	21	4	Harpalus.
	23	10	Manilius.
	23	16	Helicon.
	23	40	Plato.
	26	21	Menelaus.
	28	55	Catharina, & cyrillus.
	30	11	Plinius.
	30	56	Dioniſius.
	32	31	Ariſtoteles.
	33	11	Promontorium acutum.
	34	27	Fernellius.
	35	51	Snellius.
	36	11	Poſſidonius.
	36	41	Petavius.
	37	45	Promontorium ſomnii.
	38	25	Langrenus.
	40	24	Hermes.
	41	0	Proclus.
	41	30	Incipit mare criſium.
	42	32	Cleomedes.
	45	10	Umbra per medium maris criſium.
	46	20	Meſſala.
9	48	24	Totalis immerſio.
0	57	5	*Totalis immerſionis duratio.*
11	31	13	Procul dubio emerſio iam cœperat.
	33	13	Grimaldus emerſerat.
	46	3	Medium copernici.
	51	17	Tycho.
	51	52	Plato.
	53	13	Archimedes.
	56	36	Inſula ſinus medii.
	59	57	Eudoxus.

12 2

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
12	2	10	Manilius.
	3	26	Ariſtoteles.
	4	25	Menelaus.
	8	11	Poſſidonius.
	13	6	Plinius.
	17	14	Promontorium acutum.
	20	38	Langrenus.
	23	21	Totum mare criſium.
	26	55	Finis.

Duratio totius eclipſeos H. 3. 35. 36.

Phaſes nonnullæ immerſionis ex alia obſervatione habita teleſcopio Newtoniano.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
8	50	13	PEnumbra denſa.
	51	28	Initium certum obſcurationis.
	54	8	Grimaldus latet totus.
	54	32	Umbra per medium galilæum.
9	0	58	Totus keplerus latet.
	2	18	Umbra ad ariſtarchum.
	3	37	Totus ariſtarchus latet.
	8	3	Umbra ad initium copernici.
	9	20	Per medium copernici.
	10	32	Totus copernicus tegitur.
	14	47	Umbra ad initium tychonis.
	23	11	Ad initium manilii.
	23	26	Ad initium platonis.
	23	55	Umbra per medium platonis, & manilii.
	24	40	Totus plato tegitur.
	39	35	Umbra ad initium procli.
	40	18	Umbra ad hermetem.
	41	0	Totus proclus tegitur.
	41	31	Ad initium maris criſium.
	44	20	Per medium maris criſium.
	46	15	Totum mare criſium obumbratur.
	49	3	Totalis lunæ immerſio in umbra.

Obſer-

Obſervatio eclipſis lunæ habita in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti
a
Petro Martino in neapolitano Licæo matheſeos profeſſore,
Euſtachio Zanotto, Franciſco Vandello, Ioſepho Roverſio
die 28 maii MDCCXXXIII
ut eſt ab ipſis deſcripta.

INitium eclipſis contigit exiſtente luna infra horizontem. Primæ phaſes, quæ a nobis obſervatæ fuerunt ſunt admodum dubiæ propter nebulam, quæ lunam involvebat. Quantitatem eclipſis definivimus ope micrometri teleſcopio pedum 8 accommodati, cuius micrometri intervalla $19\frac{5}{6}$ lunæ diametrum metiebantur.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
8	4	49	Intervalla 5 diametri lunæ ab eclipſi immunis.
	5	1	Keplerus ad umbram.
	6	49	Intervalla adhuc 5.
	10	49	Intervalla $5\frac{1}{2}$.
	16	34	Intervalla 6.
	21	53	Timocharis extra umbram.
	22	35	Intervalla 7.
	24	9	Grimaldus incipit emergere.
	26	14	Grimaldus extra umbram.
	29	9	Copernicus emerſerat.
	30	42	Intervalla $7\frac{1}{2}$.
	33	41	Intervalla 8.
	33	53	Menelaus emerſerat.

H	'	"	temp. ver. poſt mer.
			Diſiectis nebulis cælum ſerenum patuit.
8	37	49	Intervalla $8\frac{1}{2}$.
	37	59	Plinius extra umbram.
	40	19	Intervalla 9.
	42	4	Umbra per medium mare criſium.
	42	19	Mare humorum incipit emergere.
	43	49	Intervalla 10.
	45	26	Medium maris humorum.
	45	41	Schikardus extra umbram.
	50	53	Intervalla 11.
	52	57	Dioniſius.
	53	20	Mare criſium extra umbram.
	56	2	Intervalla 12.
8	58	26	Promontorium acutum, & taruntius.
9	0	49	Intervalla 13.
	5	49	Intervalla 14.
	6	0	Tycho emergere incipit.
	7	50	Totus tycho emerſerat.
	10	20	Intervalla 15.
	12	20	Medium maris nectaris.
	15	19	Intervalla 16.
	16	39	Mare nectaris extra umbram.
	22	15	Intervalla $17\frac{1}{2}$.
9	29	10	Finis eclipſis.

Eclip-

Eclipſis ſolis obſervata in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, & ſociis die 3 maii MDCCXXXIV *mane, ut ab ipſis deſcripta eſt.*

H	′	″	Tem. ver. p. m.
22	27	5	INitium eclipſeos. Deinceps teleſcopio pedum 8 micrometrum aptavimus, quo obſcurationis quantitatem æſtimaremus. Diameter ſolis æquabat intervalla micrometri $21\frac{1}{4}$.
22	43	15	Intervalla 19 diametri ſolis ab eclipſi immunis, unde elicitur quantitatem obſcurationis fuiſſe dig. 1. 15.
22	51	30	Intervalla $18\frac{1}{2}$ ——— dig. 1. 33.
22	54	45	Intervalla $18\frac{1}{3}$ ——— dig. 1. 38.
22	58	45	Intervalla $18\frac{1}{4}$ ——— dig. 1. 41.
23	4	46	Intervalla $18\frac{1}{3}$ ——— dig. 1. 38.
23	10	46	Intervalla $18\frac{1}{2}$ ——— dig. 1. 33.
23	15	26	Intervalla $18\frac{2}{3}$ ——— dig. 1. 27.
23	17	16	Intervalla $18\frac{3}{4}$ ——— dig. 1. 25.
23	21	1	Intervalla 19 ——— dig. 1. 15.
23	23	46	Intervalla $19\frac{1}{5}$ ——— dig. 1. 9.
23	25	31	Intervalla $19\frac{1}{4}$ ——— dig. 1. 7.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.			
23	26	31	Intervalla $19\frac{1}{3}$ ———	dig.	1.	4.
23	28	17	Intervalla $19\frac{1}{2}$ ———	dig.	0.	59.
23	31	47	Intervalla 20 ———	dig.	0.	42.
23	39	48	Finis eclipſeos.			

Maxima obſcuratio fuit dig. 1. 41.

Deſe.

Defectus lunæ obſervatus in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, & ſociis die I *octobris* MDCCXXXV.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
12	51	52	INitium eclipſeos.
12	58	30	Schikardus ad umbram.
13	0	20	Schikardus totus latet.
	8	13	Incipit mare humorum.
	9	44	Capuanus in umbra.
	11	18	Tycho ad umbram.
	13	13	Totus tycho tegitur.
	18	26	Gaſſendus in umbra.
	19	30	Totum mare humorum.
	21	55	Bullialdus.
	30	50	Grimaldus incipit.
	36	22	Medium grimaldi.
	46	48	Mare nectaris ad umbram.
	47	44	Totum mare nubium.
	49	50	Umbra per medium grimaldi.
	54	15	Totum mare nectaris latet.
14	2	5	Grimaldus iam emerſerat.
	5	20	Reinoldus tegitur.
	30	14	Inſula ſinus medii extra umbram.
	31	59	Mare humorum incipit emergere.
	35	30	Gaſſendus extra umbram.
	38	45	Dioniſius.
	48	53	Schikardus.
	50	53	Capuanus.
	53	15	Promontorium acutum.
	59	22	Mare tranquillitatis.
15	4	6	Tycho incipit emergere.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
15	5	24	Medium tychonis.
	6	41	Totus tycho.
	7	10	Incipit mare nectaris.
	15	59	Fracaſtorius.
	19	29	Totus Fracaſtorius emergit.
	20	26	Totum mare humorum.
	34	50	Finis eclipſeos.

Diameter apparens lunæ æquabat intervalla 20⅔ micrometri, quo identidem quantitatem obſcurationis definivimus, ac deinceps in digitos convertimus.

13	4	50	Intervalla diametri lunæ ab eclipſi immunis 17½″. quibus reſpondent digiti ecliptici 1. 40.	
13	7	50	Inter. 17	dig. 1. 57.
	14	50	Inter. 16	dig. 2. 33.
	19	30	Inter. 15	dig. 3. 9.
	24	50	Inter. 14	dig. 3. 44.
	31	35	Inter. 13	dig. 4. 19.
	37	50	Inter. 12	dig. 4. 55.
	41	50	Inter. 11½	dig. 5. 13.
	46	50	Inter. 11	dig. 5. 30.
	55	50	Inter. 10⅓	dig. 5. 54.
14	6	50	Inter. 10	dig. 6. 6.
	18	50	Inter. 10	dig. 6. 6.
	31	20	Inter. 10⅓	dig. 5. 54.
	34	20	Inter. 10½	dig. 5. 48.
	38	40	Inter. 11	dig. 5. 30.
	47	50	Inter. 12	dig. 4. 55.
	54	26	Inter. 13	dig. 4. 19.
	59	20	Inter. 14	dig. 3. 44.
15	6	50	Inter. 15	dig. 3. 9.
15	12	30	Inter. 16	dig. 2. 33.
15	18	20	Inter. 17	dig. 1. 57.

Defe-

Defectus totalis lunæ obſervatus e ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti 26 *martii* MDCCXXXVI.

Ex obſervatione Euſtachii Manfredii teleſcopio pedum 10.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
10	58	45	INitium eclipſeos dubium.
11	0	46	Umbra ad medium grimaldi.
	1	51	Ad medium galilæi.
	6	0	Ad medium ariſtarchi.
	7	56	Ad medium kepleri.
	10	16	Gaſſendi.
	11	40	Capuani (dub.)
	15	27	Copernici.
	16	57	Bullialdi.
	19	27	Eratoſthenis.
	22	22	Pitati.
	24	15	Platonis.
	26	2	Tychonis.

Ex obſervatione Ioſephi Bolſii Marcheſii eodem teleſcopio.

11	28	55	Umbra ad medium manilii.
	33	56	Dionyſii.
	39	53	Catharinæ, theophili, cyrilli.
	41	23	Promontorii acuti.
	45	47	Taruntii & procli.
	46	41	Mare criſium obumbrari incipit.
	51	55	Totum mare criſium latet.
11	55	41	Totalis immerſio lunæ in umbram.

Ite-

Iterum ex obſervatione Manfredii eodem tubo.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
13	33	30	Initium emerſionis dubium.
	34	10	Certius.
	36	30	Emergit ricciolius.
	37	10	Medium grimaldi.
	38	27	Medium galilæi.
	41	31	Medium ariſtarchi.
	45	27	Kepleri.
	46	49	Schikardi (dub.)
	47	26	Maris humorum.
	48	41	Capuani (dub.)
	52	6	Copernici.
	53	28	Platonis.
	53	38	Bullialdi.
13	59	10	Tychonis.
14	0	14	Totus tycho emergit.
	5	20	Medium manilii.
	8	12	Menelai.
	10	47	Dionyſii.
	12	12	Plinii.
	15	22	Meſshallæ.
	18	3	Promontorii acuti.
	20	48	Procli.
	23	17	Petavii.
	23	53	Maris criſium.
	26	33	Langrenii (dub.)
	26	46	Totum mare criſium emergit.
	31	43	Totalis emerſio dubia.
	32	23	Certior.

Ex

Ex obſervatione Euſtachii Zanotti telescopio pedum 11.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
10	59	20	Luna deficere iam cœperat.
11	2	10	Galilæus in umbra.
	6	3	Medium ariſtarchi in umbra.
	8	8	Keplerus.
	10	23	Gaſſendus.
	13	11	Heraclides.
	14	59	Copernicus umbram attingit.
	16	10	Totus latet.
	17	14	Umbra ad medium bullialdi.
	17	33	Umbra ad tymocharim.
	23	27	Attingit platonem.
	24	22	Ad medium platonis.
	25	12	Totus plato latet.
	25	35	Umbra attingit tychonem.
	26	15	Ad medium tychonis.
	26	55	Totus tycho immergitur.
	29	15	Ad medium manilii.
	32	48	Ad medium menelai.
	33	44	Dionyſii.
	36	15	Plinii.
	39	54	Catharinæ, theophili, cyrilli.
	41	6	Promontorii acuti.
	41	53	Umbra attingit hermetem.
	42	28	Ad medium hermetis.
	43	17	Totus hermes in umbra.
	44	27	Umbra ad mare fœcunditatis.
	45	52	Ad proclum.
	46	41	Ad cleomedem.
	46	52	Ad mare criſium.
	49	34	Ad medium maris criſium.
	51	12	Totum mare criſium in umbra.
11	56	32	Totalis immerſio lunæ in umbram.
13	32	5	Initium emerſionis dubium.

H	'	''	temp. ver. poſt mer.
13	33	34	Emerſio cœperat.
	36	23	Emergit ricciolius.
	36	49	Grimaldus emergere incipit.
	37	40	Medium grimaldi exit.
	38	0	Totus grimaldus.
	39	3	Galilæus totus detegitur.
	41	41	Ariſtarchus totus.
	45	22	Keplerus emergit.
	46	22	Heraclides.
	47	42	Medium mare humorum.
	51	48	Copernici initium.
	52	23	Medium.
	53	17	Finis.
	53	43	Medium platonis.
	54	12	Plato totus.
13	59	45	Medium tychonis.
14	0	12	Tycho totus.
	3	24	Medium eudoxi.
	5	34	Manilii.
	8	21	Menelai.
	9	26	Hermetis.
	10	52	Dionyſii.
	12	2	Plinii.
	15	38	Meſshallæ.
	18	0	Promontorii acuti.
	20	53	Proclus emergit.
	23	54	Medium mare criſium.
	26	34	Totum mare criſium.
14	31	14	Finis eclipſeos.

Franciſcus Vandellius teleſcopio pedum 8, Ioſeph Roverſius teleſcopio pedum 6, quibus teleſcopiis micrometra erant aptata, ea determinarunt, quæ ad eclipſeos quantitatem identidem definiendam attinebant; ex iis autem phaſibus, quæ inter ſe ſe reſpondent, invicem collatis elicitur medium deliquii contigiſſe hora 12. 44. 50 poſt meridiem tempore vero.

Deſe-

Defectus lunæ obſervatus e ſpecula aſtronomica bononienſis ſcientiarum Inſtituti Noct. ſeq. diem 19 *ſeptembris* MDCCXXXVI.

Ex obſervatione Euſtachii Zanotti teleſcopio pedum 11.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
13	42	10	INitium eclipſeos.
	45	51	Umbra ad medium ricciolii.
	46	39	Umbra ad medium grimaldi.
	50	5	Umbra ad medium galilæi dub.
	54	33	Ad initium maris humorum.
	56	23	Ad medium gaſſendi.
	56	47	Ad medium ſchikardi.
	57	36	Ad medium kepleri.
	57	53	Ad medium ariſtarchi.
	58	30	Ad medium capuani.
14	3	45	Ad medium bullialdi.
	6	11	Ad initium copernici.
	6	53	Ad medium copernici.
	7	26	Ad finem copernici.
	8	1	Ad medium erathoſtenis.
	8	39	Ad medium heraclidis.
	9	20	Ad medium pitati.
	11	35	Ad initium tychonis.
	12	23	Ad medium tychonis.
	12	56	Ad finem tychonis.
	13	27	Ad medium heliconis.
	20	11	Ad medium platonis.
	22	38	Ad medium manilii.
	26	16	Ad medium menelai, & dionyſii.
	28	22	Ad medium eudoxi.
14	29	7	Ad medium ariſtotelis.

H	'	''	temp. ver. p. m.
14	30	15	Ad medium plinii.
	34	5	Ad medium promontorii acuti.
	38	18	Ad medium promontorii ſomni.
	39	25	Ad medium meſshallæ.
	39	58	Ad medium procli.
	42	9	Ad initium maris criſium.
	43	15	Ad medium cleomedis.
	44	37	Ad medium maris criſium.
	46	27	Ad finem maris criſium.
14	49	10	Totalis immerſio.
16	37	45	Emerſio iam cœperat, ricciolius extra umbram.
	38	20	Umbra ad medium grimaldi.
	42	1	Ad medium galilæi.
	44	25	Ad medium ſchikardi.
	47	18	Ad medium ariſtarchi.
	48	15	Gaſſendus totus emerſerat.
	50	8	Umbra ad medium kepleri.
	55	19	Ad medium heraclidis.
	55	54	Ad medium bullialdi.
	58	33	Ad medium tychonis.
	59	19	Ad medium heliconis.
	59	33	Copernicus totus emerſerat.
17	5	26	Umbra ad medium platonis.
	13	59	Ad medium manilii.
	18	41	Ad medium menelai.
	19	38	Dionyſius emerſerat totus.
	22	56	Umbra ad medium plinii.
	24	51	Ad medium hermetis.
	27	40	Ad medium promontorii acuti: obſervatio deinceps dubia ob crepuſculum matutinum.
	35	0	Mare criſium magnam partem emerſerat.
	40	0	Nondum deſierat eclipſis.
17	46	0	Prorſus deſiiſſe videbatur.

Ex obſervatione Thomæ Perelli tubo pedum 8, & *Ioſephi Garatoni tubo ped.* 9.

H	'	''	temp. ver. poſt mer.
13	46	38	Umbra ad grimaldum.
	47	28	Grimaldus totus in umbra.
	48	56	Umbra ad galilæum.
	50	28	Totus galilæus.
	53	32	Umbra ad mare humorum.
	56	25	Ad medium mare humorum.
	58	22	Keplerus in umbra.
14	3	27	Umbra ad bulialdum.
	5	7	Ad copernicum.
	6	16	Ad medium copernici.
	7	2	Ad finem copernici.
	11	21	Ad initium tychonis.
	12	2	Ad medium tychonis.
	12	51	Ad finem tychonis.
	13	15	Ad heliconem.
	13	55	Ad finem heliconis.
	19	52	Ad initium platonis.
	20	32	Ad finem platonis.
	25	42	Ad initium menelai.
	26	5	Ad initium dionyſii.
	26	40	Ad finem menelai.
	26	44	Ad finem dionyſii.
	28	19	Ad medium mare ſerenitatis.
	33	31	Ad initium poſſidonii.
	35	34	Ad finem maris nectaris.
	37	34	Ad promontorium ſomni.
	41	38	Ad initium maris criſium.
	44	19	Ad medium mare criſium.
	45	29	Umbra ad finem maris criſium.
14	49	10	Totalis immerſio lunæ in umbram.
16	58	17	Tycho ab umbra ſe ſubducere incipit.
	58	23	Medium tychonis emergit.
	59	35	Totus tycho emergit.
17	5	2	Plato emergere incipit.

17 5

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
17	5	52	Totus plato emergit.
	13	32	Emergit initium maris ſerenitatis.
	25	0	Emergit medium mare nectaris.
	27	20	Emergit totum mare nectaris.
	35	40	Initium maris criſium dub.
	38	20	Emergit medium maris criſium.
	40	20	Emergit totum mare criſium.
17	43	0	Finis eclipſeos.

Diametrum lunæ hora 12. 53 dimenſus eſt Ioſeph Roverſius micrometro, quod teleſcopio pedum 8 aptatum erat, & invenit minutorum 29 ſec. 35.

Eadem nocte Euſtachius Zanottus obſervaverat totalem immerſionem primi ſatellitis iovis in umbram hora 8. 5. 6 poſt meridiem ver., uſus teleſcopio campani pedum bononienſium 22.

Defectus ſolis obſervatus e ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, & ſociis die prima martii MDCCXXXVII.

Tab. obſerv. aſtronom. fig. 5.

INitium huiuſce deliquii calculos noſtros minutis horariis plus ſeptem antervertit. Hora enim 3 min. 33 ſec. 36 iam aliquid ſolaris marginis a luna delibari apparuit directo intuitu per vitrum fuligine infectum, ac teleſcopio pedum undecim aptatum (cum paullo ante, hoc eſt, in ipſo ſcrupulo 33, eodem teleſcopio ſol plane rotundus viſus eſſet) calculi autem initium in horam 3. 41 coniiciebant.

Deinceps digitos eclipticos notavimus traiecto ſolis radio per tubum opticum pedum ſex, eoque excepto in tabella candida, cui tabellæ circulus inſcriptus erat ad imaginem ſolis commenſus, atque in digitos, ac ſemidigitos diſpertitus. Verum obſervationi haud parum obſtitit ventus machinam exagitans. Certiores phaſes hæ fuiſſe videntur

H	′	
3	40	Deficiebat digitus præterpropter.
3	48	Duo digiti.
3	57	Digiti tres.
4	6	Digiti quatuor.
4	15½	Quinque digiti.
—	—	
4	35	Digiti ſeptem.
4	45	Septem cum ſemiſſe, quæ nobis obſcuratio maxima viſa eſt.
4	55	Iterum digiti ipſi ſeptem, eclipſi iam decreſcente.

Poſt-

Poſtmodum cum ſpecies ſolis in occaſum vergentis nimis fluctuans, ac trepida viſeretur, necnon ex rotunda in ovalem ſat manifeſto deformata, a digitorum dimenſione, quippe haud ſatis certa, ceſſavimus.

Nonnullæ apparebant in ſole maculæ, tres præſertim, quarum poſitiones ipſo meridie eius diei ab obſervationibus deſcriptas exhibet ſubiectum ſchema. Duarum ex his occultationes ita definivimus eodem tubo pedum undecim.

H	′	″	
4	23	18	Limbus lunæ coronam maculæ A contingit.
	23	49	Nucleum ipſum maculæ A tegere incipit.
	24	25	Totum nucleum abſcondit.
	26	14	Maculam B diſtringit.
	26	31	Totam involvit.

Defectus lunæ obſervatus in ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 8 ſeptembris MDCCXXXVII.

Ex obſervatione Ioſephi Roverſii tubo optico pedum 10.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
14	50		INitium eclipſeos dubium.
14	52		Procul dubio cœperat eclipſis.
15	3	21	Totus heraclides in umbra.
	4	8	Ariſtarchus totus.
	11	34	Umbra per medium platonem.
	12	2	Galilæus in umbra.
	12	24	Plato totus.
	14	29	Umbra per medium mare imbrium.
	18	19	Totus eratoſthenes in umbra.
	19	29	Umbra ad medium kepleri.
	30	0	Initium grimaldi inter nebulas.
	35	0	Medium grimaldi inter nebulas.
	42	31	Totus poſſidonius.
	44	26	Manilius.
	49	41	Totum mare ſerenitatis.
15	54	36	Grimaldus extra umbram.
16	0	21	Mare criſium obtegi incipit.
	4	23	Umbra ad proclum.
	9	31	Ad medium maris criſium.
	15	17	Medius keplerus emerſit.
	18	37	Emerſit galilæus.
	23	24	Totum mare criſium in umbra.
	30	12	Medius copernicus emerſit.
	38	13	Ariſtarchus emerſit.
	44	43	Emerſit eratoſthenes.
	48	18	Manilius.
	51	53	Mare criſium detegi incipit.
	53	13	Emerſit menelaus.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
16	57	19	Emerſit heraclides.
17	4	23	Emerſit helicon.
	8	48	Umbra ad medium mare criſium.
	13	19	Totum mare ſerenitatis emerſit.
	15	0	Totum mare criſium emerſit.
			Finem deliquii definire non licuit nubeculis lunam involventibus.

Ex obſervatione Petronii Matteuccii teleſcopio ped. 8, *ac reticulo.*

14	22		Diam. lunæ pluries definita exæquabat intervalla ipſa reticuli 20.
15	10	19	Pars diam. lunæ ab eclipſi immunis intervalla 16.
	14	59	Inter. 15.
	26	24	Inter. 13.
	35	0	Inter. 12.
	42	50	Inter. 11½.
	47	54	Inter. 11.
	52	20	Inter. 10½.
16	0	10	Inter. 10.
	10	11	Inter. adhuc 10.
	18	41	Inter. adhuc 10.
	32	17	Inter. 11.
	42	37	Inter. 12.
	49	7	Inter. 13. dub.
16	58	43	Inter. 14.
17	4	13	Inter. 15.
	10	0	Inter. 16.
	14	25	Inter. 17.
17	20	20	Inter. 18.

Eclip-

Eclipſis ſolis obſervata in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Manfredio, & ſociis die 15 *auguſti* MDCCXXXVIII *mane.*

Tab. obſerv. aſtronom. fig. 6.

H	′	″	Tem. ver. p. m.
22	52	25	ECliplis iam cœperat. Sequentes phaſes obſervatæ fuerunt ope tabellæ teleſcopio ſex pedum affixæ, in qua digiti & ſemidigiti deſcripti erant.
23	0	10	Obſcurationis dig. 1.
	4	20	dig. $1\frac{1}{2}$.
	11	20	dig. 2.
	18	25	dig. $2\frac{1}{2}$.
	23	56	dig. 3.
	31	49	dig. $3\frac{1}{2}$.
	35	14	dig. 4.
	43	30	dig. $4\frac{1}{4}$.
	45	14	dig. $4\frac{1}{3}$.
	46	59	dig. $4\frac{1}{2}$.
	51	14	dig. $4\frac{3}{5}$.
	55	14	dig. $4\frac{2}{3}$.
	58	14	dig. $4\frac{3}{4}$.
0	1	46	dig. $4\frac{4}{5}$.
	4	14	dig. $4\frac{4}{5}$.
	13	25	dig. $4\frac{2}{3}$.
	18	5	dig. $4\frac{1}{2}$.
	22	43	dig. $4\frac{1}{3}$.
	28	25	dig. $4\frac{1}{5}$.

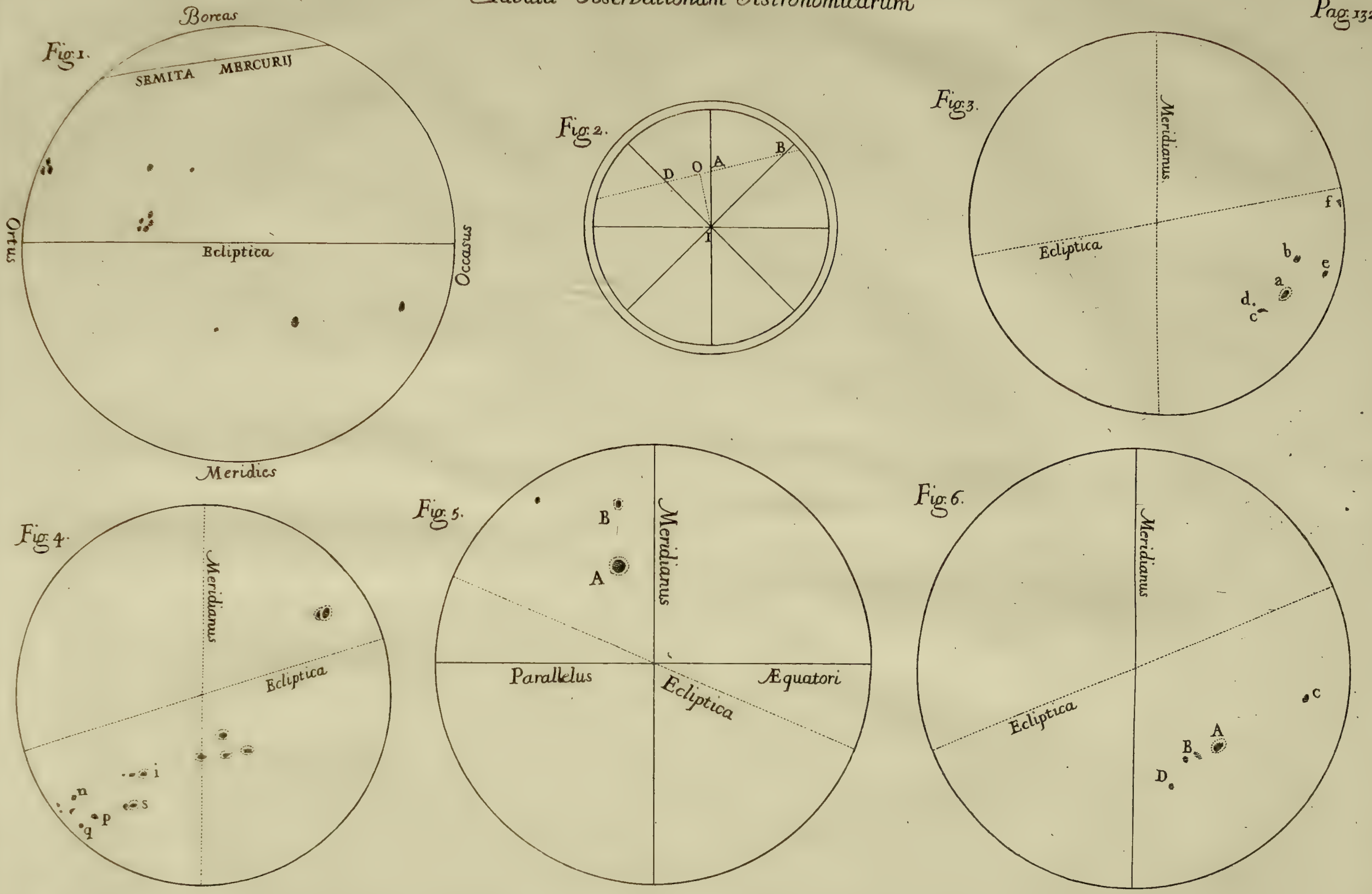
H	′	″	temp. ver. poſt mer.
0	31	50	Obſcurationis dig. 4.
	39	13	dig. $3\frac{1}{2}$.
	42	0	dig. $3\frac{1}{3}$.
	46	50	dig. 3.
	51	11	dig. $2\frac{2}{3}$.
	52	55	dig. $2\frac{1}{2}$.
	54	58	dig. $2\frac{1}{3}$.
0	57	31	dig. 2.
1	0	30	dig. $1\frac{3}{4}$.
	2	0	dig. $1\frac{2}{3}$.
	3	26	dig. $1\frac{1}{2}$.
	5	24	dig. $1\frac{1}{3}$.
	7	52	dig. 1.
	10	6	dig. $0\frac{3}{4}$.
	13	4	dig. $0\frac{1}{2}$.
1	18	2	Finis eclipſeos.

Tempora quibus maculæ ſolares, vel ſub diſco lunæ ſunt abſconditæ, vel ab eo detectæ.

23	3	50	Macula c tegitur.
	21	3	Macula A tangit lunæ marginem.
	21	49	Centrum eiuſdem maculæ.
	22	41	Macula A iam deliteſcit.
	23	54	Prima ex duabus maculis B incipit occultari.
	25	0	Centrum eiuſdem maculæ.
	25	45	Eadem macula tota latet.
	26	24	Centrum alterius maculæ B immergitur.
	27	2	Macula D tangit lunam.
	31	2	Eadem macula tota latet.
0	31	45	Macula A incipit emergere.
	32	30	Eadem macula A emerſerat.
	33	25	Centrum primæ maculæ ex duabus B emergit.
	34	59	Totalis emerſio eiuſdem maculæ.
0	35	51	Altera ex duabus maculis B emerſerat.

Defe-

Tabula Observationum Astronomicarum



Defectus lunæ obſervatus e ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti die 24 ianuarii MDCCXXXVIIII *ab Euſtachio Zanotto, & ſociis.*

H	'	"	tem. ver. poſt mer.
10	18	7	INitium eclipſeos dubium.
	19	37	Procul dubio cœperat eclipſis.
	24	52	Totus harpalus immergitur.
	29	49	Totus heraclides.
	31	34	Totus helicon.
	33	35	Umbra per medium ariſtarchum.
	34	40	Totus ariſtarchus ſub umbra.
	35	24	Plato ad umbram.
	36	19	Totus plato ſub umbra.
	44	51	Umbra per medium erathoſtenem.
	47	47	Totus keplerus.
	51	1	Copernicus ad umbram.
	55	7	Totus hermes.
10	58	32	Copernicus totus latet.
11	4	27	Ricciolius.
	8	19	Grimaldus ad umbram.
	9	47	Plinius totus in umbra.
	14	11	Incipit mare criſium.
	19	37	Medium mare criſium in umbra.
	24	49	Totum mare criſium.
	27	57	Taruntius totus in umbra.
	28	42	Ricciolius extra umbram.
	31	42	Dioniſius immergitur.
	46	7	Umbra ad mare nectaris.
11	53	11	Galileus extra umbram.
12	14	22	Ariſtarchus totus emerſit.
12	18	55	Totus copernicus extra umbram.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
12	30	37	Heraclides.
	35	19	Timocharis.
	36	27	Dioniſius.
	38	58	Helicon.
	40	22	Manilius.
	45	41	Menelaus.
	46	17	Plato detegi incipit.
	47	33	Totus plato extra umbram.
	50	1	Plinius.
12	53	37	Ariſtoteles.
13	1	44	Mare criſium emergere incipit.
	2	47	Proclus emerſit.
	5	37	Medium mare criſium extra umbram.
	8	57	Totum mare criſium ſe ſubduxit.
	12	1	Finis eclipſeos.
	12	35	Finis eclipſeos iuxta aliam obſervationem.

Tempore maximæ obſcurationis determinata fuit eclipſeos quantitas ope micrometri, quod teleſcopio pedum octo aptatum erat, & inventa fuit ex pluribus ſæpius repetitis obſervationibus dig. 7. 12.

Defe-

Defectus ſolis obſervatus in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Zanotto, Petronio Matteuccio, Ioſepho Garatono, & Ioſepho Roverſio die 4 *auguſti* MDCCXXXIX.

Teleſcopio ſex pedum tabellam ſic aptavimus, ut axi eiuſdem perpendiculariter exiſteret. In tabella ſex circuli concentrici paribus intervallis inter ſe diſſiti deſcripti erant ad quantitatem eclipſeos per digitos deffiniendam; verum digitorum partes oculari iudicio æſtimabantur.

H	′	″	tem. ver. poſt mer.	H	′	″	tem. ver. poſt mer.
4	26	1	Initium eclipſeos.	5	33	8	dig. $7\frac{2}{5}$.
	31	30	dig. 1.		36	37	dig. $7\frac{1}{3}$.
	35	46	dig. $1\frac{1}{2}$.		42	26	dig. 7.
	38	30	dig. 2.		48	24	dig. $6\frac{1}{2}$.
	41	40	dig. $2\frac{1}{2}$.		52	49	dig. 6.
	45	30	dig. 3.	5	57	8	dig. $5\frac{1}{2}$.
	49	0	dig. $3\frac{1}{2}$.	6	0	57	dig. 5.
	52	46	dig. 4.		4	31	dig. $4\frac{1}{2}$.
4	57	8	dig. $4\frac{1}{2}$.		8	25	dig. 4.
5	0	25	dig. 5.		11	36	dig. $3\frac{1}{2}$.
	5	21	dig. $5\frac{1}{2}$.		15	25	dig. 3.
	9	14	dig. 6.		18	0	dig. $2\frac{1}{2}$.
	14	48	dig. $6\frac{1}{2}$.		21	9	dig. 2.
	20	25	dig. 7.		24	9	dig. $1\frac{1}{2}$.
	25	31	dig. $7\frac{1}{3}$.		27	3	dig. 1.
	29	0	dig. $7\frac{2}{5}$.	6	31	47	Finis eclipſeos.

Dum

Dum obſcurationis quantitatem ope tabellæ metiebamur, tempora notavimus, quibus maculæ quædam, quæ in ſole apparebant, vel a luna obtegebantur, vel ab ea emergebant. Maculæ inſigniores erant quatuor, quarum duæ tantum ſub luna delituerunt, eæ ſcilicet, quæ magis ad ſeptentrionem declinabant.

4	44	18	Occidentalior ex duabus maculis immergi incipit.
	44	38	Eadem macula penitus latet.
5	12	53	Initium immerſionis alterius maculæ.
	13	15	Totalis immerſio.
6	8	30	Poſtrema, quæ orientalior erat ex duabus maculis emergere incipit.
	8	47	Eadem macula emerſerat.

Eclipſis ſolis obſervata in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Zanotto, & a Petronio Matteuccio die 30 decembris MDCCXXXIX *mane.*

INitium eclipſis hora 20. 48. 14 poſt meridiem tem. ver. notatum fuit; & ſane luminarium contactum paucis admodum ſecundis horariis maturius contigiſſe exiſtimamus, etenim quo tempore eclipſim perſenſimus, obſcurus lunæ diſcus ſolis marginem vix delibaverat.

Plures eclipſis phaſes teleſcopio pedum octo una cum reticulo definivimus, cuius reticuli intervalla 21 $\frac{4}{9}$ ex ſæpius repetitis obſervationibus ſolis diametrum metiri comperimus: quare cum pars diametri ſolis ab eclipſi immunis tempore maximæ obſcurationis intervalla 19¼ æquaverit, elicitur maximam eclipſis quantitatem fuiſſe dig. 1. 14.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
20	53	40	Intervalla 21 diametri ſolis ab eclipſi immunis.
20	55	55	Intervalla 20½.
21	2	38	Intervalla 20.
	9	25	Intervalla 19½.
	14	53	Intervalla 19⅓.
	19	23	Intervalla 19¼.
	22	54	Intervalla adhuc 19¼.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
21	26	32	Intervalla $19\frac{1}{3}$.
	29	11	Intervalla $19\frac{1}{2}$.
	35	38	Intervalla 20.
	45	1	Intervalla $20\frac{1}{2}$.
	47	8	Intervalla 21.
21	51	54	Finis eclipſis.

Eclipſis lunæ obſervata in aſtronomica ſpecula bononienſis ſcientiarum Inſtituti ab Euſtachio Zanotto, & a Petronio Matteuccio die 13 *ianuarii* MDCCXXXX.

H	′	″	temp. ver. poſt mer.
9	11	0	INitium eclipſis.
	12	21	Ricciolius ad umbram.
	13	59	Grimaldus.
	15	1	Grimaldus totus latet.
	15	52	Totus galileus.
	20	6	Ariſtarchus ad umbram.
	21	7	Ariſtarchus totus in umbra.
	23	46	Totus keplerus.
	25	35	Gaſſendus ad umbram.
	26	20	Totus gaſſendus ſub umbra.
	29	16	Umbra ſchikardum attingit.
	30	24	Schikardus totus in umbra.
	30	36	Copernicus ad umbram.
	31	18	Erathoſtenes totus in umbra.
	32	35	Totus copernicus.
	33	35	Totus capuanus.
	33	37	Bullialdus ad umbram.
	34	33	Bullialdus totus latet.
	36	2	Timocharis.
	39	57	Umbra per medium pitatī.
	40	23	Plato immergi incipit.
	40	32	Inſula ſinus medii.
	41	24	Totus plato immergitur.
	43	40	Tycho ad umbram.
	45	5	Tycho in umbra.
	47	11	Manilius ad umbram.
	48	10	Manilius in umbra.

H	'	"	temp. ver. poſt mer.
9	49	54	Eudoxus ad umbram.
	51	4	Eudoxus in umbra.
	51	40	Umbra ad medium menelai.
	52	46	Dionyſius totus latet.
	54	45	Plinius ad umbram.
	55	23	Plinius totus latet.
10	0	14	Catharina, cyrillus in umbra.
	0	58	Fracaſtorius ad umbram.
	0	59	Promontorium acutum.
	1	53	Fracaſtorius totus in umbra.
	3	16	Promontorium ſomnii.
	5	54	Proclus.
	6	32	Meſſalla.
	7	31	Mare criſium obumbrari incipit.
	9	44	Umbra ad medium maris criſium.
	11	31	Totum mare criſium latet.
10	16	37	Totalis immerſio lunæ in umbram.

In hac eclipſi luna penitus deficiens obſcurior nobis viſa eſt, quam alias apparuerit.

Emerſionis phaſes ſunt admodum dubiæ, officiebant enim obſervationibus & denſa nebula, quæ lunam involvebat, & humidus aer, a quo identidem teleſcopii vitra inficiebantur.

12	1	28	Luna emergere incipit.
	4	14	Umbra ad medium ricciolii.
	4	49	Incipit grimaldus.
	5	42	Grimaldus extra umbram.
	7	18	Galileus.
	9	22	Incipit ariſtarchus.
	10	4	Ariſtarchus emerſerat.
	19	29	Helicon.
	22	37	Medium copernici exit.
	23	24	Copernicus extra umbram.
	25	1	Medium platonis.
	25	25	Timocharis extra umbram.
	30	17	Medium tychonis.

12 31

H	′	″	tem. ver. poſt mer.
12	31	20	Tycho emerſerat.
	34	0	Ariſtoteles.
	34	59	Eudoxus.
	38	29	Manilius.
	41	12	Menelaus.
	45	6	Dionyſius.
	45	23	Poſſidonius.
	47	8	Plinius.
	52	30	Promontorium acutum.
	56	23	Mare criſium detegi incipit.
	58	30	Umbra ad medium mare criſium.
13	0	42	Mare criſium emergit.
13	7	16	Finis eclipſis.

IACOBI RICCATI

De motuum communicationibus ex attractione.

QUum ex iis, quæ alias a nobis demonſtrata ſunt, illud videatur multo certiſſimum, vires vivas velocitatum quadratis eſſe æſtimandas, atque omnia ſtare a Leibnitio, ſi aliqua, tametſi exigua, vis primitivæ portio in ictu inertium corporum impendatur: nullus dubito, quin viri illi clariſſimi, doctiſſimique, qui veterem, vulgaremque Carteſii ſententiam tuentur, in id nervos omnes ingenii, animique vires intendant, ut huiuſmodi principium, quo tamquam baſi noſtræ demonſtrationes nituntur, funditus evertant, atque convellant. Æquiore fortaſſe uſus fuiſſem adverſario, aut potius iudice, ſi cum Newtono fuiſſet mihi habenda diſceptatio: qui auctor in ſuis monumentis, quæ ſane deleri non poſſunt, hanc veritatem ſcriptam reliquit. Tametſi autem in mentem illi non venerint ea, quæ ex hoc principio conſequuntur (ſæpe enim fit, ut viros etiam acerrimo ingenio præditos nonnulla fugiant) tamen cum ſemel veritatem noverit, facile mihi perſuadeo, hominem non minus doctum, quam ingenuum, ſi adhuc viveret, etiam conſectaria probaturum.

Interea quando cum eius diſcipulis res mihi habenda eſt, dabo operam, ut alio analyſeos circuitu meam propoſitionem demonſtrem. Quoniam autem alia motus communicandi ratio mihi conſideranda occurrit, cum ſcilicet motus ab altero ad alterum corpus non ex ictu, ſed attractione transfertur; patefaciam quibuſnam legibus fiat huiusmodi tranſitus, & quantum ſui ſimilis natura ſit, & ſimul oſtendam leges omnes, quibus vires vivas poſſumus æſtimare, ſi leibnitianam excipias, omnes ſibimetipſis adverſari.

Primum omnium peto, utrum ad diſtendendam cordam elaſticam, aut elaſtrum vis impendenda ſit? Mirabuntur for-

fortaſſe nonnulli, cur ita interrogem. Verum ubi ſciant, quo res deducenda ſit, deſinent mirari. Nam ſi vim requiri dicant, iam habeo quidquid ad perficiendam demonſtrationem eſt neceſſarium: ſi vim requiri negent, quod ne ſuſpicor quidem, hæc mecum quæſo attente animadvertant.

Suſpendatur ex clavo immobili A (*Fig.* 1) elaſtrum AB, in cuius termino B collocetur pondus C, quod deſcendet motu accelerato uſque ad punctum C; tum ex impetu impreſſo perget deſcendere motu retardato diſtendendo cordam uſque ad certum punctum exempli cauſſa D, in quo amiſſo motu quieſcet. Iam vero cum ibi vis elaſtica præpolleat, deſcenſus in aſcenſum convertetur, & grave C ſurſum feretur motu accelerato uſque ad C, tum motu retardato uſque ad B. Ita reciproca quadam agitatione inſtar penduli nunc ſurſum, nunc deorſum feretur in infinitum; ſi virga AB ſit abſoluta elaſticitate prædita, & motus fiat in ſpatio reſiſtentiæ experte. Sed cum huiuſmodi circumſtantiæ in terræ viciniis locum non habeant, poſt pleraſque oſcillationes mobile in loco C conquieſcet, patiente elaſtro diſtenſionem BC.

Porro niſi elaſtri reſiſtentia gravitatis impediret actionem, deſcenderet globus C motu ea lege accelerato, perinde ac ſi ab elaſtro diſiunctus liber deſcenderet. Quare igitur percurrens ſpatium BC minus acceleratur? quare per intervallum CD motu retardato iter facit? quare conquieſcit, ubi ad punctum D pervenit? quare tandem mutata directione regreditur per lineam DB, neque ad centrum gravium tendere pergit? Nonne certum eſt, id effici partim ab actione, partim ab elaſtri retro-actione?

Ut ratio intelligatur, ſciendum eſt, elaſtrum AB in naturali poſitione collocatum habere minimam repugnantiam ad infiniteſimam diſtenſionem: ſed quanto magis diſtenditur, tanto magis ulteriori diſtenſioni reſiſtit: donec virga, quæ infinitam acquirere nequit longitudinem, ubi certam paſſa eſt diſtenſionem diſrumpitur. Itaque curva, cuius ordinatæ exprimunt creſcentes elaſtri tenacitates, originem habens in puncto B ab axe BE magis, magiſque remota fiet, ſitque exempli cauſſa curva BHK, cuius naturam in præſentia ſupervacaneum eſt inveſtigare. Hoc enim dumtaxat ſcire oportet, minimam reſiſtentiam eſſe in puncto

ſto B, maximam in punſto E, ſi virga diſrumpitur, dum longitudinem AE acquiſivit.

Recta GB cordæ AB normalis corporis C reprehesentet gravitatem. Ex puncto G ducatur verticalis GI, quæ reſiſtentiarum ſcalam ſecet in puncto F. Perſpicuum eſt in puncto B grave C integram exercere actionem, quia in eo loco infiniteſima eſt elaſtri reſiſtentia; ſed dum mobile pervenit in m, gravitas integram vim ſuam Lm minime exercet; vis enim contraria elaſtri per mn expreſſa ſubtrahenda eſt: qua de re impulſus ſollicitans mobile ad deſcenſum reprehesentatur ab intercepta Ln, & ſumma omnium impulſuum ſucceſſivorum non exprimitur a rectangulo GBCF, quod accideret, ſi globus C libere deſcenderet, ſed a trilineo GBF. Hinc ſi fiat area HFI inferior ſuperiori areæ GFB æqualis, ordinata HD ſecabit axem in puncto D, in quo puncto globus C poſt deſcenſum per verticalem BD conquieſcet.

Deſcribatur deinde parabola apolloniana Bcd, cuius ordinatæ Cc, Dd ſignificabunt velocitates, quas adeptum eſſet corpus C percurrens ſpatia BC, BD non impeditum a cordæ tenacitate: ſed quoniam idem grave ab elaſtro ſuſpenſum, ubi ad punctum C venit, habet non celeritatem Cc, ſed minorem celeritatem CO, neque hoc actioni gravitatis tribuendum eſt, cuius virtus omnis in quolibet puncto grave ſollicitat: dicendum eſt igitur, aliquam gravitatis partem, quæ velocitatem Oc velocitati CO addidiſſet, erogatam eſſe adverſus elaſtrum, cuius & auxit longitudinem, & tenacitatem ſuperavit. Similiter in puncto D idem mobile omni privatur motu: atqui, ſi libere centrum petiiſſet, præditum eſſet velocitate Dd: igitur vis omnis, quæ neceſſaria eſt, ut mobili velocitas Dd communicetur, conſumpta eſt in elaſtri diſtenſionem per integrum ſpatium BD.

Præterea fac perpendas elaſtrum, dum ſe ſe reſtituit, vim facere gravitati corporis C, illudque ſurſum trahere a D uſque ad B: ſed ut corpus C per hoc ſpatium ſurſum feratur, tanta vis requiritur, quantam libere deſcendens a B in D adeptum eſſet: igitur omnes ſucceſſive impreſſiones corpori C communicatæ a gravitate conſtante reactionis cauſſa translatæ ſunt in elaſtrum, quod naturalem longitudinem recuperans ſurſum trahit pondus æquali virium ag-

gregato, tametſi illud gravitas iteratis impulſibus ad centrum ſollicitet.

Multa hac de re dici poſſent, ſed hæc ſatis, ſuperque oſtendunt, elaſtrum, cuius fibræ per ſe quieſcant, non poſſe diſtendi, neque comprimi, niſi vis extrinſeca adhibeatur. Quæ cum ita ſint mihi ob oculos propono huiuſmodi

Hypotheſin.

SPhæræ A (*Fig.* 2) coniunctum ſit elaſtrum rigidum C, atque utrumque in ſpatio infinite raro procedat communi velocitate V. Interim dum movetur, lineamque horizontalem percurrit, in altero elaſtri termino collocetur ſphæra B motus expers. Concipio autem, ut res pertractatu facilior ſit, cum utramque ſphæram, tum elaſtrum gravitate carere, elaſtrique maſſam ad maſſas corporum habere proportionem minorem quacumque data: nihil enim impedit, quominus elaſtrum maſſæ inaſſignabilis finita præditum ſit tenacitate. Quæritur quibuſnam legibus motus communicatio peragetur.

Propoſitio prima. Theorema.

DUm motus corpori B communicatur, aio, elaſtrum diſtenſionem paſſurum: nam ſi ſecus res ſe ſe haberet, neceſſe eſſet, ut quum primum ſphæra B coniuncta eſt elaſtro, e veſtigio integram corporis A acquireret velocitatem: qua de re exiſteret effectum, quod virtutem cauſſæ, vel maxime ſuperaret: nam cum pares ſint velocitates, vis producta ad vim primitivam eam habet proportionem, quam habent maſſæ A + B : A. Si quis vero diceret, per gradus corpori B medio elaſtro motum communicari, tunc haberetur actio, cui nulla retro-actio reſponderet: atqui hæc omnia certiſſimis principiis repugnant: neceſſe eſt igitur, ut, in iis, quas ſupponimus circumſtantiis, maiorem elaſtrum acquirat longitudinem. Q. E. D.

Coro-

Corollarium.

Quandoquidem integra manere non poteſt proportio, quæ inter effectum cauſſamque intercedit, niſi, acquirente corpore B certum velocitatis gradum, in corpore A aliqua velocitatis portio pereat; fiet, ut ſicuti per gradus ſphæra B velocitatem adipiſcitur, ita per gradus ſphæra A velocitatem amittat. Sed cum motus communicatio medio elaſtro peragatur, hoc paullatim in maiorem longitudinem extenditur, donec utrumque corpus A, B, ipſumque elaſtrum pari velocitate procedat.

Propoſitio altera. Theorema.

Ut ultra naturalis dimenſionis limites extendatur elaſtrum, aliqua vis primitivæ portio in noſtra hypotheſi impendenda eſt.

Concipe animo, corpus A, cuius vis ſine dubio aliqua ex parte conſumitur, ut alterum corpus poſt ſe trahat, tantam velocitatis feciſſe iacturam, ut utrumque corpus pari velocitate gradiatur. Quia vero communis motus ne hilum quidem in peculiarem actionem influit, perinde eſt quod elaſtrum medium ſit inter duo corpora, quæ ſimul cum ipſo pari paſſu moveantur communi velocitate $= u$, ac ſi medium eſſet inter duo corpora omnino quieſcentia. Hoc ex theoria tranſlati motus conſequitur: nam ſi duas ſphæras in lintre ponas, quæ eadem velocitate $= u$ ad oppoſitam plagam moveatur, qui in ripa conſiſtit, inſpiciet elaſtrum, dum ſe ſe reſtituet, agere adverſus duas ſphæras quieſcentes, quarum altera motu contrario accedet ad alteram. Quapropter elaſtrum, dum ad priſtinam redit longitudinem, inertiam duorum corporum vincit, quæ tanquam quieſcentia conſiderantur, ipſiſque eiuſmodi indit velocitates, quæ ad finitarum ordinem pertinent: atqui quo pacto fieri hoc poſſit ſine vi, quam vim, niſi elaſtrum accipiat a corpore A, unde habeat non video. Aliqua igitur portio vis primitivæ in elaſtrum tranſlata eſt, quod profecto tanta vi ſeſe reſtituit, quanta fuit in eo diſtendendo conſumpta.

Corollarium.

QUum utrumque corpus ſimul cum elaſtro cietur, vis primitiva in tres partes diſtribuitur, quarum prima in corpore A conſervatur, altera communicatur corpori B, tertiam acquirit elaſtrum. Quum vero eadem eſt tribus corporibus velocitas, elaſtrum ſuperioribus manentibus circumſtantiis maximam patitur diſtenſionem: & quo maior vis in elaſtro reſidebit, tanto minor in corporibus inexiſtet.

Scholion.

DUm corpus A cum corpore B motum communicat, elaſtum maiorem diſtenſionem patietur, donec æquali velocitate utraque ſphæra gradiatur. Iam vero primum omnium aio, motuum communicationem in his circumſtantiis peragi iis legibus, quibus in ictu corporum inertium natura utitur.

Quum vero elaſtrum C maximam adeptum eſt longitudinem, tum, ut paullo ante detexi, incipit compreſſionem pati, & alterius corporis B augendo, alterius A minuendo celeritatem ita contrahitur, ut naturalem dimenſionem adipiſcatur: aio deinde in his circumſtantiis fieri communicationem ſaltem per punctum temporis ſecundum eas leges, quas adhibet natura in colliſione corporum, quæ abſoluta, atque exquiſita pollent elaſticitate.

Tum ubi elaſtrum huiuſmodi dimenſionem acquiſivit, neceſſe eſt, ut ſphæra B, quæ maiori prædita eſt velocitate, ſphæram A de loco extrudat, donec utrumque pari velocitate cieatur. In huiuſmodi circumſtantiis corpus B corporis A auget velocitatem, perinde ac ſi nullo medio exiſtente elaſtro modo corporum inertium fieret motus communicatio. Hoc evenire non poteſt, niſi elaſtrum quodammodo corrugetur, & contrahatur, uſque dum æquata duorum corporum velocitate actio, retroque actio deficiat. Nunc quoque vis primitiva inter duas ſphæras, & elaſtrum dividitur: conſtat enim non poſſe elaſtrum compreſſionem ſubire, niſi vis aliqua in hunc effectum impendatur.

Deni-

Denique cum perinde ſit, elaſtrum conſtitutum eſſe inter duo corpora, quæ eadem velocitate ad eamdem plagam moventur, ac ſi inter duo corpora quieſcentia collocaretur, & cum a vi extrinſeca compreſſionem ſubierit, oportet ſine dubio ſeſe reſtituat, atque relaxet. Hinc fiet, ut vis elaſtica ex utraque parte agens tantum detrahat de motu corporis B, quantum alterius corporis A motum auget: ita ut elaſtrum recuperata veteri longitudine AB per minimum ſaltem temporis ſpatium conquieſcat, & ſphæra A priſtina celeritate V gradiatur.

Hac porro ratione poſt varias motuum communicationes ad primas circumſtantias res redibit, & duo corpora A, B una cum elaſtro in medio inani, neque reſiſtente in infinitum iter facient: dummodo tamen extremi limites conſiderentur, in quibus elaſtrum maximam patitur aut diſtenſionem, aut compreſſionem, & ad naturalem dimenſionem regreditur. In aliquibus tamen, quæ intermediæ ſunt hypotheſes, motus communicatio fieret perinde, ac ſi duo corpora imperfecte elaſtica ad occurſum venirent. Sed hac de re nihil refert verba facere, cum uberius a nobis alio in loco fuerit explicata.

Quæ in hoc ſcholio dumtaxat propoſuimus, ea firmiſſimis demonſtrationibus confirmanda ſunt, ut & dubitatio omnis de medio tollatur, & multa ad rem noſtram conſiderentur.

Propoſitio tertia. Theorema.

Globus A ſecundum noſtram hypotheſin trahat poſt ſe globum B, & fiat motus communicatio in cymba, quæ ſecundo flumine feratur ea velocitate V, quam a principio habet corpus A, ſed ad oppoſitam plagam moveatur. Qui in cymba vehuntur, inſpiciunt motum corporis A retardari, accelerari motum corporis B, donec utrumque pari velocitate moveatur, quam voco $= u$. Verum qui in littore ſedent, vident primum ſphæram A quieſcentem, cui motus communicatur a ſphæra B prædita navigii velocitate $= - V$, donec utrumque æqualem habeat celeritatem, quam indicabit ſpecies v. Atqui nautæ actione peracta inſpiciunt duorum corporum velocitatem u, & ſedentes in

ripa

ripa velocitatem V — u, ideſt differentiam inter celeritatem cymbæ, & celeritatem communem corporum in cymba inſpectorum: igitur V — u = v, ſeu V = u + v.

Hinc conſequitur (uti enim licet eadem demonſtratione, cum ſphæram A quieſcentem trahit corpus B præditum eadem celeritate V) aut corpus A trahat corpus B, aut a corpore B trahatur, modo ut æquales ſint primitivæ velocitates, conſequitur inquam, ſi in primo caſu peracta communicatione motus oriatur communis velocitas u, in altero celeritas v, aggregatum huiuſmodi duarum celeritatum primitivæ, & conſtanti celeritati exæquari ideſt u + v = V. Quod demonſtrandum mihi propoſueram.

Corollarium primum.

SUperiores velocitates u, v habent profecto aliquam proportionem, quæ conſequitur a proportione inter maſſas A, B intercedente. Nam ſi conſtans perſeverat corpus A, & corpus B evadat inaſſignabile, velocitas u primitivam adæquat, altera velocitate v evaneſcente. Etenim nemo non videt, ſphæram A, quæ poſt ſe trahit minimam maſſam B, nihil amittere, niſi inaſſignabilem ſui motus portionem: quemadmodum, ſi ſphæra B trahere debeat corpus, ad quod infiniteſimam habet proportionem, nihil ei, niſi inaſſignabilem celeritatem, communicat. Similiter ſi globus B fiat infinitus, velocitas u evadit infiniteſima, & celeritas v æqualis primitivæ V. Denique ſi corpora A, B æqualia forent, & celeritates æquales eſſent inter ſe, ideſt u = v, & ſingulæ æquales dimidiæ primitivæ celeritatis.

Corollarium alterum.

ITem vis, quæ in elaſtro dilatando impenditur, reſpondet alicui relationi inter maſſas A, B, præſertim quum æqualis facta eſt utriuſque corporis velocitas. Nam ſi corpus A finitum, corpus B infiniteſimum ſit, perſpicuum eſt elaſtrum minimam pati diſtenſionem: contra ſi B infinitum ſit, vis integra globi A in diſtendendo elaſtro conſumitur. Quare in iis, quæ mediæ ſunt hypotheſes, ideſt cum ſphæræ finita ſe ſe reſpicunt proportione, virtus ſphæræ A in

duas

duas partes dividitur, quarum altera motus communicationem, altera elaſtri diſtenſionem producit: & quo maior, aut minor erit maſſa corporis B comparata cum maſſa corporis A, eo maior, aut minor erit vis in elaſtrum agens.

Scholion.

Quando duæ ſunt rationes, quibus motus communicatur, videlicet ex attractione, & ex percuſſione, iuvabit in præſentia alteram alteri comparare. Sume alia corpora duo (*Fig.* 3) nimirum $a = A$, $b = B$, atque effice, ut ſphæra a velocitate $= V$ impingat in ſphæram b quieſcentem, & ſi ſphæræ inertes ſint, poſt ictum communi celeritate x cieantur: deinde fac, ut ſphæra b ſphæram a immotam iciat eadem velocitate V, & poſt percuſſionem coniunctim gradiantur velocitate y.

Aio ſummam duarum velocitatum $x + y$ æqualem eſſe velocitati primitivæ V: nam canones communicationis motus, quos ipſe poſt alios demonſtravi, & communis mathematicorum ſententia comprobavit, oſtendunt eſſe $x = \frac{aV}{a+b}$, & $y = \frac{bV}{a+b}$: igitur $x + y = \frac{\overline{a+b} \cdot V}{a+b} = V$. Hinc cum demonſtratum ſit ſupra $u + v = V$, colligitur $x + y = u + v$.

Deinde ſi morem Carteſianis gerentes vires vivas motus quantitatibus æſtimemus, ipſiſque concedamus, eamdem quantitatem motus cum ante, tum poſt ictum conſervari, ita ut nulla vis vivæ pars in mortuam tranſeat, atque in contuſionem erogetur, aio, falſam eſſe, atque abſurdam prædictam æquationem $x + y = u + v$.

Etenim ſi poſtquam ſphæra A cum corpore B, quem poteſt, motum communicavit, vis omnis primitiva in ipſis omnino conſervaretur, nulla portio in diſtendendo elaſtro conſumi poſſet: ſecus enim effecti virtus virtutem cauſſæ quam maxime ſuperaret: atqui, ut probatum eſt ſupra, aliqua vis vivæ portio ab elaſtri reactione extinguitur: igitur ea, quæ reſidua eſt, expreſſa more carteſiano per $\overline{A + B} \times u$, eſt minor primitiva AV, cui cum æqualis ſit $\overline{a + b} \times x$ reſidens ab ictu in corporibus a, b, ſequitur velocitatem x ma-

maiorem eſſe velocitate u, quando æqualia ſunt A, a, & B, b.

Eadem methodo probari poteſt celeritatem y maiorem eſſe celeritate v: igitur binomium x + y maius eſt altero binomio x + v: quod perſpicuis noſtris demonſtrationibus adverſatur.

Nemo unus facile ſibi perſuadebit, minorem vis primitivæ portionem in elaſtri diſtenſione, quam in contuſione requiri: namque ab ictu minor vis vivæ quantitas in corporibus a, b, maior in ſphæris A, B poſt elaſtri diſtenſionem maneret integra. Quare eſſet u > x, & v > y, atque adeo binomium x + y deficeret a binomio u + v: quod cum allatis demonſtrationibus non cohæret.

Quæ cum ita ſint neceſſe eſt fateri, æqualem vis vivæ portionem conſumi cum in elaſtro diſtrahendo, tum in contuſione efficienda: & quocumque tandem modo ab altera ſphæra in alteram actio transferatur aut per ictum, aut per attractionem, cum motus quantitas non varietur, ab ipſa nequaquam deſumendam eſſe vis vivæ æſtimationem, quæ vis non ſolum motum ſuperſtitem producit, ſed etiam contuſionem, aut diſtenſionem elaſtri.

Ex iis, quæ dicta ſunt hactenus, ſatis conſtat, quæ leges huic communicationi moderentur, quæ attractione peragitur: nam cum ex una parte habeatur x = u, y = v, ex altera $x = \frac{aV}{a + b}$, $y = \frac{bV}{a + b}$, habebis celeritates u, v expreſſas per maſſas, & per velocitatem primitivam, & poteris ea omnia conſectaria deducere, quæ ad abſolutam rei huiuſce theoriam neceſſaria videbuntur: tametſi velles duo corpora diverſis prædita eſſe velocitatibus aut conſpirantibus, aut contrariis. Nobis autem magis arridet alia via incedere.

Propoſitio quarta. Problema.

Oportet determinare quanta vis in elaſtri diſtenſione conſumatur, & quo pacto corporis A vis primitiva æſtimanda ſit.

Ut res, quam fieri poteſt maxime, univerſe pertractetur: ſit vis viva corporis A ante omnem actionem in ratione com-

compoſita eiuſdem corporis A, & cuiuſcumque dignitatis V^n velocitatis: item quia vis, quæ peracta motus communicatione in duobus corporibus A, B conſervatur ad eam, quæ in elaſtrum transfertur, ut dictum eſt ſupra, habet proportionem, quæ conſequitur ex proportione inter maſſas A, B intercedente, concipe animo diſtributionem fieri ſecundum proportionem duarum poteſtatum indeterminatarum $A^t : B^t$.

Vis viva, quæ poſt actionem in duobus corporibus reſidua eſt, ut petit noſtra hypotheſis, exprimenda eſt per maſſas A + B multiplicatas in velocitatis u dignitatem u^n, ideſt $\overline{A + B}\,.\,u^n$: atqui $A^t : B^t :: \overline{A + B}\,.\,u^n : \frac{\overline{A+B}\,.\,B^t\,.\,u^n}{A^t}$: igitur analogiæ noviſſimus terminus exprimit vim erogatam in diſtenſionem elaſtri. Deinde duarum virium accepta ſumma, quam vis primitiva adæquat, nam inter effecta producta, & cauſſam producentem intercedit æqualitas, æquatio occurret $\overline{A + B}\,.\,u^n + \frac{\overline{A+B}\,.\,B^t\,.\,u^n}{A^t} = AV^n$, aut $\overline{A^t + B^t}\,.\,u^n = \frac{A^{t+1}\,.\,V^n}{A+B}$, & extracta radice n, u =

$$\frac{A^{\frac{t+1}{n}}\,.\,V}{\overline{A+B}^{\frac{1}{n}}\,.\,\overline{A^t+B^t}^{\frac{1}{n}}}.$$

Similiter poſt actionem corporis B, quod præditum celeritate V pertrahit corpus A, vis in duabus ſphæris inexiſtens eſt $= \overline{A + B}\,.\,v^n$: atqui $B^t : A^t :: \overline{A + B}\,.\,v^n : \frac{\overline{A+B}\,.\,A^t\,.\,v^n}{B^t}$: igitur extremus terminus ſignificat vim adverſus elaſtrum conſumptam. Quare facta æquatione inter aggregatum duarum virium, & vim primitivam BV^n, & calculo ut ſupra adhibito nanciſcemur $v = \frac{B^{\frac{t+1}{n}}\,V}{\overline{A+B}^{\frac{1}{n}}\,.\,\overline{A^t+B^t}^{\frac{1}{n}}}$: ſed ex noſtro

theoremate $u+v=V$: igitur $\dfrac{A^{\frac{t+1}{n}}V+B^{\frac{t+1}{n}}V}{\overline{A+B}^{\frac{1}{n}}\,.\,\overline{A^t+B^t}^{\frac{1}{n}}}=V$; denique

$$A^{\frac{t+1}{n}}+B^{\frac{t+1}{n}}=\overline{\overline{A+B}\,.\,\overline{A^t+B^t}}^{\frac{1}{n}}.$$

Ut rem quæſitam inveniamus, opus eſt duorum exponentium valores ita determinare, ut quæcumque tandem ſit proportio inter maſſas A, B, quæ pro lubitu immutari poteſt, extrema æquatio ne tranſverſum quidem unguem aberret a veritate. Quod hercle numquam obtinebis, niſi ſtatuas exponentem $t=1$, & exponentem $n=2$: igitur vis primitiva eſt, ut maſſa A ducta in quadratum velocitatis V^2, atque ita diſtribuitur, ut vis, quæ poſt motus communicationem in ſphæris A, B reliqua eſt, ad eam, quæ elaſtrum diſtrahit, ſit ut maſſa A ad B. Quod oportebat determinare.

Corollarium primum.

VIres vivæ eamdem proportionem habeant, quam motus quantitates, ut placet Carteſianis, ut ſit exponens $n=1$, & formula œcumenica in peculiarem reſolvatur $A^{t+1}+B^{t+1}=\overline{A+B}\,.\,\overline{A^t+B^t}$, aut $A^{t+1}+B^{t+1}=A^{t+1}+AB^t+BA^t+B^{t+1}$. Tametſi tribuas quemlibet valorem ipſi t; tamen numquam abſurdum evitabis, & ſemper totum parti æquale invenies, aut opus erit ſumere alterum ex corporibus A, B negativum, cum ultima æquatio in hanc mutetur $A^{t-1}=-B^{t-1}$. Quamobrem etiamſi vis in contuſionem erogata ſit perquam exigua, tamen ex ea diſcimus vulgarem de viribus vivis opinionem vehementer a naturæ legibus abhorrere.

Corollarium alterum.

IMmutata hypotheſi, aut eadem prorſus abſurda occurrent, aut valor maſſæ B comparatæ cum maſſa A determinandus erit: quibus in circumſtantiis dumtaxat poterit

agere

agere natura; in reliquis vero neceſſe erit, ut aut ad novas leges confugiat, aut eiuſmodi communicationem motus permittat, quæ ſibimetipſi adverſetur.

Corollarium tertium.

CErte quidem non ita uſuvenit cum ſit $t = 1$, $n = 2$, quia in qualibet maſſæ determinatione æqualitas inter duo æquationis membra manet integra: eſt enim $A + B = \overline{AA + 2AB + BB}^{\frac{1}{2}}$.

Corollarium quartum.

SI maſſæ accipiantur æquales, magis ſimplex fit æquatio; nimirum $2 . A^{\frac{t+1}{n}} = 4^{\frac{1}{n}} . A^{\frac{t+1}{n}}$, aut $2 = 4^{\frac{1}{n}}$, aut $2^n = 4$: ex qua cognoſcitur exponens n neceſſario exæquare binarium: igitur ſi facta $A = B$, vis corporis A exprimitur per productum AV^2, nullam in quibuslibet circumſtantiis patitur mutationem: vis enim viva corporis motu præditi nullo modo a corpore B pendet, cui aliquando portio aliqua communicanda eſt.

Corollarium quintum.

OB oculos tibi iterum propone formulam œcumenicam $A^{\frac{t+1}{n}} + B^{\frac{t+1}{n}} = \overline{A + B . A^t + B^t}^{\frac{1}{n}}$, & face $n = 2$ ſecundum corollarii ſuperioris determinationem, ut eam magis ſimplicem reddas. Hinc invenies. $A^{t+1} + 2 . A^{\frac{t+1}{2}} . B^{\frac{t+1}{2}} + B^{t+1} = A^{t+1} + AB^t + BA^t + B^{t+1}$, aut deletis delendis $2 . A^{\frac{t+1}{2}} . B^{\frac{t+1}{2}} = AB^t + BA^t$. Divide per AB omnes terminos $2 . A^{\frac{t-1}{2}} . B^{\frac{t-1}{2}} = B^{t-1} + A^{t-1}$, aut A^{t-1}

$-2 \, . \, A^{\frac{t-1}{2}} \, . \, B^{\frac{t-1}{2}} + B^{t-1} = 0$. Extrahe radicem ſecundam $A^{\frac{t-1}{2}} - B^{\frac{t-1}{2}} = 0$. Ex qua æquatione ad caſum peculiarem devenis $A = B$. Quare cum liceat utrumque corpus per unitatem exprimere, ſupervacaneum erit exponenti t valorem tribuere determinatum. Verum alia via in formulis ſuperioribus ſalvatur æqualitas, quin proportio inter maſſas A, B limitetur, nimirum ſi indicem t æqualem unitati conſtituas.

Scholion.

EX iis, quæ hactenus dicta, & declarata ſunt, perſpicuum cuique eſſe poteſt, leges omnes, ſi leibnitianam excipias, quibus vires vivas corporum metiri luberet, & rerum naturæ, & ſibi ipſis vehementiſſime adverſari. Etenim duo ſolum principia ſunt, quibus tamquam baſi, ac fundamento argumenta noſtra nituntur: primum videlicet, translati motus theoriam admittendam eſſe; alterum, aliquam vis primitivæ portionem in diſtenſione elaſtri conſumi: ex quibus principiis, poſtquam mathematicorum methodo pleraque confectaria derivavi, mihi videor ſole clarius videre, quemlibet canonem, qui ad vires vivas æſtimandas aſſumatur, aut alterutri, aut utrique ex illis principiis repugnare: quæ principia apprime conveniunt cum lege, quam omnium primus mathematicorum rep. reclamante ſanxit Leibnitius. Nulla igitur præter hanc hypotheſis eſt eiuſmodi, qua natura uti poſſit, quin aut aliquod occurrat abſurdum, aut phyſicum exiſtat effectum, cuius nulla ſit cauſſa, aut peculiares corporum motus a communi motu omnino turbentur.

Propoſitio quinta. Theorema.

QUotieſcumque eadem velocitas in duabus ſphæris A, B inexiſtit, maximam omnium diſtenſionem, quam in noſtris circumſtantiis pati poſſit, habet elaſtrum. Quando vero medium eſt inter duo corpora, quæ cum ipſo pari gradiuntur celeritate, omni peracta corporis A actione,

ne, & retro-actione corporis B, iam incipit agere elaſtrum ſe ſe paullatim reſtituens, donec ad naturalem longitudinem redeat. Quare & corporis B motum accelerat, & motum moratur corporis A. Aio in huiuſmodi circumſtantiis motus communicationem fieri iuxta leges corporum abſolute elaſticorum.

Sphæra $a = A$ impingat in ſphæram $b = B$; utraque autem ſphæra a, b exquiſita prædita ſit elaſticitate, ut poſt ictum ſe ſe omnino reſtituat, relaxetque. Probatum eſt unam, eamdemque vim cum in contuſione, tum in elaſtri diſtenſione conſumi, & non minus par ſphærarum a, b, quam par A, B coniunctim iter facere communi celeritate $\frac{AV}{A+B}$ ſaltem per punctum temporis, quum aut elaſtrum maximam habet diſtenſionem, aut prorſus eſt completa contuſio. Itaque prædictæ vires duæ æquales, dum reviviſcunt, eamdem virtutem exercent adverſum maſſas æquales ad eaſdem plagas progredientes eadem celeritate. Cum igitur omnia paria ſint, æqualia ſint effecta neceſſe eſt, & duarum ſphærarum A, a, item B, b æquales ſint celeritates: atqui peracta motuum communicatione corpora a, b iis gradientur velocitatibus, quas canones motus communicationis inter corpora prorſus elaſtica determinant: igitur iiſdem legibus moventur corpora A, B, poſtquam elaſtrum priſtinam longitudinem recuperavit.

Corollarium primum.

Quo tempore ita gradiuntur, vis omnis primitiva AV^2 in duobus corporibus inexiſtit: nulla enim vis agit in elaſtrum, quod neque diſtentum ſit, neque compreſſum.

Corollarium alterum.

Liquet eſſe velocitatem corporis $B = \frac{2AV}{A+B}$, & corporis $B = \frac{\overline{A-B}\cdot V}{A+B}$, quarum velocitatum ſume quadrata, & multiplica per maſſam quodque ſuam, ut habeas vim vivam corporis $B = \frac{4BA^2V^2}{\overline{A+B}^2}$, & corporis $A = \frac{\overline{A^3 - 2A^2B + AB^2}\cdot V^2}{\overline{A+B}^2}$:

quæ

quæ vires in ſummam collectæ reſtituent vim primitivam AV^2.

Scholion primum.

PRætermittam ea, quæ ex ſuperioribus propoſitionibus conſequuntur; neque perpendam, quo pacto motus ex altero corpore in alterum tranſeat, aut vires vivæ diſtribuantur, aut ex principe lege oriatur altera, vi cuius eadem motus quantitas relativa ubique perſeverat, & utriuſque ſphæræ centrum gravitatis eadem velocitate, & directione procedit. Nihil dicam de hypotheſibus magis implicitis, nimirum cum ſphæra B, dum ſe ſe elaſtro coniungit, prædita eſſet aliqua velocitate conſpirante, aut contraria velocitati corporis A. Etenim de huiuſcemodi rebus cum alias verba fecerim, legentium humanitate abuti non debeo.

Scholion alterum.

ILlud dicam unice, eam velocitatem quam habent corpora modo elaſticorum corporum gradientia, per minimum temporis ſpatium dumtaxat conſervari: nam aut ſphæra B velocius movetur, quam ſphæra A, ſi utraque eamdem habeat directionem; aut ſphæra B accedit ad corpus A, quod, ſi ſphæra A minor ſit corpore B, plerumque contingit. Ut ut res accidat, neceſſe eſt, ut elaſtrum comprimatur, qua compreſſione completa æqualem celeritatem acquirent corpora. Quare aliud erit genus motus communicationis, quod impulſu quodam peragitur, & inertium corporum leges obſervat.

Verum cum a vi externa elaſtrum compreſſum ſit, iterum reſtituatur oportet, & nativam acquirat longitudinem: igitur detrahet de velocitate corporis B, & corporis A celeritatem augebit: qua actione completa primum corpus quieſcet, alterum progredietur priſtina celeritate V.

Hoc pacto iterum res ad initium redibit, poſtquam fuerit omne communicationum genus completum. Horum omnium demonſtrationes pleno alveo fluunt ex allatis propoſitionibus.

IACO-

Fig. 1.

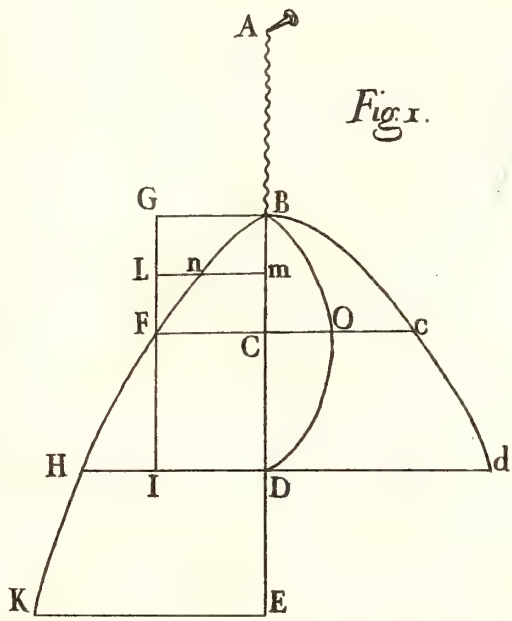
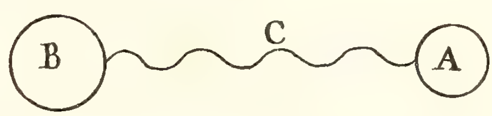


Fig. 2.



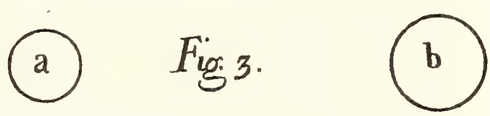


Fig. 3.

IACOBI RICCATI

PROBLEMA

Dato quacumque ratione radio oſculi per curvam deſcribendam curvam deſcribere.

QUum iamdiu in tomo undecimo diarii lit. italiæ pag. 204 meam ſolutionem problematis inverſi radiorum oſculantium edendam curavi; nihil mihi aliud propoſueram, niſi viam illis ſternere, qui in calculi infiniteſimorum doctrina non multum verſati erant, ut deinceps ſolvendis difficillimis quæſtionibus vel ad puram, vel ad mixtam matheſim pertinentibus pares eſſent. Quare conſtitui mecum ipſe eo tempore, nullum aliud problema attingere præter illud, quod maxime & ſimplex eſſet, & uſui accommodatum, in quo ſcilicet valor ſemidiametri oſculatoriæ datus ſupponitur quacumque ratione per alterutram ex coordinatis. Sed quoniam ſæpe uſuvenit, ut radii oſculantis functio detur per tangentes, normales, rectaſque alias analogas; interdum etiam per curvam ipſam, quæ deſcribenda eſt; placet in præſens veteri opuſculo novum addere, ut nihil rei, qua de agimus, deeſſe videatur.

Problema primum.

INtelligatur deſcripta (*Fig.* 1) curva ACE, quæ referatur ad axem AB, & cuius radius oſculans datus ſit quocumque modo per arcum AC. Voco de more abſciſſam AB $=$ x, applicatam BC $=$ y, & curvam AC $=$ s; atque adeo tria elementa CF, FE, CE erunt dx, dy, ds. Præterea ſit radius EG $=$ r datus per AC, ideſt per s, tangens HC $=$ t, ſubtangens HB $=$ p.

Notum eſt formulam exprimentem valorem radii oſculatoris, ſi ds ponatur conſtans, fore $\frac{dxds}{ddy} = r$. Hæc ut ea me-

methodo tractetur, qua in altero opuſculo uſus ſum, pono mihi ob oculos æquationem $\frac{yds}{dy} = t$, cuius differentias accipio ſupponens ds conſtans, & invenio $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$, ſive $\frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds} = ddy$, ſive $dy^2 ds - dy^2 dt = \frac{ydxds^2}{r}$.

Quoniam vero curvæ ſubtangens $= p = \frac{ydx}{dy}$, erit $\frac{pdy}{y} = dx$. Si hunc valorem dx ſubſtituas in formula ſuperiori, quæ princeps eſt, nanciſceris $dyds - dydt = \frac{pds^2}{r}$: in qua ſi pro ds, ut opus eſt, ponas eius valorem $\frac{tdy}{y}$, obtinebis $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$. Alterum æquationis membrum, nimirum $\frac{ds}{r}$ ſemper poteſt ſaltem traſcendenter obtineri, quia ex noſtra hypotheſi r nihil eſt aliud, quam curvæ s functio quæcumque.

In primo autem membro $\frac{tdy - ydt}{tp}$, ſi pro p eius valorem ſubſtituas, nempe $\sqrt{tt - yy}$, orietur $\frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}$, ex quo nullo negotio commixtionem variabilium de medio tolles, ſi facias $q = \frac{y}{t}$; peractis enim neceſſariis operationibus utraque variabilis y, t evaneſcet, & maxime ſimplex orietur æquatio $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}} = \frac{ds}{r}$.

Præterea ſi ex formula $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$, adhibita æquatione $pp + yy = tt$, eiiciam ſpeciem t retenta p, inveniam $\frac{pdy - ydp}{pp + yy} = \frac{ds}{r}$. Pono $\frac{y}{p} = z$, & invenio formulam a variabilium immixtione liberatam, nempe $\frac{dz}{1 + zz} = \frac{ds}{r}$.

Ex his facile colligere licet, valorem non minus curvæ s, quam radii r, & ſummatoriæ $S \frac{ds}{r}$ dari aut analytice, aut traſcendenter per z, atque adeo æquationem ita diſpoſitam $\frac{rdz}{1 + zz} = ds$ habere variabiles ſeparatas. Quod dicendum eſt etiam de altera æquatione $\frac{rdq}{\sqrt{1 + qq}} = ds$.

Iam

Iam vero quum ſit $ds = \frac{tdy}{y}$, & $\frac{y}{t} = q$, fiet $\frac{dy}{q} = \frac{rdq}{\sqrt{1-qq}}$, ſive $dy = \frac{rqdq}{\sqrt{1-qq}}$. Si quis autem uti malit formula $z = \frac{y}{p}$, facto aliquo analyſeos circuitu, deteget $ds = \frac{\sqrt{pp+yy} \cdot dy}{y} = \frac{\sqrt{1+zz} \cdot dy}{z} = \frac{rdz}{1+zz}$. Demum $dy = \frac{rzdz}{1+zz \cdot \sqrt{1+zz}}$.

Pervenimus ad novas æquationes duas liberas a permixtione indeterminatarum, in quibus ordinatæ elementum dy datum cognoſcitur per functiones arcus s; tres enim ſpecies q, z, r relatæ ad curvam s totidem æquationes efficiunt, quæ ad locos cognitos pertinent. Itaque terminos contrahentes, æquationes, quas invenimus, in hanc maxime ſimplicem formam exponamus $dy = \omega ds$, ſive in æquivalentem $udy = ds$: namque ſi ordinata y data eſt per functionem Suds, conſequitur etiam curvam s dari per applicatæ functionem, videlicet Sudy, quum u per y inventa fuerit.

Quando eſt $udy = ds$, erit $u^2dy^2 = ds^2 = dx^2 + ds^2$: igitur $dy\sqrt{uu-1} = dx$. Aequatio hæc œcumenica omnes curvas amplectitur, quæ problemati propoſito ſatisfaciunt.

Animadvertere oportet duas quantitates differentiales $\frac{dq}{\sqrt{1-qq}}$, $\frac{dz}{1+zz}$ exhibere elementum arcus circularis, aut per ſinum, aut per tangentem. Quare ſi elementum ds fuerit algebraice integrabile, rectificatio quæſitarum curvarum, atque adeo valor ſemidiametri oſculantis a tetragoniſmo circuli dependebit: qui tetragoniſmus quoque locum habebit, quoties integralis $S\frac{ds}{r}$ ad logarithmos pertinebit, aut ad altioris ordinis quadraturam. Verum ſi $S\frac{ds}{r}$ convenit cum formula propria arcus circularis, tum non minus curvæ menſura, quam radii valor eſſe poterit algebraicus. Qua in hypotheſi, perſpicuum eſt, quantitates omnes s, r, q, z ſe ſe per algebraicam proportionem reſpicere: quantitati autem u idem convenire, non eſt difficile demonſtratu.

Quoniam s, & r in noſtra hypotheſi dantur algebrai-

ce ex. ca. per z, & z per $\frac{y}{p}$, per ordinatam ſcilicet, & ſubtangentem, & $p = \frac{ydx}{dy}$, facile colligitur fore $dx = \frac{pdy}{y}$. Qui valor ſi ſubſtituatur in curvæ æquatione œcumenica $dx = dy\sqrt{uu - 1}$, fiet $\frac{p}{y} = \frac{1}{z} = \sqrt{uu - 1}$: ex qua formula eruitur, dari u algebraice per z, atque adeo per s. Hoc idem valere ſemper de applicata y nequaquam dixerim; nam curvarum noſtrarum rectificatio per coordinatas nequaquam obtinetur, niſi quum in æquatione $dy = \omega ds$ omnia algebraicam integrationem recipiunt.

Ad exemplum ſit s quacumque ratione algebraice data per z; & quoniam $ds = \frac{tdy}{y}$, & $\frac{t}{y} = \frac{\sqrt{1 + zz}}{z}$, erit $dy = \frac{zds}{\sqrt{1 + zz}}$. Ponatur $s = z$, qua in hypotheſi oſculator radius $r = 1 + ss$, & æquatio œcumenica hanc formam accipiet $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1 + zz}}$. Fiat integratio, omiſſa conſtantis additione, & orietur $y = \sqrt{1 + zz}$, ſive $\sqrt{yy - 1} = z = s$, & $r = yy$. Aequatio itaque curvæ ad coordinatas relata erit $\frac{dy}{\sqrt{yy - 1}} = dx$, cuius conſtructio peragitur per hyperbolæ quadraturam.

Sit præterea $ds = z^{n-1} dz$, aut $s = \frac{z^n}{n}$, & $dy = \frac{z^n dz}{\sqrt{1 + zz}}$. Quæ æquatio algebraicam integrationem recipiet, ſi exponens n ſit numerus integer, & impar; ſi vero par eſſet, integratio nulla alia ratione haberetur, quam per logarithmos, aut hyperbolicam quadraturam. In ceteris caſibus, ubi index n aut negativus eſt, aut fractus, ſcriptores illi legantur, qui dedita opera de huiuſmodi formulis verba fecerunt.

Nihilo tamen minus huiuſmodi animadverſiones ſupervacaneas non exiſtimo; patefaciunt enim, radii oſculatoris expreſſionem a curvæ functione ſæpenumero ad functionem ordinatæ transferri.

Con-

Conſtructio.

Indeterminata AB (*Fig.* 2), quæ vocetur $= s$, repræhe-ſentet arcus variabiles curvæ quæſitæ. Quando autem ex principibus æquationibus una erat $dy = \omega ds$, in qua ω dari per s demonſtratum eſt, conſtituatur ordinata $BC = \omega$, & intelligatur deſcripta curva AC. Palam eſt ſpatium curvilineum $CAB = S\omega ds = y$, nimirum æquale coordinatæ curvæ conſtruendæ.

Ab æquatione $dy = \omega ds$ tranſitus fiat ad analogiam $\omega : 1 :: dy : ds$; ſed ſtatuimus $ds = udy$: igitur, ω, 1, u erunt in continua proportione geometrica; qua de re ſi fiat, ut BC ad unitatem, ita unitas ad u, quantitas u invenietur. Hinc nova deſcribatur curva AF, cuius abſciſſa AE æquet ſpatium curvilineum $ACB = y$, & applicata $EF = \sqrt{uu - 1}$; atque adeo area $AFE = Sdy . \sqrt{uu - 1} = x$. Quapropter coordinatæ curvæ, quam quærimus, exprimuntur altera per x, ſeu per ſpatium FAE, altera per y, ſeu per ſpatium ACB.

Nihil reliquum eſt, niſi ut curva AC geometrice determinetur, quod faciendum eſt ope æquationis $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}$. Verum ne negligam elegantiam, hac utor præparatione.

Radio IH (*Fig.* 3) deſcribo circulum HRK, & ex diametri extremo puncto H, erigo normalem HVX, quæ cum ſit tangens, erit ſecundum ſpecies aſſumptas $= z$. Hinc ad integrationem tranſiens invenio $S \frac{ds}{r} = S \frac{dz}{1 + zz} =$ arcui circulari HR. Verum hic arcus variis modis exprimi poteſt: nam poſita abſciſſa $HP = q$, & applicata $PR = \sqrt{2q - qq}$, invenitur curvæ elementum $TR = \frac{dq}{\sqrt{2q - qq}}$: igitur $S \frac{ds}{r} =$

$$S \frac{dq}{\sqrt{2q - qq}} = HR.$$ Quare per fluxionem eiuſdem arcus, ſive abſciſſæ $HP = q$, generatim data erit curva s, quæ exprimi poterit per applicatam PM curvæ cognitæ HMN. Iam vero in memoriam revocemus alteram æquationem, nimi-

rum $dy = \omega ds = \frac{zzdz}{1+zz \, . \, \sqrt{1+zz}}$, & quum ſit $\frac{zdz}{1+zz} = ds$, orietur $\omega ds \, \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$, ſive $\omega = \frac{z}{\sqrt{1+zz}}$. Quando autem IR $=$ $1 : RP = \sqrt{2q - qq} :: IV = \sqrt{1+zz} : VH = z$, eſt $\frac{z}{\sqrt{1+zz}}$ $= \sqrt{2q - qq}$. Igitur $\omega = \sqrt{2q - qq} = RP$. Hiſce ſtatutis tertiam figuram cum altera comparantes facile colligemus, rectas PM, PR fore coordinatas reſpondentes curvæ AC, ideſt PM $=$ abſciſſæ $AB = s$, & PR $=$ ordinatæ $BC = u$. Quod unice erat inveſtigandum.

Omiſimus in generali conſtructione conſtantium additionem: hoc enim in ſingulis caſibus geometris determinandum relinquimus.

Solutio altera.

FOrmula radii oſculantis per ſecundas differentias expreſſa erat $\frac{ds}{r} = \frac{ddy}{dx}$, in qua tamquam conſtans aſſumptum fuerat curvæ conſtruendæ elementum ds. Quod ſi formula uti velimus, in qua conſtantes locum nullum habeant, ea erit huiuſmodi $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dsdx}$. Ut ſecundis fluxionibus liberemur, diſponatur altera æquationis pars in hunc modum $\frac{dy}{dx} \, . \, \overline{\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}}$. Quantitates $\frac{ddy}{dy}$, $\frac{dds}{ds}$ integrari per logarithmos poſſunt, earumque ſummatoria erit $ldy - lds$, quæ fiat $= lp$, ut oriantur æquationes duæ, $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, & $\frac{dy}{ds} = p$. Itaque habebimus $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \, . \, \frac{dp}{p}$. Atqui $p = \frac{dy}{ds}$, & $\frac{dy^2}{p^2} = ds^2 = dx^2 + dy^2$: igitur $dx =$ $\frac{dy \, . \, \sqrt{1-pp}}{p}$. Quo valore rite ſubſtituto naſcetur $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, in qua æquatione quum ſint variabiles ſeparatæ, methodus ſuperioris ſolutionis in uſum vocetur.

In formula $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dsdx}$ aſſumatur tamquam conſtans ds, & ponatur $dy = pds$; peractis neceſſariis operatio-

tionibus, ſe ſe iterum nobis offeret æquatio $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$.

Accipe deinde tamquam conſtantem dy, & utere formula $\frac{ds}{r} = \frac{-dydds}{dsdx}$. Pone $ds = qdy$, ſive $ddy = dydq$, & invenies $\frac{ds}{r} = \frac{-dy^2 dq}{dxds}$, & peractis neceſſariis ſubſtitutionibus ad expellendum productum dxds, deteges $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$.

Poſtremo accipiatur alia formula radiorum oſculantium, nimirum $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$, ſive $\frac{ds}{r} = \frac{-dxddy}{ds^2}$, in qua tamquam conſtans conſideratur abſciſſæ elementum dx. Sit $z = \frac{dx}{dy}$, & $dz = \frac{-dxddy}{dy^2}$; quare erit $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2 dz}{ds^2}$: atqui ex hypotheſi $dx = zdy$: igitur $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 . \overline{1+zz}$: quo valore pro ds^2 ſubſtituto nanciſcemur $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$.

Quocumque utamur analyſeos circuitu, ſemper accidet, neque ſecus accidere potet, ut integralis S $\frac{ds}{r}$ ſemper referatur ad menſuram arcuum circularium, quorum differentia aut per ſinus, aut per ſecantes, aut per tangentes exprimitur.

Solutio tertia.

AB analyticis ſolutionibus ad geometricam gradum facio, quæ ſtatim quæſtionem ſolvit, quin egeamus illis formulis, quæ ingenioſiſſime a geometris detectæ ſunt. In quæſita curva (*Fig.* 4), quam deſcriptam ſuppono, accipio partes duas infiniteſimas, & æquales AC, CI, & duco ſecantes duas infinite proximas LAC, KCI. CG, IG normales cordis AC, CI ſe ſe ſecant in puncto G, & per hanc ſectionem determinant radium oſculatorem CG datum, ut ſupponitur, per curvæ functionem. Ductis ex punctis C, I ordinatis CB, ID, ductaque infiniteſima CF axi HD parallela, factoque centro in C minimo intervallo CI deſcribo arcum infiniteſimum IE, & ſemidiametro CN, quæ æquet quam-

quamlibet conſtantem deſcribo arcum circuli NLK, cuius elementum LK inter duas ſecantes CAL, ICK iacebit.

Collige ex facta præparatione, ſimiles eſſe ſectores duos CGI, KCL; uterque enim ſimilis eſt ſectori infiniteſimo ICE: igitur ſi ſemidiameter CN conſtituatur æqualis unitati, fiet $\frac{CI}{CG} = LK$: atqui CG datus ſupponitur per curvam cCI: igitur tam curva ipſa, quam radius oſculans datus erit per arcum NL, ſive, ſuppoſita circumferentiæ, eiuſque partium rectificatione, per ſinum LM, aut per CM. Similiter CI curvæ fluxio data erit per quantitatem differentialem arcus LN, aut reſpondentium ſinuum LM, CM. Quum autem ſimilia ſint triangula LMC, CFE, aut CFI, quemadmodum primi trianguli latera notam proportionem habent; ita tres lineæ infiniteſimæ alterum triangulum conſtituentes in eadem proportione erunt: qua de re inventum eſt, quidquid ad deſcribendam inventam curvam erat neceſſarium.

Hic advertendum eſſe videtur, quod tametſi circuli CNL poſitio mutatur, eiuſque centrum C omnibus curvæ cAI punctis ſucceſſive applicatur; ſolutio tamen omni caret paralogiſmi ſuſpicione. Nam præterquamquod radius CN ſemper eſt conſtans, in quacumque poſitione punctum N ſemper eſt unum, atque idem, in eoque originem habent omnes arcus NL creſcentes, aut decreſcentes conſtanti arcu, ſi ita videtur, addito, vel ſubducto, ut nova origo in aliud peripheriæ punctum transferatur, ſed ſemper æquediſtans a puncto N.

Concipio, ordinatam CB motu ſibi ipſi parallelo cieri, eiuſque extremum punctum C radere curvam CAc, & ſimul cum ipſa transferri circulum CNL. Poſtquam ordinata poſitionem ex.ca.cb acquiſiverit, accedet quidem ut ſecantes cl, ck ſecent arcum nl in punctis l, k diverſis omnino a punctis L, K; ut arcus nl, NL minime ſint inter ſe æquales: verum punctum c erit ſemper centrum circuli deſcripti ſemidiametro cn = CN, & punctum n idem omnino, ac punctum N. Quare arcus creſcentes nl, NL ex eadem origine progredientur.

Con-

Conſtructio.

Ratiocinii ſeries nos ad conſtructionem perducit, quæ longe multumque a primæ ſolutionis differt conſtructione. Nam curva quæſita, radius oſculator, arcus NL, ſinus duo LM, MC eiuſmodi ſunt quantitates, ut altera detur per alteram: primæ duæ ex ſuppoſitione, aliæ ex præparatione præmiſſa, factoque ratiocinio. Iam vero producatur, ſi opus eſt ordinata CB, & in eam ex puncto G demittatur perpendicularis GP: orientur huiuſmodi analogiæ CL : LM : : GC : CP : : IC : CF: atqui quum elementum curvæ CI exprimatur per productum ſemidiametri oſculantis GC in fluxionem circularem LK, erit CI = CG . LK: igitur CL : LM : : GC : CP : : GC . LK : CF. Prima ex hiſce analogiis manifeſtat co-radium CP dari per arcus NL functionem, altera æqualitatem demonſtrat inter CP . LK = CF.

Simili ratione progredientes inveniemus analogias CL : CM : : CG : GP : : CI : IF, ſive : : GC . LK : IF: ex quibus perſpicuum eſt, co-radium GP notum eſſe per functionem arcus NL, & hanc æquationem valere GP . LK = FI. Patefacti igitur ſunt valores duarum differentiarum CF, FI, quarum ſumma exhibet coordinatas curvæ quæſitæ relatæ ad axem HB.

In rectam lineam extendatur arcus NLK, in qua (*Fig.* 4, 5) aſſumatur punctum n analogum puncto N: accipiantur abſciſſæ nl, nk æquales arcubus creſcentibus NL, NK, ductiſque in ordinatarum formam normalibus lp, lq, fiat prima æqualis co-radio CP, altera æqualis co-radio GP. Per puncta p, q, & alia infinita ſimili ratione determinata deſcribantur curvæ rp, sq: cuique patens eſt, ſpatii elementum plk, cuius ſummatoria eſt area mixtilinea lnrp, æquale eſſe rectangulo CP . KL, atque adeo, ex demonſtratis, CF, quæ eſt differentia abſciſſæ pertinentis ad curvam quæſitam cAI. Quare facto ad integrationem tranſitu per aream lnrp curvæ quæſitæ abſciſſa determinabitur.

Similiter area differentialis qlk = GP . LK = FI: quare facta integratione ſpatium curvilineum lnsq æquabit ordinatam BC curvæ quæſitæ, quæ eſt integralis fluxionis FI.

Qua-

Quapropter ſi per unitatem dividantur ſpatia lnrp, lnsq, expriment primum abſciſſam, alterum ordinatam curvæ, quam quærebamus. Q. E. I.

Problema alterum.

SI datus concipiatur per curvam quacumque ratione (*Fig.* 4) co-radius CP, quem vocabo $= u$, nullo negotio quæſtioni ſatisfiet, ſi quæ dicta ſunt opportune in auxilium vocentur. Eligo quamlibet ex tribus formulis ſolutionis ſecundæ, cauſſa exempli $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$: ſed eſt $GC = r : CP = u :: CI = ds : CF = dx$: ergo $\frac{uds}{dx} = r$, atque adeo $\frac{ds}{u} = \frac{-dqds}{qdx \cdot \sqrt{qq-1}}$: ſed ex hypotheſi $ds = qdy$, & $dx = dy\sqrt{qq-1}$: igitur completis ſubſtitutionibus $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$.

Eadem methodo dato per curvam altero co-radio GP, quem voco $= z$ æquationem nanciſcemur $\frac{ds}{z} = \frac{-dq}{\sqrt{qq-1}}$. Hinc quemadmodum integralis $S\frac{ds}{r}$ æqualis eſt expreſſioni arcus circularis; ita colligas velim, ſummatorias $S\frac{ds}{u}$, $S\frac{ds}{z}$ inveniri per quantitates, quæ pertinent ad hyperbolæ quadraturam, ſive ad logarithmos.

In præpoſitis quæſtionibus quandoquidem radius oſculi, & utraque ſuboſculatrix datur ſolum per curvam, nullo modo per coordinatas, æquali iure licet curvam deſcribendam vel ad axem, vel ad focum referre. Primam rationem ſequutus ſum, quippe quæ maiori ſimplicitate ornata videtur.

Appendix.

QUoniam de formulis differentialibus ſecundi ordinis ſermo incidit: placet addere methodum, quæ iamdiu mihi occurrit, & qua nullam puto latius patere. Nam omnia fluxionum genera amplectitur, in eiſque infinitos caſus abſolvit, qui tamen certis limitibus continentur, &

quaſ-

quaſdam conditiones poſtulant, quas paucis dabo operam ut exponam. Nulla iam ingeniis hominum ſpes reliqua eſt ita perficiendi, atque abſolvendi calculum integralem, ut ſub uno dumtaxat canone quotquot excogitari poſſunt formulæ contineantur.

Aio itaque, omnes æquationes differentiales ſecundi gradus, in quibus vel primum elementum tamquam conſtans aſſumptum ſit, vel ſecus, ſi altera ex variabilibus finitis, eiuſque functiones abſint, ſemper in æquationem differentialem primi gradus converti poſſe. Quæ ſoluta ſunt problemata multa huiuſce canonis exempla præbuerunt. Generatim ita faciendum eſt, ut ſequens exemplum oſtendet.

Si dy conſtans ſit, formula radii oſculantis eſt huiuſmodi $\frac{-dxds^2}{dydds}=r$. Si radium r dari velis per quancumque poteſtatem tangentis $t=\frac{yds}{dy}$: erit itaque $t^m=\frac{y^m ds^m}{dy^m}=r$; atque adeo $\frac{-dxds^2}{dydds}=\frac{y^m ds^m}{dy^m}$. Primo omnium apparet, expoſitam formulam in noſtro canone contineri: nam licet locum habeat ordinata y elevata ad poteſtatem indeterminatam m; tamen neque x, neque ulla eius functio in æquationem ingreditur. Quoniam aſſumpta eſt tamquam conſtans dy, ut ſecunda differentia dds evaneſcat, fiat $qdy=ds$, ſumptiſque differentiis $dqdy=dds$, & peracta ſubſtitutione erit $\frac{-dxds^2}{dqdy^2}=\frac{y^m ds^m}{dy^m}$, aut $\frac{-dx}{dq}=\frac{y^m ds^{m-2}}{dy^{m-2}}$. Pro ds^{m-2} collocetur eius valor $q^{m-2}dy^{m-2}$, & pro dx eius valor $dy.\sqrt{qq-1}$, & orietur æquatio $\frac{-dy\sqrt{qq-1}}{dq}=\frac{y^m.q^{m-2}.dy^{m-2}}{dy^{m-2}}$, quæ, ſi fiat ſimplicior, hanc formam accipiet $\frac{-dy}{y^m}=\frac{q^{m-2}dq}{\sqrt{qq-1}}$. Itaque tam applicata y curvæ conſtruendæ data eſt per q, quam q per y; ſed $dx=dy\sqrt{qq-1}$: igitur integrando abſciſſa x fit nota per ordinatam y. Q. E. I.

In peculiari quodam caſu ſit $m=3$, & radius oſcu-

lans proportionalis cubo tangentis; formula œcumenica $\frac{-dy}{y^m} = \frac{q^{m-2}dq}{\sqrt{qq-1}}$ in hanc mutatur $\frac{-dy}{y^3} = \frac{qdq}{\sqrt{qq-1}}$, & facta integratione $\frac{1}{2y^2} = \sqrt{qq-1}$. Nullam addo conſtantem, quia per hanc additionem natura curvæ nihil mutatur. Quum vero ſit $dx = dy\sqrt{qq-1}$, ſubſtituto pro $\sqrt{qq-1}$ eius valore $\frac{1}{2y^2}$ fiet $dx = \frac{dy}{2y^2}$, & integratione facta $x = c - \frac{1}{2y}$, ſive $2xy = 2cy - 1$: qui locus eſt ad hyperbolam intra aſſymptotos, cuius propterea elegans proprietas nobis proponitur.

Satis conſtare puto, in æquationibus differentialibus ſecundi gradus, in quibus non adeſt alterutra ex indeterminatis x, y, exſiſtere tutam methodum, qua ad primas differentias perducimur. Idem evenire aio æquationibus differentialibus tertii gradus, ſi utraque ex variabilibus finitis ab æquatione abſit.

Ecce tibi propoſitum exemplum. Sit $dxdddy + dx^2ddy = dx^4 + dy^4$, in qua aſſumptum eſt tamquam conſtans elementum dx. Pono $pdx = dy$: igitur $dpdx = ddy$, & $dxddp = dddy$. Factis neceſſariis ſubſtitutionibus nanciſcemur $dx^2ddp + dx^3dp = dx^4 + dy^4$: ſed $dy^4 = p^4dx^4$: ergo $dx^2ddp + dx^3dp = dx^4 + p^4dx^4$, & facta diviſione per dx^2, $ddp + dxdp = dx^2 + p^4dx^2$. Pervenimus iam ad æquationem differentialem ſecundi gradus, quam ſancitus canon amplectitur. Itaque progrediens ſtatuo $qdx = dp$, & differentiis acceptis in hypotheſi dx conſtantis $dqdx = ddp$, & facta ſubſtitutione erit

$dqdx + qdx^2 = dx^2 . \overline{1 + p^4}$, ſive

$dq + qdx = dx . \overline{1 + p^4}$: ſed $dx = \frac{dp}{q}$: ergo $dp + dq = \frac{dp}{q} . \overline{1 + p^4}$. Sæpe accidit, ut variabiles æquationem conſtituentes adeo ſint permixtæ, atque confuſæ, ut nulla ratione poſſint ſeparari. Verum hoc nihil detrahit methodo, quam exponimus, ſed vitio tribuendum eſt theoriæ primarum differentiarum, quæ præſertim quoad incognitarum ſeparationem multum abeſt a perfectione.

Pro-

Progrediens aio, a formulis differentialibus gradus quarti, ut ad primum redigantur oportere, non ſolum abeſſe utramque ex indeterminatis x, y, ſed etiam alterutram ex primis fluxionibus dx, dy, earumque functionibus. Ab æquationibus quinti gradus abeſſe debent præter finitas ambæ fluxiones primæ; in æquationibus ſexti gradus præter has etiam alterutra ex fluxionibus ſecundis ddx, ddy, & utraque in æquationibus ſexti gradus: atque ita deinceps in infinitum.

Quarti gradus exemplum propono. Sit
$d^4y + dxd^3y - dx^2ddy = 0$, conſtans autem accepta ſit dx Fiat de more $pdx = dy$, atque adeo $dpdx = ddy$, $dxddp = d^3y$, $dxd^3p = d^4y$. Itaque factis ſubſtitutionibus $dxd^3p + dx^2ddp - dx^3dp = 0$, ſive $d^3p + dxddp - dx^2dp = 0$. Aequatio hæc tertii gradus omni finita variabili caret. Utamur igitur explicata methodo, & poſt plures operationes poſitis $qdx = dp$, $zdx = dq$, obtinebimus formulam $zdz + zdq = qdq$, in qua ex notis methodis variabiles ſeparantur.

Facile eſt intellectu, cur conditiones illæ requirantur, ſine quibus diximus canonem non valere. Nam poſtquam eiectis differentiis ſecundis, tertiis ec. ad primas differentias nos methodus noſtra perduxerit, niſi adſint conditiones expoſitæ, æquatio, quæ naſcetur, non ſolum primas incognitas x, y, ſed etiam aſſumptas p, q &c. continebit. Quod ubi acciderit, nulla nos methodus docere generatim poteſt, quomodo aut ſeparentur, aut ad integrationem perducantur. Multa quidem in hiſce caſibus adſunt adiumenta, quibus ſolent analyſtæ uti, aliquando cum fructu; ſæpe autem eorum induſtriam rei difficultas fruſtratur.

Fig. 1.

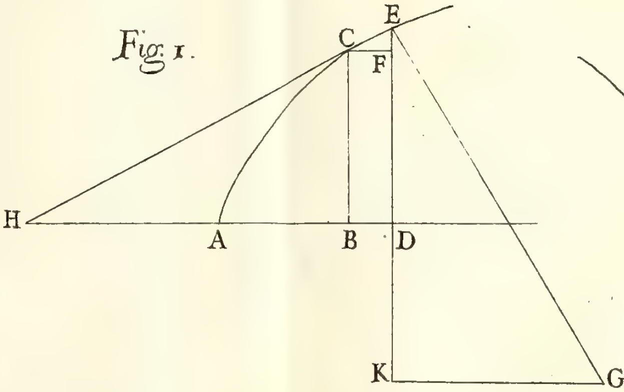


Fig. 2.

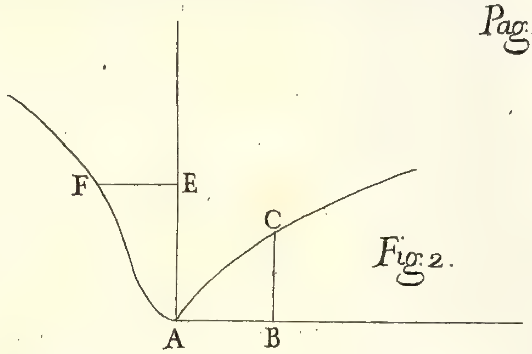


Fig. 3.

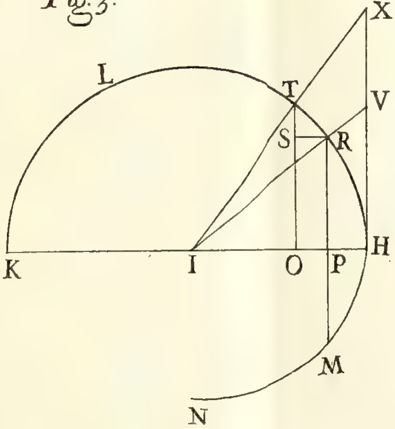


Fig. 4.

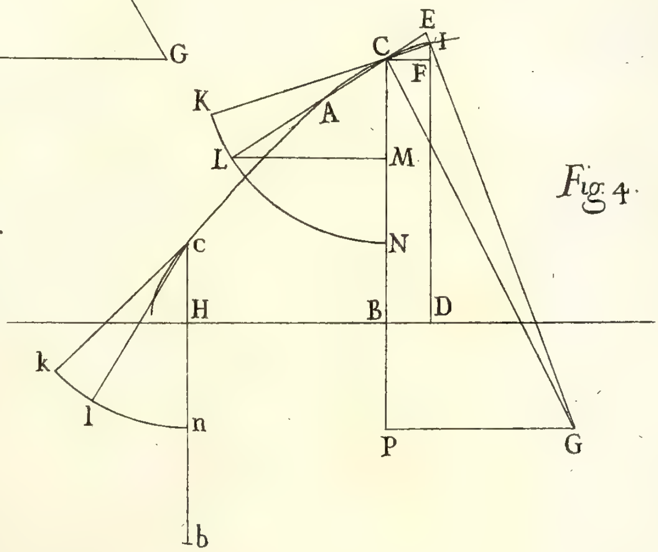
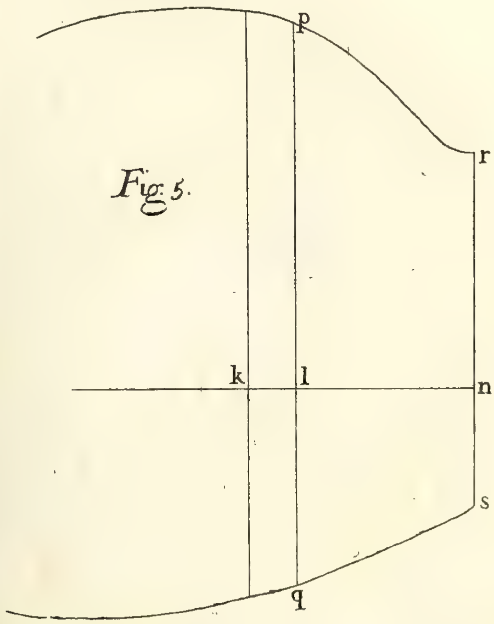


Fig. 5.



VINCENTII RICCATI

Animadverſiones in fractionem, cuius numerator, & denominator per certam determinationem nihilo æquales fiunt.

IOannes Huddenius geometra in primis acutus in epiſtola de reductione æquationum ratus eſt, valorem fractionis, cuius numerator, & denominator per certam determinationem nihilo æquales fiunt, inveniri nulla ratione poſſe. Sed poſt editam epiſtolam, dum eam iterum revocaret ad trutinam, correxit ſe ſe aliquantum emiſſa ſchedula, & id verum eſſe dixit, ubi utraque quantitas denominator ſcilicet, & numerator per eamdem quantitatem non ſit diviſibilis. Verum fruſtra fit huiuſmodi limitatio, quemadmodum in notis in geom. Carteſii advertit Iacobus Bernoullius deinceps ſæpe laudandus. Nam ſi fractio rationalis eſt, numeratorem, ac denominatorem habet per eamdem quantitatem ſemper diviſibiles; ſi irrationalis valorem habet certum, ac definitum, neque multo labore determinabilem. Quæ hac de re ſcripta hactenus ſunt in præſens examinare decrevi: quod non feciſſem ſane, niſi me dubitationes doctiſſimi geometræ compuliſſent.

Si fractio data rationalis ſit, quæ efformetur ex x, & conſtantibus, & fiat $= \frac{0}{0}$ per determinationem $x = a$, quæ quamlibet conſtantem deſignat: dividatur cum numerator, tum denominator per $x - a$; quod toties fiat, donec poſita pro x conſtanti a aut uterque, aut alteruter valorem habeat definitum, quem ubi inveneris iam nulla de vero fractionis valore eſſe poteſt dubitatio.

Nam ſi tum numeratoris, tum denominatoris valor finitus eſt, fractionis valor finitus erit: ſi denominatore valorem finitum habente numerator $= o$, fractio quoque $= o$: ſi vero numeratoris valor finitus ſit, denominatoris $= o$, fractio valorem obtinebit infinitum.

Ad

Ad exemplum aſſumo huiuſmodi fractionem.

$$\frac{y}{a} = \frac{x^4 + ax^3 - 9a^2x^2 + 11a^3x - 4a^4}{x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4}.$$ Numerator, & denominator dividatur per $x - a$, & proveniet

$$\frac{y}{a} = \frac{x^3 + 2ax^2 - 7a^2x + 4a^3}{x^3 - 3a^2x + 2a^3};$$ in qua item ſi ponatur $x = a$, numerator, & denominator fiunt $= 0$, qua de re dividantur iterum per $x - a$, & orietur

$$\frac{y}{a} = \frac{x^2 + 3ax - 4a^2}{x^2 + ax - 2a^2};$$ in qua pariter omnia evaneſcunt ſi $x = a$; iteranda itaque eſt diviſio, & invenietur formula

$$\frac{y}{a} = \frac{x + 4a}{x + 2a};$$ in qua ſi fiat $x = a$, habebimus

$$\frac{y}{a} = \frac{5a}{3a} = \frac{5}{3}.$$ Q. E. I. Longo circuitu analyſim proſequutus ſum, ut methodus patefieret: ceterum ſatius fuiſſet in hoc exemplo diviſionem inſtituere per $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$; unica enim operatione valorem fractionis inveniſſemus.

Quamquam hæc methodus plerumque deficit, ſi fractio abundet irrationalibus; tamen ſæpenumero non mediocri cum fructu in uſum traducitur. Ita in exemplo propoſito a Ioanne Bernoullio in actis Lipſ. 1704 ſit

$$y = \frac{-xx + a\sqrt{ax}}{a - \sqrt{ax}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\frac{-x^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}}{-x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}}.$$ Numerator huius fractionis per denominatorem dividatur, & erit

$$y = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{x + a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + a}.$$ Itaque ſi fiat $x = a$, erit

$y = 3a$, prorſus ut invenit Bernoullius, qui ut poſſit dividere per $x - a$ longo calculo tollit aſſimetriam: nimirum multiplicat denominatorem per y; tum opportunis calculi auxiliis radicalia eliminat; deinde ad unam partem omnibus

bus terminis translatis inſtituit diviſionem per $x - a$; poſtremo invenit omnes valores y, inter quos, qui quæritur, nullo negotio cognoſcitur.

Verum, fatendum eſt enim, expoſita methodus vel prorſus inutilis eſt, vel maxime difficilis, ubi ſignorum radicalium magna eſt complicatio. Quare ad aliam methodum confugiendum eſt, quam ſuppeditabit infinite parvorum theoria. Ut eius methodi, quam expoſiturus ſum, fundamentum aperiam, pone numeratorem fractionis $= z$, denominatorem $= u$. Tum ſuper communi axe, in quo accipiantur abſciſſæ $= x$, conſtructæ intelligantur duæ curvæ, quarum ordinatæ ſint z, & u. Conſtat tam z, quam u fieri $= o$, quum x fit $= a$: ergo pro hoc caſu quid aliud quærendum eſt, niſi ratio ultima, quæ intercedit inter ordinatas z, u iam evaneſcentes propter æqualitatem $x = a$.

Ad hanc rationem inveniendam augenda eſt, vel minuenda communis abſciſſa quantitate infiniteſima dx, ita ut fiat $= a \pm dx$, qui valor ſubſtituatur pro x in æquatione z $=$ numeratori fractionis, & ſi adſunt extrahantur radices more newtoniano. Atque illis extractis diſponatur formula ea ratione, ut primus terminus ille ſit, qui nulla ratione affectus eſt quantitate dx, ſecundus in quo dx minimam obtinet dimenſionem, atque ita deinceps per ſeriem. Primus terminus propter ſigna contraria ſemper deſtruitur; ſecundo omiſſis reliquis, qui reſpectu eius ſunt infiniteſimi, erit $= z$; quod ſi ſecundus deſtruatur, fiet $z =$ tertio; ſi etiam tertius ob ſigna contraria ſit $= o$, erit $z =$ quarto; atque ita deinceps omiſſis ſemper ſubſequentibus, qui reſpectu eius, qui aſſumitur, ſunt infiniteſimi. Eadem prorſus fiant in denominatore, & invenietur quantitas $= u$. Altera per alteram dividatur, & valor fractionis invenietur.

Primum iubeo te animadvertere, in extrahendis radicibus modo newtoniano non eſſe neceſſe, ut ſeries per multos terminos producatur; ſed ſatis eſſe, ut ille terminus inveniatur, qui primo ex contrarietate ſignorum non eliditur. Deinde adverte me dixiſſe augendam, vel minuendam abſciſſam elemento dx. Namque ſæpe, ſi augeatur, ordinata provenit imaginaria, quo in caſu ad hæc vitanda erit minuenda abſciſſa; aut vice verſa. Verum hoc tene: ſi auges in numeratore debes etiam augere in deno-

mina-

minatore, aut contra, ut ordinatæ ad eamdem abſciſſam pertinentes comparentur. Rem exemplis reddam clariorem.

Sumo primum exemplum ex formula nullo ſigno radicali affecta. Sit ea ipſa fractio, cuius valorem per methodum primam invenimus: nimirum

$$\frac{y}{a} = \frac{x^4 + ax^3 - 9a^2x^2 + 11a^3x - 4a^4}{x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4}.$$ Pono $x = a + dx$,

ſubſtitutoque valore in numeratore, quem vocavi $= z$, fiet

$$\begin{aligned} z = {} & a^4 + 4a^3dx + 6a^2dx^2 + 4adx^3 + dx^4 \\ & a^4 + 3a^3dx + 3a^2dx^2 + adx^3 \\ & -9a^4 - 18a^3dx - 9a^2dx^2 \\ & 11a^4 + 11a^3dx \\ & -4a^4. \end{aligned}$$

In hac formula prima columna ex finitis quantitatibus conſtans evaneſcit, quod ſemper in noſtris formulis eveniet: altera, in qua dx adeſt, pariter $= o$: tertia pariter ex contrarietate ſignorum deſtruitur. Prima, quæ non eliditur quarta eſt: quare omiſſa quinta, quæ infiniteſima eſt reſpectu quartæ, erit $z = 5adx^3$. Si idem fiat in denominatore, quem vocavi $= u$, completa analyſi invenietur $u = 3adx^3$. Quare ſi dividatur z, per u fiet.

$$\frac{y}{a} = \frac{5adx^3}{3adx^3} = \frac{5}{3}:$$ quemadmodum ſupra nacti ſumus.

A formula nullo prædita ſigno radicali progredior ad formulam ſigno radicali affectam multiplici: atque eam potiſſimum ſeligo, quam proponit vir ſummus Ioannes Bernoullius: nimirum

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$$ In numeratore ſubſtituo pro x, $a + dx$, ut fiat

$$z = \sqrt{a^4 - 2a^3dx - 6a^2dx^2 - 4a^3dx - dx^4} - a\sqrt[3]{a^3 + a^2dx}.$$

Extraho duas radices more newtoniano, ſed ſubſiſto in-

ter-

terminis, ubi adeſt dx; propterea quod hi non deſtruentur, & ceteri præ his infiniteſimi fiunt. Prima radix erit $= a^2 - adx$; ſecunda $= a + \frac{1}{3}dx$. Quare

$$z = \frac{a^2 - adx}{-a^2 - \frac{1}{3}adx} = \frac{-4}{3}\,adx.$$

Quod factum eſt in numeratore fiat in denominatore, & orietur formula

$u = a - \sqrt[4]{a^4 + 3a^3dx + 3a^2dx^2 + adx^3}$. Extraho radicem omittendo terminos, in quibus habetur dx^2, & ſuperiores poteſtates: radix extracta eſt $= a + \frac{3}{4}dx$: ergo $u = \frac{a - \frac{3}{4}dx}{-a} = -\frac{3}{4}dx$: ergo valor fractionis

$$y = \frac{\frac{-4}{3}\,adx}{-\frac{3}{4}dx} = \frac{16}{9}\,a:$$ prorſus ut invenit Bernoullius.

Ad tertium exemplum propono fractionem

$$y = \frac{\overline{x^2 + ax}\,.\,\overline{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\,.\,\overline{x^2 + a^2}}{2a\sqrt{x} - \sqrt{a}\,.\,\overline{a + x}},$$ in qua ſi $x = a$ cum numerator, tum denominator evaneſcit. Pono in numeratore pro x, $a + dx$, & proveniet

$z = \overline{2a^2 + 3adx + dx^2}\,.\,\sqrt{a} - \sqrt{a + dx}\,.\,\overline{2aa + 2adx + dx^2}$. $\sqrt{a + dx}$ modo newtoniano invenio; & quoniam perſpexi terminos, in quibus adeſt dx ſe ſe deſtruere, ita invenio, ut non contemnam dx^2. Invenio autem eſſe $= \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}} - \frac{dx^2}{8a\sqrt{a}}$. Hac itaque ſubſtituta nanciſcor

$$\begin{aligned} z = {} & 2a^2\sqrt{a} + 3adx\sqrt{a} + dx^2\sqrt{a} \\ & - 2a^2\sqrt{a} - adx\sqrt{a} + \frac{dx^2\sqrt{a}}{4} = -\tfrac{3}{4}\,dx^2\sqrt{a}. \\ & \qquad - 2adx\sqrt{a} \\ & \qquad\qquad - dx^2\sqrt{a} \\ & \qquad\qquad - dx^2\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Utor eadem ſubſtitutione in denominatore, & erit $u = 2a\sqrt{a+dx} - \sqrt{a}\,.\,\overline{2a+dx}$. Extracta radice, in qua non debet omitti dx^2, quia termini continentes dx ſe ſe deſtruunt, invenietur

$$u = \begin{matrix} 2a\sqrt{a} + dx\sqrt{a} \\ -2a\sqrt{a} - dx\sqrt{a} \end{matrix} - \frac{dx^2}{4\sqrt{a}} = \frac{-dx^2}{4\sqrt{a}}$$: ergo valor fractionis eſt

$$y = \frac{-\frac{3}{4}dx^2\sqrt{a}}{-dx^2}\,.\,4\sqrt{a} = 3a.$$ Q. E. I.

Exemplum quartum, & ultimum deſumatur a Iacobo Bernoullio, & eſt huiuſmodi

$y = \frac{\overline{a-x}\,.\,\sqrt{2aa - 3ax + xx}}{a - \sqrt{2ax - xx}}$. In huius fractionis numeratore ſi pro x ponerem $a+dx$, quantitas proveniret imaginaria; quod ideo accidit, quia curva expreſſa per $z = \overline{a-x}\,.\,\sqrt{2a^2 - 3ax + xx}$ nullum ramum habet, ubi x ſuperat a. Hoc etiam pro aliis caſibus animadvertiſſe iuvabit. Quare pro x ſubſtituo $a - dx$, & erit

$$z = \overline{\begin{matrix} a + dx \\ -a \end{matrix}}\,.\,\sqrt{\begin{matrix} 2a^2 + 3adx + dx^2 \\ -3a^2 - 2adx \\ + a^2 \end{matrix}} = dx^{\frac{3}{2}}\sqrt{a+dx}.$$

Omiſſo itaque dx, quæ reſpectu a eſt infiniteſima, fiet $z = a^{\frac{1}{2}}dx^{\frac{3}{2}}$.

Eadem fiat ſubſtitutio in denominatore, & erit

$$u = a - \sqrt{\begin{matrix} 2a^2 - 2adx - dx^2 \\ -a^2 + 2adx \end{matrix}} = a - \sqrt{a^2 - dx^2}.$$ Extrahatur radix, quæ erit $= a - \frac{dx^2}{2a}$. Ergo

$$u = \begin{matrix} a \\ -a \end{matrix} + \frac{dx^2}{2a} = \frac{dx^2}{2a}.$$ Dividatur z per u, & fiet

= y

$$y = \frac{2a^{\frac{3}{2}} dx^{\frac{3}{2}}}{dx^2} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}$$: quæ eſt quantitas infinita.

Methodus tradita eadem eſt cum illa, quam expoſuit Iacobus Bernoullius in notis in geom. Cart. nota XXIX. Hoc tamen habet diſcriminis, quod facta ſubſtitutione non utitur vir doctiſſimus extractione radicum, quemadmodum nos fecimus; ſed ponit numeratorem $= tdx$, ortamque hinc æquationem a ſurditate liberat. Deinde quum termini, a quibus dx abeſt, neceſſario ſe ſe elidant, eos, in quibus dx invenitur, ponit $= o$; atque per ortam æquationem determinat valorem t, & numeratorem fractionis tdx. Idem facit in denominatore. Quod ſi adhuc & numerator, & denominator $= o$; repetit operationem ponendo loco tdx, tdx^2, vel ſi evaneſcant iterum tdx^3: atque ita deinceps, donec valor quæſitus reperiatur.

Quod ſi valor poſt operationem prodiret infinitus, ordiretur novam operationem, ſed poneret ſucceſſive numeratorem (idem dic de denominatore) $= t\sqrt{dx}$, $t\sqrt[3]{dx}$, $t\sqrt[4]{dx}$, &c. In quibus operationibus illud cum primis obſervandum eſt, non opus eſſe tota æquationum reductione uti, ſed tantum, quantum conducit inveniendo termino, quo indigemus, qui plerumque levi negotio ab attento Analyſta eruitur.

Hæc methodus, quam Iacobus Bernoullius ſequitur, genuina eſt. Verum huic aliam, quæ per radicum extractiones peragitur, anteponendam eſſe duximus, quia ad liberandam æquationem a ſurditate longiores operationes requiruntur, quam ad extractionem radicum.

Exemplum alterum hac ratione tentatum hoc palam faciet. Facta ſubſtitutione $a + dx$ pro x, ponatur numerator fractionis $= tdx$, & erit

$$tdx = \sqrt{a^4 - 2a^3 dx - 6a^2 dx^2 - 3adx^3 - dx^4} - a\sqrt[3]{a^3 + a^2 dx}.$$

Ut facilius operationes peragantur pono primum terminum $= p$, ſecundum $= q$, ut ſit $tdx = p - q$: ergo $q = p - tdx$. Elevo ad tertiam poteſtatem, & fiet

$q^3 = p^3 - 3p^2 tdx + 3pt^2 dx^2 - t^3 dx^3$; ſive opportune trans-

latis terminis $q^3 + 3p^2 tdx + t^3 dx^3 = p . \overline{p^2 + 3t^2 dx^2}$. Elevo ad quadratum $\overline{q^3 + 3p^2 tdx + t^3 dx^3}^2 = p^2 . \overline{p^2 + 3t^2 dx^2}^2$. Pro p, q valores ſubſtituantur; ſed ita eleventur poteſtates, ut negligatur dx^2, & ſuperiores poteſtates, & fiet $a^{12} + 2a^{11} dx + 6a^{10} tdx = \overline{a^4 - 2a^3 dx} . \overline{a^8 - 4a^7 dx} = a^{12} - 6a^{11} dx$. Quare $tdx = \frac{-4}{3} adx$, ut ſupra inventum eſt. Si quis methodum hanc cum noſtra comparaverit, quænam elegantia præſtet facile iudicabit.

Præterea ſi poſt primam operationem in fractione uterque terminus aut nullus fiat, aut infinitus, iteranda eſt analyſis ponendo in primo caſu tdx^2, tdx^3, atque ita deinceps; in ſecundo caſu $tdx^{\frac{1}{2}}$, $tdx^{\frac{1}{3}}$, atque ita deinceps, donec fiamus voti compotes. Quot operationes iterandæ erunt ſæpenumero, verus ut valor inveniatur! præſertim ſi valor numeratoris, & denominatoris inveniendus proportionalis eſſe debeat dx elevatæ ad poteſtatem fractam numeris altioribus expreſſam, ut eſſet $dx^{\frac{7}{11}}$. Accedit, quod eam eligere poteſtatem, quæ propoſito ſerviat, fortunæ potius, quam certæ regulæ tribuendum videtur.

Conſideravi, utrum tot operationes hac ratione vitarentur: id enim fieri nullo negotio poſſe videbatur: nimirum facta ſubſtitutione pono numeratorem $= z$, libero æquationem a radicalibus ſignis; tum deletis terminis ſe ſe deſtruentibus aiebam, ſi termini item deleantur, qui infiniteſimi ſunt aliorum reſpectu, tandem valor ipſius t unica operatione prodire debet, ad quemcumque tandem ordinem infiniteſimorum pertineat. Verum vidi ſtatim, incertum eſſe, quinam termini ſint reſpectu aliorum infiniteſimi, qui proinde ſine parallogiſmo negligi poſſint. Exemplo rem aperiam.

Sit inveniendus valor quantitatis

$\sqrt[3]{a^3 - x^3} + A . \overline{x - a}^m$, quum ſit $x = a + dx$. Facta ſubſtitutione invenio

$\surd$ —

$\sqrt[3]{-3a^2dx - 3adx^2 - dx^3} + Adx^m$. Si hæc mea methodo tractanda ſit, extrahatur radix tertia duobus tantum terminis conſideratis; hos enim ſufficere deprehendi: & erit $-3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} dx^{\frac{1}{3}} - \frac{dx^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}} + Adx^m$. Iam vero ſit primo $m = \frac{1}{3}$ ſi $A = 3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$, valor quæſitus erit $= \frac{-dx^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}}$: ſi vero A non ſit $= 3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$ valor quæſitus fiet $= \overline{A - 3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}} \cdot dx^{\frac{1}{3}}$. Sit deinde $m > \frac{1}{3}$, omittuntur duo ultimi termini, & valor invenietur $= -3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} dx^{\frac{1}{3}}$. Sit demum $m < \frac{1}{3}$, omittuntur duo primi termini, & valor $= Adx^m$.

Quod ſi Bernoulliana methodo tentare rem velis, fiat $\sqrt[3]{-3a^2dx - 3adx^2 - dx^3} + Adx^m = z$: ſive $\sqrt[3]{-3a^2dx - 3adx^2 - dx^3} = z - Adx^m$. Eliminentur radicalia $-3a^2dx - 3adx^2 - dx^3 = z^3 - 3Az^2dx^m + 3A^2zdx^{2m} - A^3dx^{3m}$. In hac formula, vel ſit $m > \frac{1}{3}$, vel $m < \frac{1}{3}$, omitti poterunt termini $3adx^2$, dx^3, qui reſpectu $3a^2dx$ infiniteſimi ſunt: ergo fiet

$$-3a^2dx = z^3 - 3Az^2dx^m + 3A^2zdx^{2m} - A^3dx^{3m}.$$

Si mihi conſtaret ad quem ordinem infiniteſimorum pertineat z, conſtaret itidem utrum z^3, & $-3Az^2dx^m$ ſint infiniteſimi reſpectu $3A^2zdx^{2m}$, an reſpectu z^3 ſint infiniteſimi $-3Az^2dx^m + 3A^2zdx^{2m}$. Sed quoniam hoc nondum eſt cognitum, incertum eſt quinam termini ſine parallogiſmo omitti poſſint.

Ad determinandum autem ad quem ordinem infiniteſimorum pertineat z, nullam aliam viam iniri poſſe exiſtimo, quam animadvertere, cui poteſtati dx debeat eſſe proportionalis radix z. Quamobrem non curatis coefficientibus ſatis erit in formula inventa radices extrahere: quod

ſi fiat

ſi fiat invenietur $-dx^{\frac{1}{3}}$ proportionalis $z - dx^m$: ergo z debet eſſe æqualis alicui functioni vel $dx^{\frac{1}{3}}$, vel dx^m. Si itaque $m > \frac{1}{3}$, z pertinebit ad eum infiniteſimorum ordinem, ad quem pertinet $dx^{\frac{1}{3}}$. Quare z^3 erit omnium maximus, reſpectu cuius ceteri poterunt præteriri. Itaque erit $-3a^2dx = z^3$, ſeu $-3^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} dx^{\frac{1}{3}} = z$, ſicut ſupra invenimus. Si vero $m < \frac{1}{3}$, $dx^{\frac{1}{3}}$ erit infinite parva reſpectu dx^m: ergo z in eo erit infiniteſimorum ordine, in quo eſt dx^m. Quo in caſu omnes termini noſtræ æquationis ad eumdem quantitatum ordinem pertinent; nullus itaque omitti poterit. Quare omiſſo $-3a^2 dx$, qui reſpectu $A^3 dx^{3m}$ eſt infinite parvus, neceſſarium erit radicem extrahere, & erit $z - Adx^m = o$, ſive $z = Adx^m$, quemadmodum ſupra invenimus.

Si vero $m = \frac{1}{3}$, & A^3 minime æqualis ſit $3a^2$, tunc termini $-3adx^2 - dx^3$ omitti poſſunt: erit itaque $-3a^2 dx = z^3 - 3az^2 dx^{\frac{1}{3}} + 3A^2 zdx^{\frac{2}{3}} - A^3 dx$. Non curatis coefficientibus extrahatur radix tertia, & fiet $dx^{\frac{1}{3}}$ proportionalis $z - Adx^{\frac{1}{3}}$: ergo z ad eum ordinem pertinet infiniteſimorum ad quem $dx^{\frac{1}{3}}$. Nullus itaque terminus omitti poterit in æquatione. Extrahenda eſt igitur neceſſario radix ad inveniendum valorem z, atque regrediendum, unde diſceſſimus.

Demum in eadem hypotheſi ſit $A^3 = 3a^2$: quo in caſu fiet æquatio $-3adx^2 = z^3 - 3Az^2 dx^{\frac{1}{3}} + 3A^2 zdx^{\frac{2}{3}}$. Ut autem cognoſcatur ad quem ordinem infinite parvorum pertineat z, nullam aliam video rationem, quam demere utrique parti terminum $A^3 dx$, ſive $3a^2 dx$: quo dempto ſi intelligatur extracta radix fiet

$\sqrt[3]{-3a^2 dx - 3adx^2} = z - Adx^{\frac{1}{3}}$: in qua quando notum eſt adeſſe terminos, qui ſe deſtruunt, conſtabit z eſſe infinite parvam reſpectu $dx^{\frac{1}{3}}$: ergo omiſſis terminis, qui ſine paralogiſmo omitti poſſunt, fiet

$-3adx^2 = 3A^2 zdx^{\frac{2}{3}}$, ſive $\frac{-adx^{\frac{4}{3}}}{A^2} = \frac{-dx^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}} = z$: quemadmodum ſupra inventum eſt. Ab hoc exemplo ceteroquin non difficili, nemo unus non diſcet, quam longa, ac ſalebroſa via tenenda ſit, ut certa regula, atque lege methodus Bernoulliana ducatur. Sed de hac ſatis.

Si quis arbitraretur, poſſe per methodum differentiationis verum numeratoris, verum denominatoris valorem inveniri, non levi fortaſſe in errore verſaretur. Quod ut palam faciam, fac tibi iterum proponas numeratorem eius fractionis, quam loco primo tractavimus

$z = x^4 + ax^3 - 9a^2x^2 + 11a^3x - 4a^4$: in qua ſi pro x ſubſtituatur $a + dx$ provenit, ut dictum eſt

$$\begin{aligned} z = \;& a^4 + 4a^3dx + 6a^2dx^2 + 4adx^3 + dx^4 \\ & a^4 + 3a^3dx + 3a^2dx^2 + adx^3 \\ & -9a^4 - 18a^3dx - 9a^2dx^2 \\ & +11a^4 + 11a^3dx \\ & -4a^4 \end{aligned}$$

Hiſce ad memoriam revocatis utamur methodo differentiationis, & numeratoris expoſiti differentia ſumatur, & erit $z = 4x^3dx + 3ax^2dx - 18a^2xdx + 11a^3dx$. Hæc, ſi ponatur pro x quantitas conſtans a, coincidit prorſus cum ſecunda columna noſtræ formulæ. Qua de re ſi hic eſſet ſubſiſtendum, verus valor quæſiti numeratoris etiam differentiando inveniretur. Sed quoniam termini omnes a contrariis ſignis eliduntur, ſumenda eſt iterum differentia. Suppoſita itaque dx conſtante fiat differentiatio, & erit $z = 12x^2dx^2 + 6axdx^2 - 18a^2dx^2$, quæ, ſi fiat $x = a$, eſt dupla columnæ tertiæ: ergo ſi ad ſecundam differentiationem progrediendum eſt, valor per differentiationem inventus eſt duplus vero. Sed quando hic etiam ſigna contraria omnes elidunt terminos, fiat progreſſus ad tertiam differentiationem, & erit

$z = 24xdx^3 + 6adx^3$, quæ erit ſextupla, quam tertia noſtra columna; igitur ſi tertia differentiatione opus ſit, valor inven-

ventus eſt ad verum, ut $6:1$. Quod ſi quarta ſumeretur differentia, quod exemplum hoc non poſtulat, fieret $z = 24dx^4$, quæ ſe habet ad terminum in ultima columna comprehenſum ut $24:1$.

Quod in formula omnis radicalis ſigni experte vidimus, id valet in formulis quibuſcumque. Quod unico exemplo iuvabit confirmare: numerator formulæ in tertio exemplo propoſitæ erat

$$z = \overline{x^2 + ax} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{x} \cdot \overline{x^2 + a^2} \text{. ſive}$$

$$z = a^{\frac{1}{2}} x^2 + a^{\frac{3}{2}} x - x^{\frac{5}{2}} - a^2 x^{\frac{1}{2}} \text{. Differentiæ ſumantur}$$

$z = 2a^{\frac{1}{2}} x dx + a^{\frac{3}{2}} dx - \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{2} a^2 x^{-\frac{1}{2}} dx$: in qua quoniam, ſi fiat $x = a$, omnia eliduntur, ad ſecundam differentiationem progredior: $z = 2a^{\frac{1}{2}} dx^2 - \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}} dx^2 + \frac{1}{4} a^2 x^{-\frac{3}{4}} dx^2$. Fiat $x = a$, & invenietur $z = \overline{2 - \frac{14}{4}} \cdot dx^2 \sqrt{a} = -\frac{3}{2} dx^2 \sqrt{a}$, qui valor duplo maior illo eſt, quem per noſtram methodum invenimus.

Quærenti vero, cur, ſi unica differentiatione opus ſit, verus valor prodeat, non autem ſi pluribus, facile eſt reſpondere, quia quando poſita $x = a$, $z = o$, conſtat, aucta abſciſſa elemento dx, ordinatam z fore æqualem ſuæ primæ differentiæ. Fieri quidem poteſt, ut hæc prima differentia ordinatæ z ſit infinities maior, aut minor elemento dx. Verum ad eam inveniendam ad ſecundas differentias minime eſt confugiendum, ſed in eius expreſſione, quum res poſcit, minime ſunt negligendæ quantitates illæ, quæ reſpectu dx ſunt infiniteſimæ. Quare nihil ad rem facit animadverſio Petri Varignonii hominis doctiſſimi in notis ad In. par. Hoſpit. docentis, idcirco inter differentiandum omitti ddx, d^3x &c., quia eorum coefficientes ex ſignorum contrarietate ſe eliderent. Nam quamquam hoc verum eſt, non agitur hic de invenienda ſecunda, aut tertia differentiali, ſed de invenienda prima ad quemcumque ordinem infiniteſimorum pertineat.

Expono hic per ſeriem proportionem, quam habet valor

lor verus ordinatæ ad valorem differentiando inventum, quotcumque differentiationibus utaris.

Si differentiandum ſit	ſemel,	bis,	ter,	quater,	quinquies	ec.
Valor verus eſt ad	1,	1,	1,	1,	1	ec.
valorem differentiando inventum	1,	1.2,	1.2.3,	1.2.3.4,	1.2.3.4.5	ec.

Neque vero hoc novum eſt: cognitum enim eſt iamdiu, terminos, qui eruuntur ex newtonianis ſeriebus ad eos, qui prodeunt differentiando, huiuſmodi proportiones tenere.

Nolim tamen ſuſpicetur aliquis, me per hæc, quæ dixi hactenus, accuſare parallogiſmi methodum, qua ad inveniendum fractionum, de quibus agimus, valorem utitur in actis lipſienſibus 1704 Ioannes Bernoullius vir ſummus, & cum paucis comparandus. Etenim tantum abeſt, ut Bernoullii methodum evertam; quin potius verum, quo innititur fundamentum, aperio. Iubet vir ſummus, differentias ſumi cum numeratoris, tum denominatoris, hiſque ſumptis novam fractionem conſtituit. Si hæc valorem obtineat definitum, nihil faciendum eſt aliud: ſi adhuc ſit & numerator, & denominator $= o$, ſumit denuo differentias, atque ita iterum, atque iterum, donec valorem, quem quærit, inveniat. Si hic ageretur de inveniendo vero numeratoris valore, tum vero denominatoris valore, ubi neceſſaria eſſet ſecunda, aut tertia differentiatio verum valorem nequaquam obtineremus, ſed eiuſmodi, qui ad verum conſtantem haberet proportionem. Sed quando nihil quæritur aliud, quam verus fractionis valor, verus obtinetur. Etenim quum toties numeratoris, quoties denominatoris differentia ſumatur, erit ſemper valor verus numeratoris ad valorem verum denominatoris, ut valor numeratoris differentiando inventus ad valorem denominatoris inventum eadem ratione. Igitur numerator verus diviſus per verum denominatorem eumdem quotientem exhibebit, quem exhibet numerator differentiando inventus diviſus per denominatorem ſimiliter inventum. Quapropter ſatis abunde conſtat per methodum bernoullianam ſemper verum fractionis valorem prodire.

Etſi autem methodus Ioannis Bernoullii optima ſit, tamen non ita late patet, ut omnium fractionum valores ex-

hibeat, quemadmodum auctori doctiſſimo viſum eſt. Quod, ut appareat, fac periculum in formula, quam propono. Sit itaque

$$\frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a^2 - 3ax + xx}}{\sqrt{a - x}}$$

: quæ formula ita facilis eſt, ut tractari poſſit per primam methodum, dividendo ſcilicet $2a^2 - 3ax + xx$ per $a - x$. Prodibit autem $\frac{y}{\sqrt{a}} = \sqrt{2a - x} = \sqrt{a}$, ſi fiat $x = a$. Verum ut methodum Ioannis Bernoullii in uſum traducas, differentia numeratorem, atque diviſorem, & alterum per alterum divide, ut ſit $\frac{y}{\sqrt{a}} =$

$$\frac{-3adx + 2xdx}{2\sqrt{2aa - 3ax + x^2} \cdot \frac{-dx}{2\sqrt{a - x}}} = \frac{\overline{3a - 2x} \cdot \sqrt{a - x}}{\sqrt{2aa - 3ax + xx}}$$

, in qua omnia evaneſcunt, ſi fiat $x = a$. Sumatur iterum differentia, & erit

$$\frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{-2dx\sqrt{a - x} - dx \cdot \overline{3a - 2x}}{2\sqrt{a - x}}}{\frac{-3adx + 2xdx}{2\sqrt{2aa - 3ax + xx}}} = \frac{\overline{7a - 6x} \cdot \sqrt{2aa - 3ax + xx}}{\overline{3a - 2x} \cdot \sqrt{a - x}},$$

in qua pariter, ſi fiat $x = a$, & numerator, & denominator $= o$. Atque polliceor, factis in æternum differentiationibus numquam verum valorem inventum iri, ſed ſemper numeratorem, & denominatorem futuros $= o$, quia numquam duæ radices a fractione abibunt.

Cauſſa autem, cur hoc accidat, eſt, quia verus numeratoris valor (idem dic de denominatore) facta $x = a - dx$, non pertinet ad eos ordines quantitatum infiniteſimarum, ad quos pertinet aliquis ex hac ſerie terminus

$$dx^0, \quad dx, \quad dx^2, \quad dx^3, \quad dx^4 \text{ ec.}$$

ſed eſt inter ipſos medius. Per differentiationem autem primam

mam obtinetur dx, per ſecundam dx^2, per tertiam dx^3: atque ita deinceps. Quare ſi qua eſt quantitas media, numquam per repetitam differentiationem elici poterit. In adducto exemplo quoniam valor numeratoris, & denominatoris eſt ordinis $dx^{\frac{1}{2}}$, ut meam methodum adhibenti palam fiet, numquam per methodum Ioannis Bernoullii inveniri poterit.

Venio nunc ad caſum, in quo valor proportionis $\frac{dx}{dy}$, aut $\frac{dy}{dx}$ per fractionem exprimitur, quæ in certa hypotheſi habet tam numeratorem, quam denominatorem æqualem nihilo. Si hæc fractio vel ſolis x conſtet, vel ſolis y, iiſdem methodis tractatur, quibus ſupra uſi ſumus. Verum, quia non ſemper expedit alterutram ex indeterminatis ab æquatione arcere, fac advertas dum formula differentiatur ad inveniendam proportionem $dx : dy$, neceſſe eſſe, ut in peculiari caſu, quo de agimus, evaneſcant quantitates tum quæ multiplicant dx, tum quæ multiplicant dy: aliter neque numerator, neque denominator fractionis $= o$. Dum differentiæ modo vulgari accipiuntur, omittuntur omnes illi termini, in quibus ſumma exponentium quantitatum dx, dy ſuperant unitatem, quia reſpectu eorum, qui retinentur ſunt infinite parvi. Sed in præſenti caſu quoniam tam dx, quam dy multiplicatur per o, termini illi nulla ratione omitti poſſunt, quia non amplius ſunt infiniteſimi reſpectu eorum, qui æquationem conſtituunt. Si illos in computum deducas, verum valorem proportionis $dx : dy$ obtinebis terminis finitis.

Hanc ob rem nihil aliud requiritur, quam pro x, & y ſubſtituere in æquatione $x \pm dx$, & $y \pm dy$: tum terminis finitis deletis, qui propter æqualitatem ſe deſtruunt, inſtituere æquationem inter eos terminos, in quibus dx, dy unicam dimenſionem obtinent, reliquis omiſſis horum reſpectu infiniteſimis. Si vero per certam determinationem ex contrarietate ſignorum hi deſtruantur, conſtituatur æquatio inter eos terminos, qui primo non ſe ſe elidunt: ex qua æquatione veram proportionem $dx : dy$ elicies.

In exemplum primo adduco æquationem propoſitam a

Saurino homine clariſſimo in Ac. reg. 1716, quæ eſt huiuſmodi

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4xx - 64x = 0.$

In hac ſubſtituo pro y, $y + dy$, pro x, $x + dx$, & provenit

$$\begin{array}{llll} y^4 + 4y^3dy + 6y^2dy^2 + 4ydy^3 + dy^4 & & & \\ -8y^3 - 24y^2dy - 24ydy^2 - 8dy^3 & & & \\ -12xy^2 - 24xydy - 12xdy^2 - 12dxdy^2 & & & \\ \quad -12y^2dx - 24ydydx & & & = 0 \\ +16y^2 + 32ydy + 16dy^2 & & & \\ +48xy + 48xdy + 48dxdy & & & \\ \quad + 48ydx & & & \\ +4xx + 8xdx + 4dx^2 & & & \\ -64x - 64dx. & & & \end{array}$$

Ad inveniendam proportionem inter dx, dy, ſufficit ſecunda columna: nam reliquæ ſunt reſpectu eius infiniteſimæ. Verum ſi $y = 2$, $x = 2$ (hi enim, ut demonſtravit Saurinus, ſunt valores reſpondentes) invenietur tam dx, quam dy multiplicari per o: ergo ad tertiam columnam confugiendum erit, quæ relictis ceteris reſpectu eiuſdem infiniteſimis, quæſitum valorem dabit. Subſtituto autem 2 tum pro x, tum pro y, invenies facto calculo $dx^2 = 8dy^2$, ſive $\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} = \frac{dy}{dx}$. Q. E. I.

Exemplum alterum deſumam ab æquatione pariter a Saurino propoſita: nimirum

$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$. Subſtituo $x + dx$, & $y + dy$ pro x, & y, & erit

$$\begin{array}{ll} x^4 + 4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4 & \\ -ayx^2 - 2ayxdx - aydx^2 - adx^2dy & \\ \quad - ax^2dy - 2axdxdy & = 0 \\ +by^3 + 3by^2dy + 3bydy^2 + bdy^3. & \end{array}$$

Si fiat $x = o$, $y = o$, hi enim valores ſibi invicem reſpondent, non minus columna ſecunda, quam tertia ex contrarietate ſignorum deſtruitur; quare aſſumenda erit quarta, & inſtituenda æqualitas $4xdx^3 - adx^2dy + bdy^3 = o$, in qua dele-

deleto primo termino, qui multiplicatur per $x = o$, fit $adx^2 dy = bdy^3$; ex qua hi valores eruuntur $dy = o$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$: qui valores conveniunt proportioni $dy : dx$.

Sapienter animadvertit Saurinus tum proportionem $dx : dy$ exprimi per fractionem $= \frac{o}{o}$, quum quæritur pro illis punctis, in quibus plures eiuſdem curvæ rami ſe interſecant. Quare quum proportio quæſita tot habeat valores, quot ſunt rami ſe interſecantes, non poteſt ſane exprimi ab æquatione, in qua dx, & dy ad unicam tantum dimenſionem aſcendant; ſed neceſſaria eſt æquatio, in qua ſumma exponentium dx, dy ſit æqualis numero ramorum ſe interſecantium. Quid autem præſtat analyſis in hac hypotheſi? Ad nihilum redigit omnes illos terminos, in quibus ſumma exponentium dx, dy eſt minor, quam par eſt; ut æquatio conſtituta inter illos terminos, in quibus dx, dy congruam obtinent dimenſionem, ſi reſolvatur, tot exhibeat valores, quot ſunt rami eiuſdem curvæ ſe interſecantes.

Nunc vero perpendendum eſſe iudico, in utraque æquatione, quam facta ſubſtitutione nacti ſumus, ſi differentietur prima columna obtineri ſecundam; ſi, non minus dx, quam dy ut conſtante conſiderata, ſecundæ differentia accipiatur, & dividatur per 2, obtineri tertiam; ſi tertia differentietur, & dividatur per 3, haberi quartam; ſi hæc differentietur, & dividatur per 4, haberi quintam: atque ita deinceps, ſi plures eſſent. Quapropter proportio, quam quærimus, inveniri poteſt per methodum differentiationis. Data itaque curvæ æquatio modo vulgari differentietur; hæc dabit, ut notiſſimum eſt, proportionem $dx : dy$. Quod ſi per certam determinationem omnes termini evaneſcant, differentietur iterum ſumptis dx, dy ut conſtantibus: quæ orietur æquatio determinabit requiſitam proportionem: in eo enim unice a noſtra differt, quod habet omnes terminos multiplicatos per 2. Si adhuc evaneſcat iteretur differentiatio, donec non evaneſcentem invenias. Multiplicator enim communis omnes terminos æquationis afficiens æqualitatem non turbat.

Nihil reliquum eſt, niſi ut de peculiari methodo, qua

Sau-

Saurinus utitur, pauca dicam. Iubet ſcriptor doctiſſimus ex curvæ æquatione duobus modis diſpoſita primo ſecundum exponentes y, deinde ſecundum exponentes x efformari formulas duas. Tum utriuſque terminos multiplicat per ſeries arithmeticas duas; primam efformatam ab exponentibus y, alteram ab exponentibus x confectam, & ſingulos primæ terminos per y dividit, ſecundæ per x. Atque huiuſmodi multiplicationem, ac diviſionem toties iterat, donec ſubſtitutis pro x, y eorum valoribus, non amplius termini evaneſcant. Poſtea, ſi n numerum exprimat operationum, quæ inſtitutæ ſunt, primam multiplicat per dy^n, ſecundam per dx^n: quod quamquam Saurinus non ſignificat palam, tamen eſt vel maxime neceſſarium. Demum omnes terminos utriuſque per additionem collectos facit $= o$: ex qua æquatione proportionem determinat $dx : dy$.

Ad methodum explicandam utor primum ea ipſa æquatione, qua primum antea uſus ſum, quæ diſpoſita

ſecundum exponentes y eſt	ſecundum exponentes x eſt
$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 48xy + 4xx$ $+ 16y^2 \qquad - 64x = o$	$4x^2 - 64x + y^4$ $+ 48yx - 8y^3 = o$ $- 12y^2x + 16y^2$

Multiplicentur reſpective termini per has ſeries arithmeticas

$$\frac{4}{y} \quad \frac{3}{y} \quad \frac{2}{y} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{0}{y} \qquad \Big| \qquad \frac{2}{x} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{0}{x}$$

& erit

$4y^3 - 24y^2 - 24xy + 48x$ $+ 32y$	$8x - 64$ $+ 48y$ $- 12y^2$

Quoniam vero, ſi $y = x = 2$ omnia abeunt in nihilum, iteretur analyſis, & fiat ut ſupra multiplicatio per haſce ſeries

$$\frac{3}{y} \quad \frac{2}{y} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{0}{y} \qquad \Big| \qquad \frac{1}{x} \quad \frac{0}{x}$$

& fiet

$12y^2 - 48y - 24x$ $+ 32$	8

Sub-

Subſtituto valore x, y iam non amplius evaneſcunt quantitates: igitur multiplicata formula prima per dy^2, altera per dx^2 (accipitur exponens 2, quia duæ factæ ſunt operationes) obtinebimus æquationem

$$\overline{12y^2 - 48y - 24x \atop + 32} \,.\, dy^2 + 8dx^2 = o.$$

Antequam progredior, confero hanc æquationem cum illa, quæ ex tertia columna meæ ſeriei elicitur. Si hæc divideretur per 2 differret a noſtra per hoc dumtaxat, quod in hac deſunt termini $ydxdy$, $dxdy$. Sed hi in noſtra, ſubſtituto valore y, deſtruuntur; qua de re ex horum terminorum defectu nullus error poteſt ſuboriri. Verum dubitari non iniuria poteſt, utrum ſimilium terminorum defectus in aliis æquationibus ad parallogiſmum perduceret. Periculum faciamus in æquatione ſecundi exempli

Ea diſpoſita duobus modis eſt huiuſmodi.

$by^3 - ax^2y + x^4 = o$ | $x^4 - ayx^2 + by^3 = o$.

Multiplicentur ſinguli termini per ſingulos terminos harum ſerierum

$\frac{3}{y} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{0}{y}$ | $\frac{4}{x} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{0}{x}$

& fiet

$3by^2 - ax^2$ | $4x^3 - 2ayx$.

Si harum prima duceretur in dy, altera in dx, & facta utriuſque additione æquaretur o, nihil differret a ſecunda columna meæ formulæ. Sed quoniam ſi $x = o$, $y = o$, omnes termini æquales fiunt nihilo, fiat denuo multiplicatio per ſeries arithmeticas.

$\frac{2}{y} \quad \frac{0}{y}$ | $\frac{3}{x} \quad \frac{1}{x}$

& erit

$6by$ | $12x^2 - 2ay$.

Si facta reſpectiva multiplicatione per dy^2, dx^2 omnia in unam

unam ſummam colligantur, formula proveniens differret a tertia columna meæ ſeriei, quod habet omnes terminos bis ſumptos, & caret termino $axdxdy$. Sed quia in eadem ſuppoſitione omnia deſtruuntur, fiat ut ſupra multiplicatio per ſeries

$$\frac{1}{y} \quad \Big| \quad \frac{2}{x} \quad \frac{0}{x}$$

& orietur

$$6b \quad \Big| \quad 24x$$

Quæ provenit formula, ſi prima ducatur in dy^3, altera in dx^3, & colligantur in ſummam, habebit terminos ſextuplo maiores, quam termini quartæ columnæ noſtræ formulæ; præterea abeſt terminus adx^2dy.

Quoniam tres inſtitutæ ſunt operationes, fiat multiplicatio reſpectiva per dy^3, dx^3, & termini collecti in ſummam $= o$. Erit $6bdy^3 + 24xdx^3 = o$. Quare ſi fuerit $x = o$ nihil obtinetur aliud, quam $dy = o$. Itaque defectus terminorum, quos Saurini methodus negligit, in parallogiſmum deſinit.

Non inficior equidem, huiuſmodi Saurini methodum facile corrigi poſſe in hunc modum. Facta prima operatione multiplicentur reſpective formulæ per dy, dx, atque colligantur in ſummam hac ratione
$3by^2dy - ax^2dy + 4x^3dx - 2ayxdx = o$. Quæ denuo diſponatur primum ſecundum exponentes y, tum ſecundum exponentes x

$$\begin{matrix} 3by^2dy - 2axydx - ax^2dy \\ + 4x^3dx \end{matrix} = o \quad \Big| \quad 4x^3dx - ax^2dy - 2ayxdx + 3by^2dy = o$$

Multiplicentur per ſeries

$$\frac{2}{y} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{0}{y} \quad \Big| \quad \frac{3}{x} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{0}{x}$$

& orietur

$$6bydy - 2axdx \quad \Big| \quad 12x^2dx - 2axdy - 2aydx$$

Prima multiplicetur per dy, & ſecunda per dx, & omnes termini in unam ſummam colligantur
$6bydy^2 - 2axdxdy + 12x^2dx^2 - 2axdxdy - 2aydx^2 = o$, in qua

qua nullus deeſt terminus; ſed quoniam ſi $x = o$, $y = o$ omnia evaneſcunt, diſponatur duobus modis, ut antea factum eſt

$$\begin{array}{l|l} 6bydy^2 - 4axdxdy \\ -2aydx^2 + 12x^2dx^2 \end{array} = o \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 12x^2dx^2 - 4axdxdy - 2aydx^2 \\ + 6bydy^2 \end{array} = o.$$

Multiplicentur termini per ſeries

$$\frac{dy}{y} \quad \frac{o.dy}{y} \quad \Big| \quad \frac{2dx}{x} \quad \frac{dx}{x} \quad \frac{odx}{x}$$

& fiet

$$\begin{array}{l} 6bdy^3 \\ -2adx^2dy \end{array} \quad \Big| \quad 24xdx^3 - 4adx^2dy$$

Omnes termini collecti dant

$6bdy^3 - 2adydx^2 + 24xdx^3 - 4adydx^2 = o$. Deleto autem termino, qui multiplicatur per x, eſt enim $x = o$, erit $6bdy^3 - 6adydx^2 = o$, quæ dat $dy = o$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{\pm\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$: quemadmodum a me inventum eſt. Verum methodus huiuſmodi ita correcta, nihil differt a methodo differentiationis.

Quæ autem ad diſcutiendas geometræ doctiſſimi dubitationes meditatus ſum, eo conſilio academiæ communicare conſtitui, ut eius iudicio, quod facio plurimi, comprobarentur; aut ſi forte lapſus fuerim, ab erroribus ipſa monente liberarer.

VINCENTII RICCATI

Animadverſiones in formulam differentialem, in qua indeterminatæ ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt.

I. EXiſtunt plerique homines ſane docti, & in rebus analyticis multum verſati, qui arbitrantur in formula differentiali, in qua indeterminatæ ad unicam ſolummodo dimenſionem aſcendunt, quæque ita œcumenice exprimi poteſt $\overline{ax + b + cy} \,.\, dy = \overline{fx + g + hy} \,.\, dx$, ſemper indeterminatas poſſe a ſe invicem ſeparari, ut illis ſeparatis ad geometricam conſtructionem deveniatur. Verum ſi illis dumtaxat utamur methodis, quæ hactenus traditæ ſunt ab analyſtis, puto caſum adeſſe, in quo indeterminatarum ſeparatio nequaquam obtinetur. Ex hiſce methodis illas, quæ elegantiores nobis videntur, breviter exponemus, & primum eam formulam œcumenicam eliciemus, in qua non ſolum incognitæ ſeparatæ inveniuntur, ſed etiam integralis differentialis formulæ exhibetur, & res omnis ad exponentialium calculum traducitur.

II. Huiuſmodi formula integralis longo quidem, ſed non difficili calculo inveniri poteſt per methodum integrandi ſine prævia ſeparatione, qua uſus eſt Ioannes Bernoullius vir toto orbe terrarum clarus in Ac. petrop. t. I. Differentialis formulæ ſupponatur eſſe integralis $\overline{Ax + B + Cy}^{\,p+q} = M \,.\, \overline{Fx + G + Hy}^{\,p-q}$. A, B, C, F, G, H, p, q ſunt quantitates conſtantes indeterminatæ deinceps per analytica ſubſidia determinandæ. Quantitas M eſt conſtans quæpiam. A numeris tranſitus fiat ad logarithmos, & orietur $\overline{p + q} \,.\, l\overline{Ax + B + Cy} = lM + \overline{p - q}\, l\overline{Fx + G + Hy}$.

In

In hac differentiæ accipiantur, ut fiat

$$\frac{\overline{p+q}\,.\,A\,dx+\overline{p+q}\,.\,c\,dy}{Ax+B+Cy}=\frac{\overline{p-q}\,.\,F\,dx+\overline{p-q}\,.\,H\,dy}{Fx+G+Hy}.$$

Aequatio a diviſoribus liberata hanc formam accipit.

$$\begin{array}{lcl}
\overline{p+q}\,.\,AFx\,dx+\overline{p+q}\,.\,CFx\,dy & & \overline{p-q}\,.\,AFx\,dx+\overline{p-q}\,.\,AHx\,dy \\
\overline{p+q}\,.\,AG\,dx+\overline{p+q}\,.\,CG\,dy & = & \overline{p-q}\,.\,BF\,dx+\overline{p-q}\,.\,BH\,dy \\
\overline{p+q}\,.\,AHy\,dx+\overline{p+q}\,.\,CHy\,dy & & \overline{p-q}\,.\,CFy\,dx+\overline{p-q}\,.\,CHy\,dy.
\end{array}$$

Quæ, ut collatio commode inſtitui poſſit, in hunc modum diſponenda eſt.

$$\frac{\overline{p+q}\,.\,CFx+\overline{p+q}\,.\,CG+\overline{p+q}\,.\,CHy}{-\overline{p+q}\,.\,AHx-\overline{p+q}\,.\,BH-\overline{p+q}\,.\,CHy}\,.\,dy=$$

$$=\frac{\overline{p-q}\,.\,AFx+\overline{p-q}\,.\,BF+\overline{p-q}\,.\,CFy}{-\overline{p-q}\,.\,AFx-\overline{p-q}\,.\,AG-\overline{p-q}\,.\,AHy}\,.\,dx.$$

III. Iam vero hæc ultima æquatio comparetur cum æquatione data, quæ legitur N. I, & orientur æquationes ſex, ex quibus conſtantium indeterminatarum valores licebit determinare.

1^a) $\overline{p+q}\,.\,CF-\overline{p+q}\,.\,AH=a$

2^a) $\overline{p+q}\,.\,CG-\overline{p+q}\,.\,BH=b$

3^a) $2q\,.\,CH=c$

4^a) $-2q\,.\,AF=f$

5^a) $\overline{p-q}\,.\,BF-\overline{p-q}\,.\,AG=g$

6^a) $\overline{p-q}\,.\,CF-\overline{p-q}\,.\,AH=h.$

Quando ſex ſunt coefficientes determinandi, & duo exponentes, conſtat, cum de coefficientibus, tum de exponentibus unum poſſe pro arbitratu determinari.

IV. Ut exponentes p, & q definiantur, huiuſmodi ineatur calculus. Multiplica æquationem tertiam per quartam, & habebis

7^a) $CAFH=\frac{-fc}{4qq}$. Adde primam & ſextam

8^a) $2p\,.\,CF-2p\,.\,AH=a+h$, ſive $CF-AH=\frac{a+h}{2p}$.

 De-

Detrahe ſextam a prima, & erit

9^a) $2q \cdot CF + 2q \cdot AH = a - b$, ſive $CF + AH = \frac{a-b}{2q}$.

Addita octava, & nona proveniet

10^a) $2CF = \frac{a+b}{2p} + \frac{a-b}{2q}$. Deducta autem octava ex nona orietur

11^a) $2AH = \frac{a-b}{2q} - \frac{a+b}{2p}$. Multiplicetur iam decima per undecimam, & fiet

$$4ACFH = \frac{a^2-b^2}{4pq} + \frac{\overline{a-b}^2}{4qq} - \frac{a^2-b^2}{4pq} - \frac{\overline{a+b}^2}{4pp};$$ ſive

$$4ACFH = \frac{\overline{a-b}^2}{4qq} - \frac{\overline{a+b}^2}{4pp};$$ ſed ex ſeptima

$$4ACFH = \frac{-fc}{qq}:$$ ergo

$$\frac{-4fc}{qq} = \frac{\overline{a-b}^2}{qq} - \frac{\overline{a+b}^2}{pp};$$ ſive $$\frac{\overline{a+b}^2}{pp} = \frac{\overline{a-b}^2}{qq} + \frac{4fc}{qq}.$$

Igitur $p : q :: \overline{a+b} : \sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}$: quare ſi ponatur $p = a+b$, erit $q = \sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}$; quæ duæ æquationes valores exponentium determinant.

V. Antequam progrediar, opportunum iudico definire valores G, B ex aliis conſtantibus indeterminatis. Ex æquatione ſecunda erit

$B = \frac{\overline{p+q} \cdot CG - b}{\overline{p-q} \cdot H}$; ex quinta $B = \frac{\overline{p+q} \cdot AG + g}{\overline{p-q} \cdot F}$. Igitur $\frac{\overline{p+q} \cdot CG - b}{H} = \frac{\overline{p+q} \cdot AG + g}{F}$. Quare $\frac{\overline{p+q}}{} \cdot$

CFG

$\overline{CFG-AHG} = bF + gH$. Igitur $G = \frac{bF + gH}{p+q \cdot \overline{CF - AH}}$: atque ex decima, & undecima conſtat $CF - AH = \frac{a+b}{2p} = \frac{1}{2}$ ſubſtituto valore p: ergo $G = \frac{2bF + 2gH}{p+q} =$

$\frac{2bF + 2gH}{a+b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$ ſi pro p, q valores inventos N. IV ſubſtituas. Simili ratione, & calculo invenies valorem B, ſcilicet $B = \frac{-2bA - 2gC}{a+b-\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$.

VI. Hiſce inventis ex quarta nanciſceris $F = \frac{-f}{2Aq} =$

$\frac{-f}{2A\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$. Item ex decima $F = \frac{a+b}{4Cp} + \frac{a-b}{4Cq} =$

$\frac{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}{4C\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$: ergo $\frac{-f}{A} = \frac{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}{2C}$;

ergo $A : C :: \frac{-f}{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}} : \frac{1}{2}$. Igitur ſi fiat

$A = \frac{-f}{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$ erit $C = \frac{1}{2}$. Tum ex quarta $F = \frac{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}{2\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$. Demum ex ſecunda $H =$

$\frac{c}{\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}}$. Hoſce valores introduc in formulas ex-

pri-

primentes valores B, G, quæ habentur N. V, & erit

$$G = \frac{b\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}+2gc}{\overline{a+b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}\cdot\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}, \&$$

$$B = \frac{2bf-g\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}{\overline{a+b-\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}.$$

Itaque hiſce valoribus ſubſtitutis habebitur integralis formulæ datæ

$$\overline{\frac{-fx}{\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}+\frac{2bf-g\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+fc}}}{\overline{a+b-\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}+\frac{2}{2}y}^{\,a+b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}} =$$

$$= M\cdot\overline{\frac{x\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}{2\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}+\frac{b\cdot\overline{a-b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}+2gc}{\overline{a+b+\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}\cdot\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}+\frac{cy}{\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}}^{\,a+b-\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}}.$$

VII. Huiuſmodi integralem formulam non attente conſideranti videri facile poterit, propoſita differentialis formula integrationem ſemper admittere, aut ad formulam reduci præditam exponentibus conſtantibus. Verum ſi recte advertes, invenies plures eſſe caſus, ad quos integralis formula nequaquam pertinet.

VIII. Primo omnium pone $\overline{a-b}^2 = -4fc$ ita, ut $\sqrt{\overline{a-b}^2+4fc}=0$, quæ ſuppoſitio applicata inventæ integrali dabit $\frac{x\cdot\overline{a-b}}{2}+\frac{b\cdot\overline{a-b}+2gc}{a+b}+cy=0$. Hanc æquationem ſatisfacere propoſitæ æquationi differentiali experienti palam fiet. Verum, ut paullo infra, nempe N. XV, conſtabit, aliam methodum in uſum traducens plane cognovi, præter lineam rectam, quæ ab ultima æquatione expri-

primitur, alias quoque curvas ad noſtram differentialem pro hac hypotheſi pertinere.

IX. Deinceps ſi $\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc}$ ſit quantitas imaginaria, quod eveniet, ubi alterutra ex ſpeciebus f, c ſit negativa, & rectangulum fc ſit maius quarta parte quadrati $\overline{a-b}$; formula omnis cum in exponentibus, tum in coefficientibus abundat quantitatibus imaginariis, quas quomodo expellas non video, neque fortaſſe expellere poteris, niſi ad formulam differentialem regrediaris. Quapropter pro hac hypotheſi integralis inventa eſt prorſus inutilis, neque ad ullam nos conſtructionem perducit.

X. Hæc autem ab aliis animadverſa fuiſſe non ignoramus; & vulgo notum, in ſuppoſitione N. VIII integrationem formulæ ad hyperbolæ quadraturam pertinere; in N. IX ſuppoſitione etiam ad circuli quadraturam: quam rem alia adhibita methodo patefaciam. Verum alia adeſt ſuppoſitio, in qua res nondum perfecta eſt, neque conſtat quo pacto ex formula differentiali curvam conſtruamus. Ea autem eſt, quum $fc = ab$; qua in hypotheſi liquet $\sqrt{\overline{a-b}^2 + 4fc} = a + b$. Quid autem in hac hypotheſi eveniet noſtræ integrali? Nimirum illa, rite operatione inſtituta, in hanc mutabitur. $\frac{2fb - 2ga}{o \,.\, a} + y = \frac{M^{\frac{1}{2a+2b}} + fx}{a}$, quæ ad nullam deducere conſtructionem poteſt, propterea quod in illa addenda eſt y quantitati conſtanti infinitæ. Quæ hypotheſis caſum complectitur abſolute integrabilem, quum ſcilicet $a = -b$, ſeu $a + b = o$.

XI. Quæ quum ita ſint, tametſi integralis inventa ſæpenumero utilitati eſſe poſſit, tamen in caſibus, quos illa nequaquam attingit, alia methodo uti, neceſſarium eſt. Quapropter ſingulatim omnia contemplans aio primo, æquationem ubique fore integrabilem, quotieſcumque $a = -b$. Nam tranſpoſitis terminis erit $a \,.\, \overline{xdy + ydx} + bdy + cydy = fxdx + gdx$: quæ integrata dat $A + axy + by + cy^2$

$\frac{cy^2}{2} = \frac{fx^2}{2} + gx$. Hanc autem æquationem ad conicas ſectiones pertinere, nemo unus eſt, qui ignoret. Imo ſi $fc = ab$, de quo caſu mentionem fecimus N. X, ſive in hac hypotheſi ſi $fc = -aa$, erit ad parabolam. Quantitas A eſt conſtans addita in integratione.

XII. Deinceps aio, ſi $fb = ag$, obtineri indeterminatarum ſeparationem ope ſubſtitutionis $fx + g + hy = zy$. Namque tranſpoſitis terminis erit $x = \frac{-g - hy + zy}{f}$: igitur differentiando $dx = \frac{-hdy + zdy + ydz}{f}$; factiſque opportunis ſubſtitutionibus noſtra formula mutabitur in hanc

$$-\frac{ga}{f}dy - \frac{ab}{f}ydy + \frac{azydy}{f} = \frac{-hzydy}{f} + \frac{z^2ydy}{f} + \frac{y^2zdz}{f}.$$
$$+ bdy \quad + cydy$$

Deletis autem primis terminis, qui ex ſuppoſitione $fb = ag$ deſtruuntur, factiſque neceſſariis operationibus formula in hanc mutabitur

$$\overline{ab - cf}\,.\,-ydy\ \overline{-a-h}\,.\,-zydy + z^2\,.\,-ydy = y^2zdz,$$

ſive $\frac{-dy}{y} = \frac{zdz}{zz - z.\overline{a+h} + ab - cf}$, in qua inveniuntur incognitæ ſeparatæ. Si ſit $a = -h$ utrumque æquationis membrum ad logarithmos pertinebit, ex quibus ſi ad numeros fiat tranſitus, invenietur æquatio N. XI noſtræ hypotheſi accommodata.

XIII. Ut inventa formula ad magis notas redigatur, fiat $zz - z.\overline{a+h} + \frac{\overline{a+h}^2}{4} = tt$: igitur $z + \frac{a+h}{2} = t$, & $dz = dt$, factiſque neceſſariis ſubſtitutionibus obtinebimus

$$\frac{-dy}{y} = \frac{tdt + dt.\frac{a+b}{2}}{tt - \frac{\overline{a+b}^2}{4} + ab - cf} = \frac{tdt + dt.\frac{a+b}{2}}{tt - \frac{\overline{a-h}^2}{4} - cf}.$$

XIV.

XIV. Tres iam caſus oportet diſtinguere. Aut enim $\frac{\overline{a-b}^2}{4}+cf$ eſt quantitas poſitiva, aut $=o$, aut negativa. Sit primo quantitas affirmativa, eaque fiat $=nn$. Item fiat $\frac{a+b}{2}=m$. Quare formula in hanc mutabitur $\frac{-dy}{y}=$ $\frac{tdt+mdt}{tt-nn}=\frac{m+n}{2n}.\frac{dt}{t-n}+\frac{n-m}{2n}.\frac{dt}{t+n}$. Quæ omnia integrata per logarithmos dant $lA-ly=\frac{m+n}{2n}\,l\,\overline{t-n}+$ $\frac{n-m}{2n}\,l\,\overline{t+n}$, & facto tranſitu a logarithmis ad numeros $\frac{A}{y}=\overline{t-n}^{\frac{m+n}{2n}}.\overline{t+n}^{\frac{n-m}{2n}}$. Huic autem formulæ ſi recte ſubſtitutiones adhibeantur, orietur

$$A^{2n}=\overline{fx+g+\tfrac{b-a}{2}y-ny}^{\,m+n}.\overline{fx+g+\tfrac{b-a}{2}y+ny}^{\,n-m}$$

non diſſimilis illi, quam per primam methodum univerſalius invenimus N. VI. In hac itaque hypotheſi curva aut algebraica eſt, aut exponentialis.

XV. Ad alterum caſum accedo, in quo $\frac{\overline{a-b}^2}{4}+cf=o$. In hoc formula ita ſe ſe habet $\frac{-dy}{y}=\frac{tdt+mdt}{t^2}$, ſive $\frac{dy}{y}+\frac{dt}{t}=\frac{-mdt}{t^2}$. Huic formulæ, ut ab aliis demonſtratum eſt, duplex æquatio ſatisfacit, altera quæ ſine integratione, altera quæ per integrationem obtinetur. Prima eſt $yt=$ o, ſive per ſubſtitutiones regrediendo $yz-y.\frac{\overline{a+b}}{2}=o$, ſive $fx+g+by-y.\frac{\overline{a+b}}{2}=fx+g+y.\frac{\overline{b-a}}{2}=o$, quæ

prorſus eadem eſt cum illa, quam per primam methodum invenimus N. VIII, dummodo præſenti accommodetur hypotheſi. Quæ autem per integrationem obtinetur, eſt huiuſmodi $-lA+ly+lt=\frac{m}{t}$, quæ dependet a ſola hyperbolæ quadratura.

XVI. Demum ſi $\frac{\overline{a-b}^2}{4}+cf$ eſt quantitas negativa, hoc eſt $=-nn$, hoc pacto diſponatur æquatio $\frac{-dy}{y}=\frac{tdt}{tt+nn}+\frac{m}{n}\cdot\frac{ndt}{tt+nn}$: quæ integrata exhibet $lA-ly=l\sqrt{tt+nn}+\frac{m}{n}$. in arcum circularem, cuius radius $=n$, tangens $=t$. Quapropter in hoc caſu æquatio dependet cum a circuli, tum ab hyperbolæ quadratura.

XVII. Præterea aio, in ſuppoſitione $cg=hb$ obtineri indeterminatarum ſeparationem, ſi utaris ſubſtitutione $ax+b+cy=zx$, & indeterminatam x ab æquatione expellas. Quoniam idem eſt calculus, eademque conſectaria ac in hypotheſi ſuperiore, libenter omnia omitto, atque analyſtis relinquo.

XVIII. Poſtea aio, ubi nulla ex prædictis æqualitatibus locum habeat, faciendam eſſe prius huiuſmodi ſubſtitutionem $y=z+\frac{fb-ag}{ah-fc}$, atque adeo $dy=dz$. Hac autem ſubſtitutione facta orietur æquatio

$$axdz+bdz+\frac{c.\overline{fb-ag}}{ah-fc}.dz+zdz=fxdx+gdx+\frac{h.\overline{fb-ag}}{ah-fc}.dx+hzdx,$$

in qua adſunt conditiones ſecundæ hypotheſis, quæ N. XII habetur, ut patebit conſideranti æquales eſſe huiuſmodi quantitates $fb+\frac{fc.\overline{fb-ag}}{ah-fc}$, $ag+\frac{ah.\overline{fb-ag}}{ah-fc}$. Proinde

per

per methodum ſecundæ hypotheſis conſtruetur, & eadem elicientur conſectaria.

XIX. Denique aio per ſubſtitutionem $x = z + \frac{cg - hh}{ah - fc}$ oriri æquationem præditam conditione hypotheſis tertiæ, nempe N. XVII, atque adeo in ſuis indeterminatis ſeparabilem.

XX. Obtinuimus itaque indeterminatarum ſeparationem caſu illo dumtaxat excepto, ubi $ah = fc$: quo in caſu niſi adſit altera ex conditionibus, quæ continentur N. XII, XVII, ſubſtitutio, qua utimur, implicat quantitates infinitas, atque adeo analyſeos ſubſidia inutilia reddit.

XXI. Ad ſeparandas indeterminatas in propoſita formula poſſem quoque alia methodo uti, quam paucis exponam. Fiat $x = z + A$, & $y = u + B$. A, B ſunt quantitates conſtantes determinandæ in operationis progreſſu. Factis ſubſtitutionibus oritur æquatio

$$\begin{aligned} azdu &+ aAdu + cudu = fzdz + fAdz + hudz \\ &+ b\,du \qquad\qquad\qquad\quad + g\,dz \\ &+ cBdu \qquad\qquad\qquad\;\; + hBdz. \end{aligned}$$

Per determinationem duarum conſtantium A, B eiicio ab æquatione utriuſque partis ſecundos terminos ponens $aA + b + cB = o$, $fA + g + hB = o$, ex quibus oritur $A = \frac{cg - hb}{ah - fc}$, $B = \frac{fb - ag}{ah - fc}$. Hinc æquatio erit $azdu + cudu = fzdz + hudz$: quæ, quum in omnibus terminis habeat indeterminatas ad eamdem poteſtatem elevatas, pertinet ad canonem Gabrielis Manfredii hominis doctiſſimi. Quare fiet $u = sz$, & poſt non ita multas operationes inveniemus $\frac{-dz}{z} = \frac{ads + csds}{cs^2 + as - hs - f}$. Ex qua formula prorſus eadem conſectaria elicies, quæ ſupra commemoravimus.

XXII. Verum neque hæc methodus quidquam prodeſt, dum $ah = fc$. Si in hac hypotheſi foret etiam $ag = fb$, ex quibus duabus hypotheſibus tertia elicitur, nempe $hb = cg$,

 res

res eſſet per ſe patens. Nam noſtra æquatio rite diſpoſita hanc formam indueret

$$axdy + bdy + cydy = \frac{f}{a} . \overline{axdx + bdx + cydx},$$ quæ dividi poteſt per $ax + b + cy$, eaque diviſa orietur $dy = \frac{fdx}{a}$, quæ integrata dat $A + y = \frac{fx}{a}$. Duæ itaque æquationes propoſitæ faciunt ſatis, nempe $ax + b + cy = o$, & $A + y = \frac{fx}{a}$.

XXIII. Verum quando in hypotheſi $ab = fc$, quantum quidem ſcio, res nondum confecta eſt; ad ſeparandas incognitas methodo uſus ſum non ita uſitata, quæ me voti compotem effecit. Traditam æquationem hac ratione diſpono

$$x = \frac{y . \overline{hdx - cdy}}{ady - fdx} + \frac{gdx - bdy}{ady - fdx}.$$ Utor ſubſtitutione

$x = Stdy$, & $dx = tdy$, & erit $Stdy = y . \frac{htdy - cdy}{ady - ftdy} + \frac{gtdy - bdy}{ady - ftdy}$, ſive $Stdy = y . \frac{ht - c}{a - ft} + \frac{gt - b}{a - ft}$. Accommodemus formulam noſtræ hypotheſi, & cum ſit $b = \frac{fc}{a}$, facta ſubſtitutione, habebimus $Stdy = y . \frac{fct - ac}{a . \overline{a - ft}} + \frac{gt - b}{a - ft} = \frac{-cy}{a} + \frac{gt - b}{a - ft}$. & differentiando ita, ut D deſignet differentialem quantitatis ſubſequentis $tdy + \frac{cdy}{a} = D\frac{gt - b}{a - ft}$, ſive $dy = \frac{1}{t + \frac{c}{a}} D\frac{gt - b}{a - ft}$, in qua inveniuntur incognitæ ſeparatæ.

XXIV. Quantitas, quæ ſita eſt ſub ſigno D differentietur,

tur, & erit $dy = \frac{ga-fb}{f}\cdot\frac{dt}{\overline{t+\frac{c}{a}}\cdot\overline{\frac{a}{f}-t}^{2}}$. Antequam progredior adverto, quid eveniat in ſuppoſitione $\frac{-c}{a}=\frac{a}{f}$; tunc enim formula mutabitur in hanc $dy=\frac{ga-fb}{f}\cdot\frac{-dt}{\overline{\frac{a}{f}-t}^{3}}$: igitur integrando $y = A + \frac{ga-fb}{f}\cdot\frac{-1}{2\cdot\overline{\frac{a}{f}-t}^{2}}$, & $tdy =$ $dx = \frac{ga-fb}{f}\cdot\frac{-tdt}{\overline{\frac{a}{f}-t}^{3}}$, & integrando

$$x = B+\frac{ga-fb}{f}\cdot\overline{\frac{-a}{2f\cdot\overline{\frac{a}{f}-t}^{2}}+\frac{1}{\frac{a}{f}-t}}.$$

XXV. Inventi valores indeterminatarum x, y, qui algebraice dantur per t, oſtendunt curvam eſſe algebraicam; imo facto calculo inveniemus eſſe ſectionem conicam. Et quamquam in caſu $ga-fb=o$ formulæ videantur deficere, tamen facto calculo reperies æquationem ad lineam rectam, quæ altera eſt ex ſupra traditis, ubi pro hoc caſu æquationem examinavimus. Verum hypotheſes duæ $b=\frac{fc}{a}$, & $\frac{-c}{a}=\frac{a}{f}$ evidenter inferunt tertiam $a=-b$: qua in hypotheſi propoſitam formulam ſemper integrabilem eſſe monſtravimus N. XI.

XXVI. Quare hac hypotheſi omiſſa univerſaliter formulam tractemus: quod ut facilius fiat, ponatur $\frac{ga-fb}{f}$ $=m$, $\frac{c}{a}=p$, $\frac{a}{f}=q$, ita ut ſit $dy=\frac{mdt}{\overline{t+p}\cdot\overline{q-t}^{2}}$, quæ

iuxta

iuxta notas methodos tractata, exhibet $dy = \frac{mdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{p+t}}$ $+ \frac{mdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{q-t}} + \frac{mdt}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}^2}$. Integretur $y = lA +$ $l\,\overline{p+t} - l\,\overline{q-t} + \frac{m}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}}$ ſumptis logarithmis in logiſtica, cuius ſubtangens $= \frac{m}{\overline{p+q}^2}$.

XXVII. Itaque ſi ope logarithmicæ deſcribamus curvam reſpondentem ultimæ æquationi, in qua t ſint ordinatæ, y abſciſſæ, ſpatium inter curvam, & coordinatas comprehenſum diviſum per unitatem $= x = \text{S}tdy$. Verum hoc ſpatium, atque adeo valor x per logarithmos invenietur. Eſt enim $tdy = dx = \frac{mtdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{t+p}} + \frac{mtdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{q-t}} +$ $\frac{mtdt}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}^2}$, ſive $dx = \frac{mdt}{\overline{p+q}^2} - \frac{mpdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{t+p}} - \frac{mdt}{\overline{p+q}^2} +$ $\frac{mqdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{q-t}} - \frac{mdt}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}} + \frac{mqdt}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}^2}$. Nam ſi ſummentur ſingula terminorum paria, redibit ſuperior æquatio. Ultima æquatione expurgata erit $dx = - \frac{mpdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{t+p}}$ $- \frac{mpdt}{\overline{p+q}^2 \cdot \overline{q-t}} + \frac{mqdt}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}^2}$, quæ integrata ſumptis logarithmis in eadem, qua ſupra logiſtica, fiet $x = -pl\,\overline{t+p}$ $+ pl\,\overline{q-t} + lB + \frac{mq}{\overline{p+q} \cdot \overline{q-t}}$.

XXVIII. Hæc methodus ubique conſtructionem ſuppeditabit. Verum elegantius fortaſſe fiet, ſi vulgari methodo præ-

prætermiſſa aliam ſequamur rei noſtræ accommodatiſſimam. Inventa iam eſt æquatio N. XXIII $dy = \frac{1}{t + \frac{c}{a}} D \frac{gt - b}{a - ft}$, ex qua oritur $tdy = dx = \frac{t}{t + \frac{c}{a}} D \frac{gt - b}{a - ft}$. Fiat $\frac{gt - b}{a - ft} = z$ $\frac{1}{t + \frac{c}{a}} = u$, & $\frac{t}{t + \frac{c}{a}} = w$. Igitur erit $dy = udz$, & $dx = wdz$.

XXIX. Nihil iam reliquum eſt, niſi ut videamus ad quas quadraturas pertineant formulæ udz, wdz. Aio utramque ad hyperbolam inter aſſymptotos pertinere. Etenim, ſi utaris formulis ſuppoſitis N. ſuperiore, invenies $t = \frac{az + b}{g + fz}$, $t = \frac{a - cu}{au}$, demum $t = \frac{cw}{a - aw}$: ergo $\frac{az + b}{g + fz} = \frac{a - cu}{au}$, $\frac{az + b}{g + fz} = \frac{cw}{a - aw}$. Porro utraque æquatio pertinet ad hyperbolam inter aſſymptotos. Hac autem ratione conſtruitur.

XXX. Rectæ Aa, Qq ſe ſe ad angulum rectum interſecent in puncto C. Sumatur $CA = Ca = \frac{ag - bf}{aa + fc}$, cui normales excitentur $AB = ab = \frac{aa}{aa + fc}$, & inter aſſymptotos Qq, Aa deſcribantur hyperbolæ oppoſitæ tranſeuntes per puncta B, b. Sumatur $CD = \frac{ab + cg}{aa + fc}$, & $CE = \frac{af}{aa + fc}$, & per E agatur EGT, per D ducatur FDG parallelæ aſſymptotis: erunt $GT = z$, $TS = u$. Ergo ſpatium $FGTS = Sudz = y$ addita ſi lubet, vel detracta aliqua conſtante.

XXXI. Tum ſumatur $EK = AB = \frac{aa}{aa + fc}$, & per K agatur hKH parallela aA, quæ concurrat cum AB, ab in punctis H, h. Normales eidem excitentur $HI = hi = \frac{ac}{a^2 + fc}$, & per puncta I, i deſcribantur inter aſſymptotos Hh, Qq hyperbolæ oppoſitæ, quarum altera concurrit cum FG in L: erunt $GT = z$, & $TY = w$, & ſpatium $LGTY = Swdz = dx$: quibus iam inventis nihil difficile eſt ſuppoſita hyperbolæ quadratura requiſitam curvam deſcribere, cuius progreſſus pro varia coefficientium proportione varius evadet.

XXXII. Hoc genus conſtructionis videtur locum non habere ubi $aa + fc = o$; nam omnes hyperbolarum parametri infiniti evadunt. Verum in hoc caſu hyperbolæ tranſeunt in lineas rectas, uti apparet ex formulis harum curvarum deſcriptis N. XXIX, quæ in ea hypotheſi tranſeunt in formulas linearum rectarum. Sed hunc caſum iam pertractavimus N. XXIV. Si autem $a = o$ noſtra conſtructio deficeret quidem, ſed advertendum eſt tunc b fieri infinitam propter æquationem, quam ſupponimus, $b = \frac{fc}{a}$. Quod ſi non minus a, quam $c = o$, formula eadem methodo pertractata ad abſolutam ſeparationem perduceretur. Quod ſi cum a, tum $f = o$, cui etiam ſi vis adde $c = o$, res nihil haberet difficultatis.

XXXIII. Dixi, exiſtentibus non minus a, quam $c = o$, formulam eadem ratione pertractatam ad ſeparationem perduci, & ad idem genus conſtructionis: quod quamquam facile eſt, tamen breviter calculum indicabo. Aequatio enim huic caſui accommodata eſt huiuſmodi $Stdy = \frac{-hy}{f} - \frac{gt + b}{ft}$. Ergo differentiando $tdy + \frac{hdy}{f} = D. - \frac{gt + b}{ft}$, ſive $dy = \frac{f}{ft + h} D. - \frac{gt + b}{ft}$, & $tdy = dx = \frac{ft}{ft + h} D. - \frac{gt + b}{ft}$:

ad

ad quas formulas quum ſit æquatio perducta, nihil iam difficile erit ope duarum hyperbolarum ex noſtra ratione conſtructionem abſolvere.

XXXIV. Unicus caſus reliquus eſt, ad quem huiuſmodi conſtructio nequaquam ſe extendit, quum ſcilicet $ag - bf = o$: ſed hic caſus coniunctus cum caſu noſtræ hypotheſis $ab = fc$, qui trahunt tertium $hb = cg$, pertractatus eſt N. XXII.

XXXV. Si æquationem noſtram hac ratione diſpoſuiſſem $y = x \cdot \frac{ady - fdx}{hdx - cdy} + \frac{bdy - gdx}{hdx - cdy}$, & poſuiſſem $y = Stdx$, eodem prorſus calculo ad ſeparationem deveniretur. Caſus autem, quo fruſtraretur methodus, eſt, quum $hb - gc = o$, qui prorſus coincidit cum caſu methodi ſuperioris, qui deſcriptus eſt N. XXXIV.

XXXVI. Quamquam noſtra hæc methodus maxima ſimplicitate, & elegantia ornata eſt in hypotheſi $ha = fc$, cui illam accommodavimus; quæ hypotheſis fruſtra alia ratione tentatur: tamen etiam extra hanc hypotheſim ſeparationem indeterminatarum obtinet; quod breviter indicare ſufficiet. Repeto itaque æquationem $x = y \cdot \frac{hdx - cdy}{ady - fdx} + \frac{gdx - bdy}{ady - fdx}$. Fiat $x = Stdy$, & erit $Stdy = \frac{y \cdot \overline{ht - c}}{a - ft} + \frac{gt - b}{a - ft}$, quæ differentiata dat $tdy = \frac{dy \cdot \overline{ht - c}}{a - ft} + y D \frac{ht - c}{a - ft} + D \frac{gt - b}{a - ft}$, ſive $\frac{dy}{y} = \frac{a - ft}{at - ft^2 - ht + c} D \frac{ht - c}{a - ft} + \frac{a - ft}{y \cdot \overline{at - ft^2 - ht + c}} D \frac{gt - b}{a - ft}$. Fiat $\frac{a - ft}{at - ft^2 - ht + c} D \frac{ht - c}{a - ft} = \frac{-ds}{s}$, & s dabitur ſaltem traſcendenter per t, & erit

$$\frac{dy}{y} + \frac{ds}{s} = \frac{a - ft}{y \,.\, \overline{at - ft^2 - bt + c}} \, \text{D} \, \frac{gt - b}{a - ft}.$$ Ponatur

$\frac{dy}{y} + \frac{ds}{s} = \frac{du}{u}$, & $ys = u$, & $y = \frac{u}{s}$, quibus ſubſtitutis erit

$$\frac{du}{u} = \frac{\overline{a - ft} \,.\, s}{u \,.\, \overline{at - ft^2 - bt + c}} \, \text{D} \, \frac{gt - b}{a - ft},$$ ſive

$$du = \frac{\overline{a - ft} \,.\, s}{at - ft^2 - bt + c} \, \text{D} \, \frac{gt - b}{a - ft}$$ cum incognitis ſeparatis.

XXXVII. Eadem methodus ad ſeparationem duxiſſet, ſi poſitum fuiſſet $dy = \text{S}tdx$. Sed hæc ſatis eſt indicaſſe. Quibus omnibus rite perpenſis apparebit, nullum eſſe caſum, in quo in propoſita differentiali æquatione indeterminatæ ſeparari non poſſint; imo non paucos eſſe caſus, qui pluribus rationibus abſolvuntur.

ADDITAMENTUM.

XXXVIII. Methodus, qua uſus ſum ad obtinendam indeterminatarum ſeparationem in ultimo caſu propoſitæ formulæ, omnibus formulis accommodari poteſt, quæ in hac æquatione œcumenica continentur $x = y\text{M} + a\text{N}$, in qua M, N dari ſupponuntur per dx, dy, & conſtantes. Primo quidem ſi $\text{M} = o$, res ita liquido conſtat, ut nullus ſit dubitationi locus. Quare hoc omiſſo id demonſtrandum aggredior de formula omnibus terminis conſtante. Quam ob rem hoc mihi præmittendum eſt.

XXXIX. Si in formula $\text{M}dx + y\text{N}dx = dy$ dentur M, N quocumque modo per x, & conſtantes, indeterminatæ ſemper poterunt ſeparari. Nam dividatur æquatio per y, & fiet $\frac{\text{M}dx}{y} = \frac{dy}{y} - \text{N}dx$. Ponatur $\text{N}dx = \frac{dz}{z}$, atque adeo $\text{SN}dx = lz$; quare z data erit ſaltem tranſcendenter per x. Peracta ſubſtitutione erit $\frac{\text{M}dx}{y} = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$. Ponatur $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$

$= dt$

$= \frac{dt}{t}$, ſive $\frac{y}{z} = t$, & factis ſubſtitutionibus orietur $\frac{Mdx}{zt} =$ $\frac{dt}{t}$, ſive $\frac{Mdx}{z} = dt$, in qua, quum z detur per x, inco-gnitæ ſeparatæ inveniuntur.

XL. Separata hac formula quemadmodum plures Geometræ docuerunt, venio ad formulam $x = yM + aN$, in qua M, N datæ ſupponuntur per dx, dy, & conſtantes. Adverte oportere ut in quantitatibus M, N differentialia nullius ſint dimenſionis; ſi enim ſecus eſſet, lex omogeneorum non conſervaretur: ergo ſi pro dx ſubſtituam tdy, differentialia ex quantitatibus M, N omnino abibunt. Quapropter pono $x = Stdy$, & $dx = tdy$, & factis ſubſtitutionibus dx, dy evaneſcent in quantitatibus M, N, & ſolum in eiſdem inerit t. Quare æquatio hanc formam accipiet $Stdy = yP + aQ$, in qua P, Q dantur tantum per t, & conſtantes. Sumantur differentiæ $tdy = Pdy + ydP + adQ$, aut $dy - \frac{ydP}{t - P} = \frac{adQ}{t - P}$, in qua æquatione, quum adſint conditiones N. XXXIX, poterunt indeterminatæ ſeparari. Quare licebit ſemper conſtruere curvam, in qua y ſunt abſciſſæ, t ordinatæ. Atqui $x = Stdy$; ideſt æqualis ſpatio curvilineo curvæ modo deſcriptæ diviſo per unitatem: igitur per huiuſce quadraturam deſcribetur etiam curva quæſita. Quæ quum ita ſint liquido conſtat, æquationes, in quibus x, y unicam dumtaxat obtinent dimenſionem, tametſi dx, dy quibuſcumque afficiuntur exponentibus integris, aut fractis, ſeparationem indeterminatarum ubique recipere.

XLI. Unum aut alterum exemplum methodum declarabit, & aliquot non ſpernendis animadverſionibus locum dabit. Data ſit æquatio $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2}$. Fiat $x = Stdy$, & $dx = tdy$, atque peractis neceſſariis ſubſtitutionibus orietur $Stdy = yt + at^2$, ſumptiſque differentiis $tdy = tdy + ydt + 2atdt$, quæ deletis terminis ſe ſe deſtruentibus exhibet $- ydt = 2atdt$. Quum hæc ſit diviſibilis per dt dat æquationes duas, nimirum $dt = o$, $- y = 2at$.

 XLII.

XLII. Si primam integremus, habebimus $t = A$: ergo $x = SAdy$, & integrando $x = Ay + B$, quæ pertinet ad lineam rectam. In hac formula duæ conſtantes inveniuntur, quæ additæ ſunt in duabus integrationibus. Verum quum in æquatione conſtruenda non adſint niſi differentialia primi ordinis, videtur unica dumtaxat conſtans locum habere poſſe; qua de re altera ex conſtantibus per alteram determinanda erit. Ut hoc fiat, accipiatur ultima formula $x = Ay + B$, differentietur $dx = Ady$. Hi valores collocentur in formula data $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2}$, & erit $Ay + B = Ay + aA^2$. Hæc quum debeat eſſe idemtica, fiet $B = aA^2$. Quare vera integralis erit $x = Ay + aA^2$.

XLIII. Ad alteram æquationem venio, nempe $-y = 2at$, ſive $t = \frac{-y}{2a}$: ergo $x = S\frac{-ydy}{2a}$: igitur integrando $x = A - \frac{y^2}{4a}$, quæ pertinet ad parabolam apollonianam. Ut determinetur valor conſtantis A, valores x, & dx ſubſtituantur in formula data, & invenietur $A - \frac{y^2}{4a} = \frac{-y^2}{2a} + \frac{ay^2}{4a^2} = \frac{-y^2}{4a}$, ex qua colligitur $A = o$: ergo vera formula erit $x = \frac{-y^2}{4a}$.

XLIV. Si data æquatio methodo vulgari tractetur, hoc enim facere poſſumus, eædem æquationes integrales prodibunt. Namque adhibito opportuno calculo inveniemus $dy = \frac{2adx + ydy}{\sqrt{4ax + yy}}$. Fiat $\sqrt{4ax + yy} = z$, & erit $dy = dz$, & integrando $y + A = z = \sqrt{4ax + yy}$, & $yy + 2Ay + AA = 4ax + yy$: ergo $x = \frac{2Ay + AA}{4a}$, quæ coincidit cum ſuperiore.

riore. Altera æquatio naſcitur, ſi fiat $z = \sqrt{4ax + yy} = o$: ergo $4ax = -yy$.

XLV. Hæc proprietas duarum curvarum reſpondentium noſtræ æquationi differentiali, ubique habetur, quum y non multiplicatur niſi per $\frac{dx}{dy}$; quia, facto calculo ſecundum noſtram methodum, evaneſcet dy ex æquatione, quæ propterea erit diviſibilis per dt, quemadmodum quiſque experiundo comperiet.

XLVI. Exemplum alterum deſumetur ab æquatione $x = \frac{ydx^3}{dy^3} \frac{-adx^2 - ady^2}{dy^2}$. Pono $x = Stdy$, & $dx = tdy$, factiſque neceſſariis ſubſtitutionibus $Stdy = yt^3 - at^2 - a$, & ſumptis differentiis $tdy = t^3 dy + 3yt^2 dt - 2atdt$, ſive $\overline{t - t^3}.\, dy = 3yt^2 dt - 2atdt$, ſive $\frac{dy}{y} - \frac{3tdt}{1-tt} = \frac{-2adt}{y.\,\overline{1-tt}}$.

Ponatur $\frac{dy}{y} - \frac{3tdt}{1-tt} = \frac{dz}{z}$, & integrando $ly + \frac{3}{2} l\,\overline{1-tt} = lz$, ſive $y = \frac{z}{\overline{1-tt}^{\frac{3}{2}}}$, & peractis ſubſtitutionibus

$$\frac{dz}{z} = \frac{-2adt.\,\overline{1-tt}^{\frac{3}{2}}}{z.\,\overline{1-tt}} = \frac{-2adt.\sqrt{1-tt}}{z}: \text{ergo}$$

$\frac{dz}{2a} = -dt\sqrt{1-tt}$, cuius conſtructio, ut notum eſt, dependet a circuli quadratura.

XLVII. Methodus hæc etiam in caſibus aliis multis utilitati eſſe poteſt, ubi x ſolum linearem obtinet dimenſionem. Nam ſi fuerit $x = M$, in qua M detur quomodocumque per y, dx, dy, & conſtantes, poſito $x = Stdy$, & $dx = tdy$, factiſque ſubſtitutionibus, fiet $Stdy = N$, in qua N dabitur per x, t, & conſtantes, neque in ea differentialia locum habebunt. Sumantur differentiæ, & orietur

$tdy = dN$, in qua dN dabitur per y, t, dy, dt, & conſtantes, ſed ita, ut differentialia linearem obtineant dimenſionem. Si in formula hac inventa methodus exiſtit ſeparandi indeterminatas, ut aliquando accidet, res erit perfecta; ſin minus, noſtra methodus quoque deficiet. Verumtamen per illam æquatio, in qua differentialia affecta ſunt exponentibus quibuſcumque integris, vel fractis, reducitur ad æquationem, in qua differentialia linearem tantum obtinent dimenſionem.

XLVIII. Exemplum unicum propono. Sit æquatio

$$x = \frac{ydx}{dy} + \frac{ay^2 dx^2}{dy^2} + \frac{by^3 dx^3}{dy^3} + \frac{cy^4 dx^4}{dy^4} \text{ ec.}$$

Fiat $x = Stdy$, & $dx = tdy$, factaque ſubſtitutione erit $Stdy = yt + ay^2t^2 + by^3t^3 + cy^4t^4$ ec., & differentiando $tdy = tdy + ydt + 2at^2ydy + 2ay^2tdt + 3bt^3y^2dy + 3by^3t^2dt$ ec. ſive

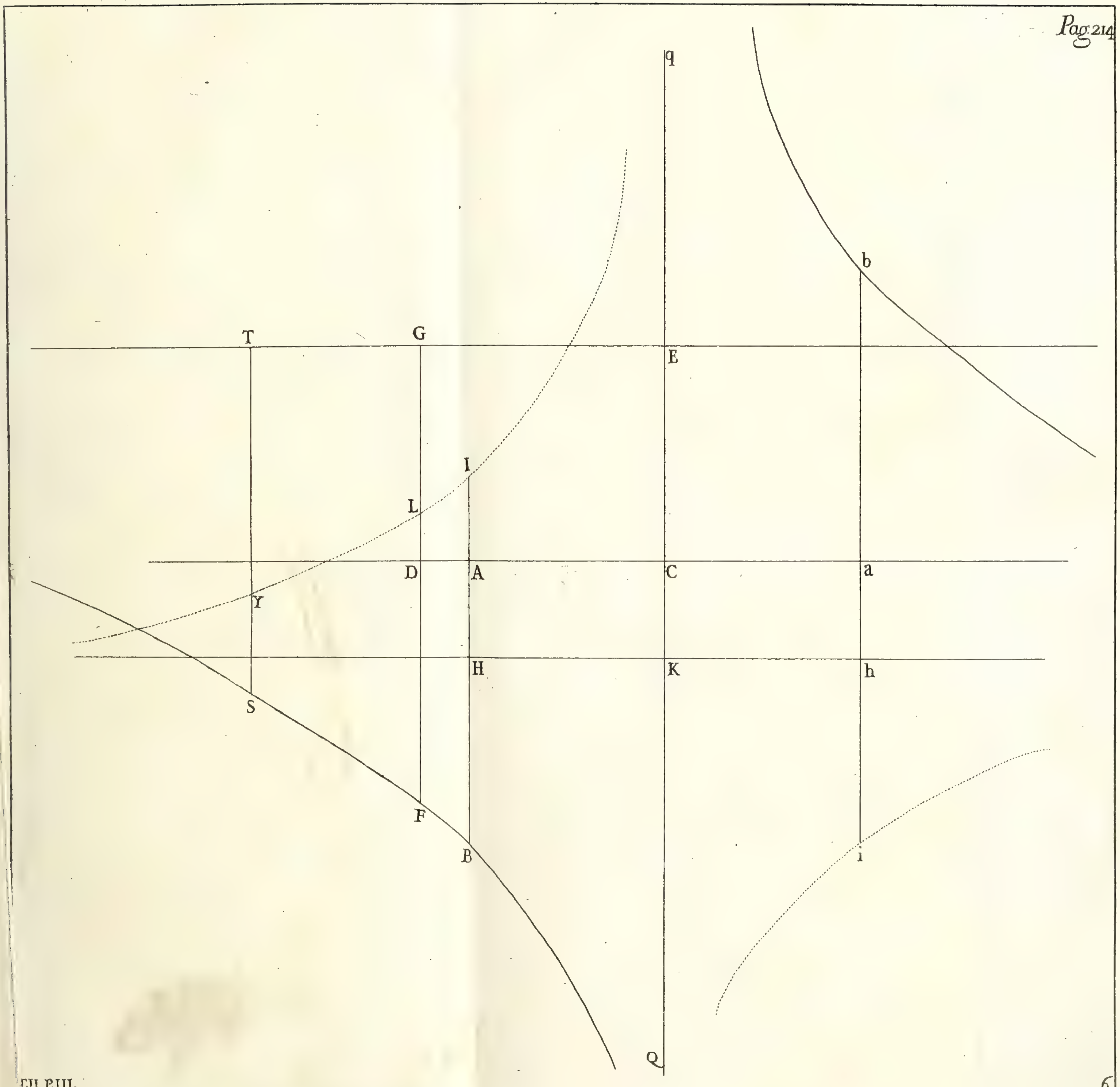
$$-ydt = 2at^2ydy + 2ay^2tdt + 3bt^3y^2dy + 3by^3t^2dt \text{ ec.}$$

in qua, quoniam licet ſeparare indeterminatas, utilis eſt methodus. Fiat igitur $yt = z$, & $-y = \frac{-z}{t}$, & erit

$$\frac{-zdt}{t} = 2azdz + 3bz^2dz + 4cz^3dz \text{ ec., ſive}$$

$$\frac{-dt}{t} = 2adz + 3bzdz + 4cz^2dz \text{ ec.}$$ & integrando $lA - lt = 2az + \frac{3}{2}bz^2 + \frac{4}{3}cz^3$ ec., in qua, quando habentur incognitæ ſeparatæ, conſtructio eſt in poteſtate. Hæc dicta volo, ut appareat, non omni methodum utilitate carere.

VIN-


q
b
T
G
E
I
L
D
A
C
a
Y
H
K
h
S
F
B
i
Q

VINCENTII RICCATI

De centro æquilibrii.

Ex multis, ac prope innumeris ſcriptoribus, qui de re mechanica egerunt, nullus fortaſſe eſt, qui de puncto illo verba non fecerit, ex quo ſi grave ſuſpendas omnia quieſcunt in æquilibrio. Atque huiuſmodi punctum ita conſtans eſſe compertum eſt, ut non mutetur, quacumque ratione circumvoluto corpore, dummodo eius partes eumdem reſpective ſitum retineant.

Verum quidquid tradiderunt, illi dumtaxat hypotheſi aptavere, in qua concipiuntur partium gravitates directiones habere parallelas: quæ hypotheſis quamquam in iis, quæ uſui hominum, & commodis ſerviunt, unice adhibenda eſt; tamen pleræque aliæ hypotheſes a philoſophis iamdiu conſideratæ ſunt, & difficillimis phænomenis explicandis accommodatæ. Quamobrem operæ pretium duximus pulcherrimam de æquilibrii centro theoriam promovere, & ad illas etiam hypotheſes transferre, in quibus directiones potentiarum centrum petunt, quamcumque cum diſtantiis a centro potentiæ teneant proportionem. Quæ meditando nacti ſumus, ea in hunc modum diſponemus, ut primum de potentiis parallelis, deinde de illis, quæ ad centrum tendunt, verba faciamus. Quod ſpectat ad parallelas, eas habere centrum æquilibrii conſtans, firmiore fortaſſe, quam antea factum eſt, demonſtratione probabimus; tum methodos exponemus, quibus uſi ſunt ſcriptores ad huiuſmodi centrum determinandum. De potentiis autem centrum petentibus quæremus, quænam hypotheſes careant, quænam præditæ ſint centro æquilibrii conſtante; poſt, qua ratione methodi illæ, quibus inventum eſt centrum æquilibrii in potentiis parallelis, ad rem noſtram traduci poſſint, breviter exponemus.

Itaque ad rem propoſitam propius accedentes, præmittimus huiuſmodi notiſſimum.

Lem-

Lemma.

Invenire potentiam æquivalentem duabus, quæ virgæ rigidæ applicantur.

Virgæ rigidæ AB (*Fig.* 1) applicentur duæ potentiæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda ſit. Directiones AM, BN producantur, donec concurrant in C, & transferantur potentiæ in punctum C, ſumtis in earum directionibus CS = BN, CR = AM: nihil enim intereſt, utrum potentiæ poſitæ ſint in locis AM, BN, aut in locis CR, CS. Hæ autem componantur facto parallelogrammo CSTR, cuius diagonalis CT æquivalentem repræſentabit. Hæc producatur, donec concurrat in K cum virga rigida AB. Perſpicuum eſt, potentiam CT translatam in KL, & applicatam virgæ rigidæ in K æquipollere duabus potentiis AM, BN.

Ubi advertendum eſt, determinandam eſſe non ſolum quantitatem potentiæ æquivalentis, ſed etiam punctum, ubi applicanda eſt: non enim æquivalet, niſi puncto K applicata.

Corollarium primum. Tres potentiæ KL, AM, BN ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ACB, KCB, KCA. Quare diviſo angulo ACB ita, ut ſinus angulorum ACK, BCK ſint reciproce, ut ipſæ potentiæ AM, BN, invenietur punctum K, cui potentia æquivalens eſt applicanda.

Corollarium alterum. Ex puncto K demiſſis in potentiarum directiones normalibus KP, KQ, ſumtoque tamquam ſinu toto KC, conſtat KP, KQ eſſe ſinus angulorum ACK, BCK: ſed potentiæ ex cor. 1 debent eſſe reciproce proportionales ſinibus angulorum ACK, BCK: ergo reciproce ut perpendiculares KP, KQ.

Corollarium tertium. Si potentiæ AM, BN ad eamdem partem dirigantur, punctum K cadit inter puncta A, B. Verum ſi potentia AM ad unam partem ſolicitaret, BN ad oppoſitam, punctum K caderet extra puncta B, A modo ad unam, modo ad alteram partem, ut circumſtantiæ requirunt.

Corollarium quartum. Ad æquilibrium habendum ſatis eſt efficere, ut potentia æquivalens ad oppoſitam plagam dirigatur. Quapropter ſi virga rigida ex puncto K ſuſtentetur,

tur, potentiæ AM, BN in æquilibrio quieſcent; & conſtabit quam potentiam exerceat fulcrum K, nimirum æqualem, & oppoſitam potentiæ æquivalenti KL.

Corollarium quintum. Si potentiarum directiones AM, BN concurrant in puncto C, etiam potentia ipſis æquivalens in eodem puncto concurrat neceſſe eſt. Quare ſi duæ potentiæ AM, BN fuerint parallelæ, etiam æquivalens eiſdem erit parallela.

De potentiis parallelis.

EX præmiſſo lemmate poſſem omnia invenire, quæ ad potentias parallelas pertinent: ſatis enim eſſet ſupponere, eas eſſe potentias parallelas, quæ ad angulum infinite acutum in puncto infinite diſtante conveniunt. Ex qua ſuppoſitione liceret e veſtigio colligere, diſtantias punctorum A, B a puncto K eſſe in ratione reciproca potentiarum, & potentiam æquivalentem KL eſſe æqualem ſummæ potentiarum AM, BN, ſi hæ ad eamdem partem dirigantur; ſi vero ad oppoſitas, earumdem differentiæ. Quæ res ſtatim cuique patebit, qui infinitorum, & infinite parvorum theoriam non ignoret. Tamen aliam placet moliri demonſtrationem longiorem quidem, ſed non inelegantem, & quæ in infinitorum theoriam nequaquam ingreditur.

Ad demonſtrationem adornandam præter præmiſſum lemma indigeo dumtaxat axiomate, quod maxime ſimplex eſt, atque perſpicuum. Illud autem eſt huiuſmodi. Si duabus, aut pluribus potentiis addantur duæ, quæ æquales ſint, & contrariæ, eadem prorſus erit potentia æquivalens.

Virgæ rigidæ AB (*Fig*. 2) applicentur potentiæ parallelæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda eſt. Dividatur linea AB bifariam in D: & quoniam duæ potentiæ æquales, & contrariæ non immutant æquipollentem, addantur duæ potentiæ AD, BD ita, ut invenienda iam ſit æquipollens quatuor potentiis AM, AD, BN, BD. Primæ duæ componantur facto parallelogrammo AMFD, & inveniatur æquivalens AF. Eodem modo facto parallelogrammo BNGD inveniatur æquivalens duabus BD, BN nempe BG. Hiſce æquivalentibus ſubſtitutis invenienda iam erit potentia æqui-

valens duabus AF, BG. Producatur BG, donec concurrat cum AF in C, factiſque RC = AF, SC = BG, completoque parallelogrammo CRTS, ducatur diagonalis TC, quæ erit potentia æquivalens potentiis AM, BN applicata in puncto K.

Iam vero aio primo, potentiam æquipollentem TC eſſe parallelam potentiis AM, BN. Ex C ducatur CO parallela AB. Propter triangula ſimilia ADF, COF erit AF : CF : : AD : CO. Item propter ſimilitudinem triangulorum BDG, GOC erit BG : GC : : BD : CO; atqui, quum ſit AD = BD, eſt AD : CO : : BD : CO; igitur per æqualitatem rationum AF : CF : : BG : CG; ſive permutando AF : BG, aut RC : RT : : CF : CG: ergo duo triangula TRC, GCF, quæ habent angulos TRC, GCF æquales, & circa hoſce angulos latera proportionalia, ſunt ſimilia: igitur angulus RCT = CFG: ergo TC eſt parallela DF, ſive potentiis AM, BN. Q. E. D.

Aio deinde, potentiam æquivalentem TC fore æqualem potentiis AM, BN. Ex punctis R, S ducantur RP, SQ parallelæ AB. Duo triangula AFD, RCP non ſolum ſunt ſimilia, ſed etiam æqualia propter æqualitatem laterum AF, RC: ergo CP = FD = AM. Eodem modo triangula GBD, CSQ propter æqualitatem laterum BG, SC non ſolum ſimilia ſunt, ſed etiam æqualia: ergo CQ = GD = BN, ſed CQ = TP: ergo TP = BN: ergo duæ ſimul CP + TP = TC = AM + BN. Q. E. D.

Si potentiæ AM, BN ad oppoſitas plagas traherent, tunc potentia æquivalens TC differentiæ potentiarum AM, BN æqualis inveniretur.

Aio poſtremo, potentias AM, BN eſſe in ratione reciproca diſtantiarum AK, BK. Namque DF, ſeu AM : KC : : AD : AK. Item KC : DG, ſeu BN : : BK : BD, ſeu AD. Ergo per rationem ex æquo perturbatam AM : BN : : BK : AK. Q. E. D.

Si AM, BN ad plagas contrarias ſolicitarent, eadem proportio omnino valeret, ſed punctum K caderet poſt puncta B, A ad partem maioris potentiæ AM.

Poſt hanc demonſtrationem nemini obſcurum eſſe poteſt, & circa punctum K dividens lineam AB in ratione potentiarum reciproca parallelas potentias in æquilibrio manere,

nere, & eaſdem iure optimo collectas intelligi poſſe in eodem puncto K; quod nihil aliud eſt, quam pro duabus potentiis æquivalentem ſubſtituere ipſis æqualem. Quæ duæ proprietates latiſſime patent, & conveniunt potentiis, quemcumque ipſæ angulum cum linea AB efficiant, dummodo maneant parallelæ, & eiſdem lineæ AB punctis applicatæ.

Quod de duabus potentiis, idem de tribus, de quatuor ec., immo de infinitis cuicumque corpori, ſuperficiei, aut lineæ applicatis hac progreſſione demonſtratur. Namque ſint plures potentiæ (*Fig.* 3) A, B, D ec. parallelæ applicatæ cuicumque maſſæ in punctis A, B, D. Iungatur AB, quæ dividatur in K in ratione reciproca potentiarum A, B: demonſtratum eſt potentias circa punctum K æquilibrium ubique facere, & in eodem puncto collectas intelligi poſſe. Intelligantur itaque in puncto K collectæ, & iungatur KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca A + B: D: patet circa punctum H potentias eſſe ſemper in æquilibrio, & in eodem collectas intelligi poſſe. Quæ ratiocinatio quum ad quotquot volueris potentias etiam infinitas extendi poſſit, palam eſt potentias parallelas eiuſmodi centrum habere, circa quod non ſolum in æquilibrio maneant, ſed etiam in eodem colligi poſſint, aut pro ipſis ſubſtitui una dumtaxat potentia ipſarum aggregato æqualis. Atque hoc punctum ſemper idem eſt, quacumque ratione maſſa convertatur, modo potentiæ maneant parallelæ, & applicatæ eiſdem maſſæ punctis in eiſdem ſemper reſpective diſtantiis: ut, ſi mota, & circumvoluta quocumque pacto maſſa, cuius partes eumdem reſpective ſitum retineant, ipſæ ſemper lineæ finienti perpendiculares exſiſterent.

Hæc ipſa eſt hypotheſis gravitatis corporum, quum eorum directiones parallelæ eſſe ſupponuntur; in qua hypotheſi ſingulis particulis corporis æqualibus potentiæ æquales, parallelæ, & perpendiculares horizonti applicantur. Igitur intra quæcumque corpora cuiuſcumque figuræ punctum invariabile exſiſtit, circa quod corpora quomodocumque ſuſpenſa æquilibrata quieſcunt, & in quo omnium partium gravitas iure optimo intelligitur collecta: quod centrum gravitatis appellatur.

Poſtquam demonſtratum eſt, potentias parallelas etiam

Ee 2 nume-

numero infinitas præditas eſſe centro æquilibrii conſtante, reliquum eſt, ut promiſſis ſatisfacientes methodos indicemus, quibus a doctiſſimis viris centrum idem eſt determinatum. Nemo unus non videt, rem expertem eſſe omnis difficultatis, ſi potentiæ ſint numero finitæ, & ſolummodo negotium faceſſere, ſi ſint numero infinitæ; ut ſi cuilibet puncto lineæ, aut ſuperficiei, aut corporis ſua potentia applicata fuerit. Duas methodos a ſcriptoribus uſurpatas video; prima uſi ſunt Varignonius in Ac. reg. 1714, Hermannus in Phoronomia, aliique bene multi. Alteram excogitavit, & in Ac. reg. 1731 expoſuit doctiſſimus Clairaut vir in rebus geometricis eximius.

Quod pertinet ad primam. Sint quælibet potentiæ A, B, D ec. applicatæ cuicumque corpori, quæ potentiæ ſibi ipſis ſemper parallelæ remaneant ex. ca. perpendiculares horizonti: aio fore, ut ducto quolibet plano, & ex punctis A, B, D ad illud demiſſis perpendicularibus AM, BN, DQ, item ex H communi gravitatis centro HO, valeat æqualitas $A . AM + B . BN + D . DQ = \overline{A + B + D} . HO$.

Accommodetur, & circumvolvatur corpus ſimul cum plano ita, ut potentiarum directiones ſint eidem normales. Tum iungatur AB, inventoque duarum potentiarum A, B æquilibrii centro K, normalis plano ducatur KP, & per punctum K ducatur RKS parallela MN ductæ in plano. Propter ſimilitudinem triangulorum RKA, SKB erit KB : KA : : BS : AR; ſed A : B : : KB : KA : ergo A : B : : BS : AR: igitur A . AR = B . BS: ſed A . AR eſt exceſſus rectanguli A . KP ſupra A . AM; & B . BS eſt exceſſus rectanguli B . BN ſupra B . KP: ergo A . AM : A . KP eſt arithmetice ſicut B . KP : B . BN: ergo $A . AM + B . BN = \overline{A + B} . KP$.

Iungatur iam KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca A + B : D: demittatur HO normalis plano, & ducatur per punctum H recta THV parallela PQ ductæ in plano. Propter ſimilitudinem triangulorum KHT, DHV erit HD : HK : : DV : KT; ſed A + B : D : : HD : HK : igitur A + B : D : : DV : KT: ergo $\overline{A + B} . KT = D . DV$; ſed $\overline{A + B} . KT$ eſt exceſſus rectanguli $\overline{A + B} . KP$ ſupra

A +

$\overline{A+B}.HO$, & $D.DV$ eſt exceſſus rectanguli $D.HO$ ſupra $D.DQ$: ergo $\overline{A+B}.KP : \overline{A+B}.HO$ eſt arithmetice ut $D.HO : D.DQ$: ergo $\overline{A+B}.KP + D.DQ = \overline{A+B+D}.HO$; ſed ex prima parte $\overline{A+B}.KP = A.AM + B.BN$: igitur $A.AM + B.BN + D.DQ = \overline{A+B+D}.HO$. Qui progreſſus quum ad infinitas etiam potentias extendi poſſit, conſequitur pro illis quoque propoſitionem æque valere.

Supervacaneum iudico advertere cum potentias ad plagam oppoſitam ſolicitantes, tum diſtantias cadentes ad alteram plani partem fore negativas, propterea ſigno — eſſe afficiendas. Iam vero vocentur ſingulæ potentiæ $= p$, earum ſumma $= Sp$, diſtantiæ ſingularum a plano dato $= x$, ſumma rectangulorum ex diſtantiis, & potentiis $= Spx$, diſtantia centri gravitatis a plano dato $= u$, erit ſemper $Spx = u.Sp$: ergo $u = \frac{Spx}{Sp}$. Q. E. I.

Methodum doctiſſimi Clairaut (*Fig.* 4) exponens, ut brevior ſim, paullo alia ratione utar ab ea, quam auctor ſequutus eſt. Sint potentiæ quælibet parallelæ applicatæ lineæ, vel ſuperficiei, vel corpori, quas per AEB deſigno, quarum æquilibrii centrum ſit K; item aliæ ſimiles deſignatæ per EBbe, quarum centrum æquilibrii conſtans ſit H; omnium autem centrum ſit k. Ab hiſce autem punctis ad quamlibet lineam datam demittantur normales, KP, kp, HO: perſpicuum eſt Kk : Hk : : EBbe : AEB : ſed Pp : Op : : Kk : Hk : ergo Pp : Op : : EBbe : AEB.

Iam vero ſint, ut ſupra, potentiæ parallelæ AEB, quarum quæritur centrum æquilibrii conſtans, applicatæ cuicumque lineæ, ſuperficiei, aut corpori, cuius axis aliquis ſit AB. Augeatur hic infiniteſimo elemento Bb, cui reſpondeant potentiæ EBbe. Illarum centrum æquilibrii conſtans ſit K, iſtarum H; omnium autem ſit k: quæ tria puncta in eadem linea recta conſtituta ſunt. Ab hiſce punctis demittantur in axem perpendiculares KP, kp, HO. Potentiæ AEB vocentur $= Sp$; potentiæ EBbe, quæ nihil aliud ſunt, quam illarum differentia $= p$, $AB = x$, $AP = u$, $Pp = du$. Ex paullo antedictis conſtat fore AEB : EBbe : : $Op = Bp =$ BP:

BP : Pp, ſive in ſignis analyticis Sp : p : : $x - u$: du : ergo du . S$p = px - up$, ſive du . S$p + up = px$, & integrando u . Sp = Spx, ſive $u = \frac{Spx}{Sp}$: quemadmodum etiam per methodum primam inventum eſt,

Dum invenitur AP $= u$, nihil aliud invenitur, quam diſtantia centri æquilibrii K, quod quæritur, a plano tranſeunte per punctum A, cui ſit rectus axis AB: ſed ſi hoc modo inveniatur diſtantia eiuſdem centri a tribus planis non parallelis, illud hac ratione determinabitur. Omitto caſus, in quibus methodus fieri brevior poteſt, neque formulas cuilibet hypotheſi applico: hæc enim obvia ſunt, & ubique a ſcriptoribus indicata.

De potentiis centrum petentibus.

Antequam potentias ad centrum tendentes conſiderandas ſuſcipio, neceſſe eſt, ut ſolutum exhibeam huiuſmodi geometricum

PROBLEMA.

In baſi AB (*Fig.* 5) dati trianguli ABC dato puncto K, ducere rectam RKS ad latera terminatam ita, ut RK = SK.

Accipiatur KM = AK, & a puncto M agatur MS parallela lateri CA, quæ alterum latus CB ſecabit in S. Ducatur SKR; aio hanc a puncto K diviſam eſſe bifariam.

Demonſtratio. Quoniam AR, MS parallelæ ſunt per conſtructionem, triangula RKA, SKM erunt ſimilia; ſed latera homologa AK, MK ex conſtructione æqualia ſunt: igitur triangula RKA, SKM non ſolum ſimilia ſunt, ſed etiam æqualia: ergo KR = KS. Q. E. D.

Potentias tendentes ad centrum, quas modo cepi conſiderare, pono creſcere, vel decreſcere, ut quæcumque functio diſtantiarum a centro, quam, ut generaliter exprimam, deſignabo littera f ita, ut fAC ſignificet functionem ex diſtantia AC, & conſtantibus utcumque compoſitam. Verum adverte, hanc non eſſe unicam rationem, ex qua

coa-

coaleſcunt potentiæ, ſed aliam conſtantem eſſe, quam eædem potentiæ tenerent poſitæ in eiſdem a centro virium diſtantiis. Energiam, qua præditæ ſunt potentiæ poſitæ in determinata quadam a centro diſtantia, quæ ad libitum accipi poteſt, indicabo nomine potentiarum abſolutarum. Itaque potentiæ erunt inter ſe in ratione compoſita potentiarum abſolutarum, & functionum quarumlibet diſtantiarum a centro. Hac definitione præmiſſa,

Virgæ rigidæ applicentur potentiæ abſolutæ A, B (*Fig.* 1) quas eiſdem litteris deſigno; diſtantiæ autem a centro C ſint AC, BC: ergo potentiæ erunt ut $A.fAC : B.fBC$. Supponatur K eſſe punctum æquilibrii, ex quo in AC, BC demittantur normales KP, KQ, & ex centro virium C in AB pariter normalis demittatur CO. Ut æquilibrium intercedat, neceſſe eſt ſe ſe habere $A.fAC : B.fBC :: KQ : KP$: ſed quum ſint ſimilia triangula KBQ, CBO erit $KQ : CO :: KB : CB$, & propter ſimilia triangula AOC, APK, $CO : KP :: CA : AK$: ergo $KQ : KP$ in ratione compoſita $\frac{KB : CB}{CA : AK} :: KB.CA : KA.CB$. Igitur $A.fAC : B.fBC ::$ $KB.AC : KA.BC$, ſive $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC} :: KB : KA$. Ut igitur habeatur punctum æquilibrii K, neceſſe eſt ut linea AB coniungens puncta, in quibus applicantur potentiæ, dividatur in ratione reciproca $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$.

Itaque punctum æquilibrii K reſpectu potentiarum conſtans erit, atque invariatum, ſi invariata, & conſtans ſit prædicta ratio: quod contingere nequaquam poteſt niſi $\frac{fAC}{AC} = \frac{fBC}{BC}$. Hoc autem in duplici dumtaxat hypotheſi locum habet: prima quum ubique $AC = BC$, ſeu quum partes finitæ additæ, vel detractæ lineis AC, BC illarum æqualitatem non deſtruunt; quod ſupponit eas eſſe infinitas, ſeu centrum C infinite diſtare; quæ hypotheſis cum ea coincidit, quæ potentiarum directiones ponit parallelas. Altera hypotheſis poſtulat, ut $AC : BC :: fAC : fBC$, quod idem

idem eſt, ac dicere, quum potentiæ creſcunt in ratione diſtantiarum a centro. In ceteris autem hypotheſibus punctum K mutat poſitionem in linea AB, prout eiuſdem lineæ poſitio reſpectu centri mutatur.

Advertendum eſt, in hypotheſi potentiarum creſcentium ut diſtantiæ a centro, punctum K dividere lineam AB in ratione reciproca potentiarum abſolutarum. Quapropter ſi hæ eædem potentiæ abſolutæ concipiantur mutare directionem ſuam verſus centrum, & parallelas directiones accipere, idem centrum æquilibrii habebunt, atque hoc conſtans. Quare methodi illæ, quibus in hypotheſi virium parallelarum centrum æquilibrii invenimus, & huic noſtræ hypotheſi poſſunt eſſe adiumento. Quod conſectarium etiam ex dicendis lucem accipiet.

Nunc perpendendum eſt (*Fig.* 5), utrum potentiæ abſolutæ intelligi poſſint collectæ in puncto æquilibrii K, vel hoc conſtans ſit, vel ſecus; ſive, quod idem eſt, utrum potentia æquivalens duabus potentiis abſolutis A, B poſitis in A, B ſit æqualis eiſdem potentiis poſitis in puncto K. Per punctum K ducatur ex præmiſſo problemate linea SKR, ut pars SK ſit = RK. Producatur CK donec KT = CK, ducanturque RT, TS, & efformetur quadrilaterum RTSC, quod ſine dubio erit parallelogrammum: nam, quum duo triangula RKT, SKC ſint ſimilia, & æqualia, RT, CS erunt parallelæ, & æquales.

Iam vero energiæ, quibus præditæ ſunt potentiæ abſolutæ A, B poſitæ in punctis A, B, erunt inter ſe ſe ut CR : CS. Nam ſi parallelæ AB ducantur RG, SF, quas eſſe æquales conſtat, erit

CR : CA : : RG : AK
CA : CB : : CA : CB
CB : CS : : BK : FS = RG : ergo CR : CS in ratione

compoſita $\frac{CA : CB}{BK : AK}$: : BK . CA : AK . CB : ſed ex ſupra demonſtratis BK . CA : AK . CB : : A . *f*AC : B . *f*BC : igitur CR : CS : : A . *f*AC : B . *f*BC : ſive ut potentiæ, quibus in punctis A, B præditæ ſunt potentiæ abſolutæ A, B. Q. E. D.

Itaque diagonalis CT exprimet potentiam æquipollentem duabus potentiis abſolutis A, B poſitis in punctis A, B. Iam

B. Iam vero producta RG, donec concurrat cum CB in H, erit CG : CF = TG : : GH : FS = RG : ergo componendo CG : CT : : GH : RH : : KB : AB : ſed quum ſit ex dictis $KB : KA :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBC}{BC}$, erit componendo $KB : AB :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$: ergo $CG : CT :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$: ſed RC : CG : : AC : KC : igitur RC : CT in ratione compoſita $\frac{A.fAC}{AC} : \frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}$; ſive

$$AC : KC$$

$$RC : CT :: A.fAC : \frac{A.KC.fAC}{AC} + \frac{B.KC.fBC}{BC}.$$

His inventis voco P energiam potentiarum abſolutarum A, B poſitarum in K. Perſpicuum eſt fore $RC : P :: A.fAC : \overline{A+B}.fKC$. Igitur $CT : P :: \frac{A.KC.fAC}{AC} + \frac{B.KC.fBC}{BC} : \overline{A+B}.fKC$: ergo potentia æquivalens duabus abſolutis A, B poſitis in A, B ad potentiam earumdem poſitarum in K eſt, ut $\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC} : \frac{\overline{A+B}.fKC}{KC}$.

Porro hæc non poteſt eſſe ratio æqualitatis, niſi aut AC = BC = KC, quod verum eſt in hypotheſi centri infinite diſtantis; aut fAC = AC, quod dat hypotheſim potentiarum creſcentium, ut diſtantiæ a centro. In ceteris hypotheſibus eſt ſemper ratio inæqualitatis. Quare ad gravitatem quod ſpectat, ſi duas haſce excipias, in nulla hypotheſi fieri poteſt, ut iure bono concipiatur collecta omnium partium gravitas in puncto æquilibrii; potentia enim æquivalens gravitatibus corporum A, B poſitorum in A, B non eſt æqualis gravitati eorumdem corporum poſitorum in K.

Hypotheſis autem potentiarum creſcentium, ut diſtantiæ a centro, quando duabus illis ornata eſt proprietati-

 bus,

bus, quas demonſtravimus convenire potentiis parallelis, ſcilicet ut duæ potentiæ habeant centrum æquilibrii conſtans, & ut collectæ intelligi poſſint in eodem centro æquilibrii, in dubitationem cadere nullo pacto poteſt, quin adhibita eadem ſerie, qua uſi ſumus in potentiis parallelis demonſtrari idem poſſit de tribus, quatuor &c. immo de infinitis potentiis. Qua de re omnia corpora gravia in hac hypotheſi centrum gravitatis obtinebunt, ex quo, ſi ſuſpendatur quacumque ratione corpus, æquilibrium ſervabit, & in quo omnium partium gravitatem licet collectam intelligere.

Reliquum eſt, ut methodos exhibeamus, quibus in hypotheſibus virium tendentium ad centrum, inveniri centrum æquilibrii poteſt. Duabus methodis in hypotheſi virium parallelarum uſi ſumus. Utraque tentanda eſt, & rei, qua de agimus, accommodanda. Demonſtravimus nuper, duabus potentiis abſolutis A, B (*Fig.* 6) poſitis in A, B, ſive $A \cdot fAC + B \cdot fBC$ æquivalere potentiam $KC \cdot \overline{\frac{A \cdot fAC}{AC} + \frac{B \cdot fBC}{BC}}$. Quare ſi quæratur potentia abſoluta K collocanda in puncto K efficiens idipſum, quod efficiunt potentiæ abſolutæ A, B poſitæ in punctis A, B debebit $K \cdot fKC$ æquare potentiam æquivalentem potentiis A, B poſitis in A, B: ergo $K \cdot fKC = KC \cdot \overline{\frac{A \cdot fAC}{AC} + \frac{B \cdot fBC}{BC}}$: igitur

$$K = \frac{KC}{fKC} \cdot \overline{\frac{A \cdot fAC}{AC} + \frac{B \cdot fBC}{BC}}.$$

Addatur iam tertia potentia D, & H ſit centrum æquilibrii duarum potentiarum K, D, erunt ex prima parte potentiæ $K \cdot fKC + D \cdot fDC$ æquipollentes $HC \cdot \overline{\frac{K \cdot fKC}{KC} + \frac{D \cdot fDC}{DC}}$. Pro $K \cdot fKC$, & $\frac{K \cdot fKC}{KC}$ eorum valores ſubſtituantur, & fient $KC \cdot \overline{\frac{A \cdot fAC}{AC} + \frac{B \cdot fBC}{BC}} + D \cdot$

fDC

fDC æquipollentes $HC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}+\frac{D.fDC}{C}}$: atqui ex prima parte $KC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}}$ æquipollent $A.fAC+B.fBC$: igitur $A.fAC+B.fBC+D.fDC$ æquivalent $HC.\overline{\frac{A.fAC}{AC}+\frac{B.fBC}{BC}+\frac{D.fDC}{DC}}$.

Hic autem progreſſus quum produci poſſit in infinitum, conſequitur etiam de infinitis potentiis propoſitionem valere. Quare ſi vocentur potentiæ abſolute $=p$, earum diſtantiæ a centro virium $=z$, diſtantia centri æquilibrii a centro virium $=t$, & per ſignum S denotetur ſumma; potentiis omnibus manentibus in loco quæque ſuo, quas deſigno per $Sp.fz$ æquivalet potentia $tS\frac{p.fz}{z}$, quæ debet intelligi applicata in centro æquilibrii.

Si formulam aptemus hypotheſi, in qua potentiæ ſunt, ut diſtantiæ a centro, tunc $Sp.fz$ poſitis potentiis in ſuis reſpective locis æquivalet potentia tSp. Quæ formula ſatis indicat illud, quod alia ratione deduximus: nimirum omnes potentias abſolutas ſitas in centro æquilibrii idem efficere, ac facerent poſitæ in ſuo quæque loco.

Ceterum neque in hac hypotheſi, neque in aliis per hanc methodum inveniri poteſt quantitas t, quæ eſt diſtantia centri æquilibrii a centro virium; non enim inter potentias $Sp.fz$, & $tS\frac{p.fz}{z}$ datur æqualitas, ſed tantum æquipollentia. Quare niſi res ad æqualitatem redigatur fieri non poteſt, ut æquilibrii centrum reperiatur. Redigi autem poſſe ad æqualitatem hac ratione exiſtimo.

Ducatur per centrum C quælibet linea CM, ad quam ex punctis A, B, ubi duæ potentiæ applicatæ ſunt, demittantur normales AM, BN, item KP ex centro æquilibrii K. Quoniam eſt ex demonſtratis $BK : AK :: \frac{A.fAC}{AC} : \frac{B.fBK}{BC}$.

 Item

Item BK : AK : : NP : MP erit NP : MP : : $\frac{A . fAC}{AC} : \frac{B . fBC}{BC}$; ergo $\frac{A . fAC}{AC} . MP = \frac{B . fBC}{BC} . NP$: atqui $\frac{A . fAC}{AC} . MP$ eſt differentia rectangulorum $\frac{A . fAC}{AC} . MC$, & $\frac{A . fAC}{AC} . PC$; & $\frac{B . fBC}{BC} . NP$ eſt differentia rectangulorum $\frac{B . fBC}{BC} . PC$, & $\frac{B . fBC}{BC} . NC$: igitur $\frac{A . fAC}{AC} . MC : \frac{A . fAC}{AC} . PC$ eſt arithmetice, ut $\frac{B . fBC}{BC} . PC : \frac{B . fBC}{BC} . NC$: ergo $\frac{A . fAC}{AC} . MC + \frac{B . fBC}{BC} . NC = PC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$.

Addatur tertia potentia D, & comparetur potentia abſoluta $K = \frac{KC}{fKC} . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$ cum potentia D, quarum centrum æquilibrii ſit H. Ducantur HO, DQ normales rectæ CM : erit ex prima parte $\frac{K . fKC}{KC} . PC + \frac{D . fDC}{DC} . QC = OC . \overline{\frac{K . fKC}{KC} + \frac{D . fDC}{DC}}$, & pro $\frac{K . fKC}{KC}$ eius valore ſubſtituto, erit $\overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}} . PC + \frac{D . fDC}{DC} . QC = OC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC} + \frac{D . fDC}{DC}}$, ſive ex prima parte $\frac{A . fAC}{AC} . MC + \frac{B . fBC}{BC} . NC +$

D . f

$$\frac{D\,.\,fDC}{DC}\,.\,QC = OC\,.\,\overline{\frac{A\,.\,fAC}{AC} + \frac{B\,.\,fBC}{BC} + \frac{D\,.\,fDC}{DC}}\,.$$

Qui progreſſus, quum in infinitum produci poſſit, conſequitur de omnibus potentiis veram eſſe propoſitionem. Quare retentis ſuperioribus denominationibus vocentur MC $= x$, intercepta inter normalem cadentem a centro æquilibrii, & centrum virium $= u$, erit $S\frac{px\,.\,fz}{z} = u\;S\frac{p\,.\,fz}{z}$, ſive $u = \frac{S\frac{px\,.\,fz}{z}}{S\frac{p\,.\,fz}{z}}$. Quæ formula prorſus valeret, etiamſi linea aſſumta non tranſiret per centrum C. In qualibet enim parallela rectæ CM æquales partes abſcinderentur a perpendicularibus, ac in CM; immo initium x, & u, modo ſit unum idemque, in quolibet puncto aſſumi poteſt: quod breviter adnotaſſe ſufficiet.

Ad methodum doctiſſimi Clairaut quod ſpectat, ita noſtræ hypotheſi accommodari poſſe videtur. Si fuerint, quot volueris potentiæ, (*Fig.* 4) quæ tendant ad centrum C, quarum centrum æquilibrii ſit K; item aliæ quarum centrum æquilibrii H; centrum autem omnium ſit k: quæ tria puncta in eadem linea recta ſita ſint, neceſſe eſt. Ex hiſce punctis in lineam poſitione datam AB demittantur normales KP, kp, HO. Quoniam ex demonſtratis potentia æquivalens omnibus potentiis, quarum centrum K, diviſa per diſtantiam KC eſt ad potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum H, diviſam per HC, ut Hk : Kk, erit etiam ut Op : Pp.

Iam vero ſint infinitæ potentiæ tendentes ad centrum C, quarum centrum æquilibrii K quæritur. Earum aliquis axis ſit AB. Repræſentetur ab AEB ſumma rectangulorum $\frac{p.fz}{z}$ ita, ut AEB $= S\frac{p\,.\,fz}{z}$. Augeatur AB quantitate infiniteſima Bb, cui reſpondeat BbeE, quod proinde $= \frac{p\,.\,fz}{z}$. Hac additione facta, novæ etiam potentiæ adduntur, quarum

rum centrum ſit H. Centrum autem omnium ex K tranſit in k. Vocetur KC $= t$, HC $= r$. Conſtat potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum K $= t\ S\frac{p \cdot fz}{z}$, & omnibus quarum centrum H $= r . \frac{p \cdot fz}{z}$; ergo prima diviſa per t ad ſecundam diviſam per r ſe ſe habebit, ut $Op : Pp$. Vocetur AB $= x$, AP $= u$, & $Pp = du$. Itaque erit $S\frac{p \cdot fz}{z} : \frac{p \cdot fz}{z} :: x - u : du$, ſive $du\ S\frac{p \cdot fz}{z} + u . \frac{p . fz}{z} = \frac{px . fz}{z}$: igitur integrando $uS\frac{p \cdot fz}{z} = S\frac{px \cdot fz}{z}$; atque adeo $u = \frac{S\frac{px \cdot fz}{z}}{S\frac{p \cdot fz}{z}}$: quæ formula prorſus coincidit cum ea, quam per primam methodum ſupra invenimus.

Si utramque methodum ſedulo conſideres, non duas eſſe perſpicies, ſed unam eamdemque oppoſitis rationibus progredientem. Utraque enim refert potentias, earumque centra ad lineam poſitione datam: ſed prima ſyntheticam rationem iniens a duabus potentiis progreditur ad tres, deinde ad quatuor, atque ita ad infinitas: ſecunda analytica ratione utens ſupponit centrum, quod quæritur; illudque per methodum infinite parvorum, additis potentiis reſpectu reliquarum infiniteſimis, promovet: tum ad potentias duas æquipollentes tam potentiis datis, quam additis proprietatem aptat, qua reſpectu centri æquilibrii duæ potentiæ præditæ ſunt. Verum hæc methodus inutilis fuiſſet, niſi antea per diſtantiam centri æquilibrii a centro virium ſynthetica ratione potentiarum etiam infinitarum inventa fuiſſet potentia æquipollens centro æquilibrii applicanda.

Punctum illud, in quo normalis ducta a centro æquilibrii ſecat lineam poſitione datam appellabo veſtigium centri æquilibrii in linea poſitione data. Si per veſtigium centri æquilibrii ducatur planum, cui linea poſitione data ſit perpendicularis, in hoc plano centrum æquilibrii inexſiſtit

ſtit quidem certe. Quoniam autem formula ſatis indicat in qualibet linea poſitione data inveniri poſſe veſtigium centri æquilibrii, aſſumantur tres lineæ non parallelæ, quarum omnium poſitio data ſit, in quibus omnibus veſtigia centri æquilibrii determinentur. Per hæc tria plana ducantur, quibus rectæ aſſumtæ normales ſint, punctum tribus planis commune, idipſum eſt centrum æquilibrii, quod quæritur.

Si formula contrahatur ad hypotheſim potentiarum proportionalium diſtantiis a centro, multo fit ſimplicior, atque elegantior. Mutatur enim in hanc $u = \frac{Spx}{Sp}$: a qua notandum eſt, diſtantias potentiarum a centro omnino abeſſe, quod indicio eſt, centrum æquilibrii eſſe conſtans, quamcumque poſitionem habeant potentiæ abſolutæ reſpectu centri virium, dummodo eamdem ſervent poſitionem inter ſe ſe. Nam finge animo, aut virgas rigidas, aut corpus, cui applicatæ ſunt potentiæ, ſimul cum linea poſitione data, in qua eſt veſtigium centri æquilibrii, quacumque ratione moveri, aut accedere, aut recedere a centro virium, aut circa aliquod punctum revolvi; profecto idem reſpectu potentiarum manebit centri æquilibrii veſtigium: ergo etiam centrum æquilibrii: quam proprietatem alia ratione antea demonſtravimus.

Advertendum eſt etiam, formulas pertinentes ad hypotheſim virium parallelarum, & virium creſcentium, ut diſtantiæ a centro eſſe unam, eamdemque; ex quo colligitur, unum eſſe, idemque centrum æquilibrii in utraque hypotheſi; quam proprietatem ſupra item demonſtratam vidiſti.

Hæc quidem de centro æquilibrii inveſtiganda, atque demonſtranda mihi propoſui: ex quibus perſpicuum eſt duas ſolummodo exſiſtere hypotheſes, in quibus non mutata potentiarum inter ſe poſitione centrum æquilibrii conſtans eſt, in eoque omnes potentiæ abſolutæ collectæ intelligi iure optimo poſſunt. In reliquis & centrum æquilibrii mutatur, & potentia omnibus æquivalens non eſt æqualis energiæ omnium potentiarum in centro æquilibrii poſitarum.

Ve-

Verum rationes indicatæ ſunt, & formulæ exhibitæ, per quas & potentia æquivalens, & centrum æquilibrii in hypotheſi quacumque determinatur.

PETRI

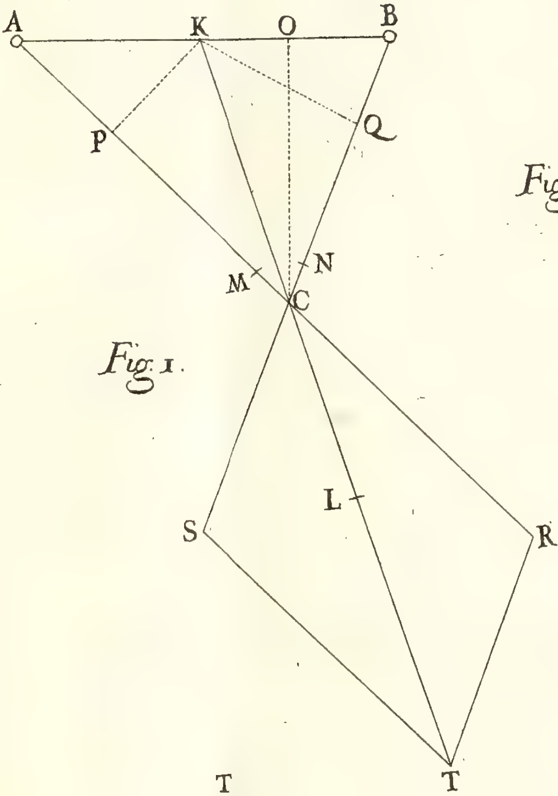


Fig. 1.

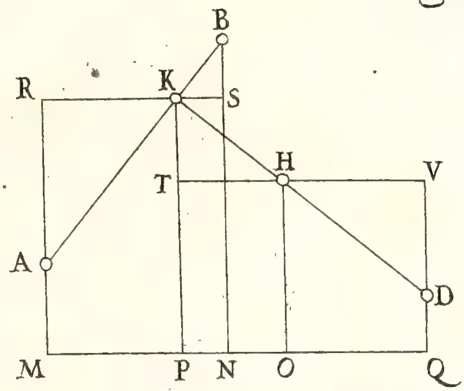


Fig. 3.

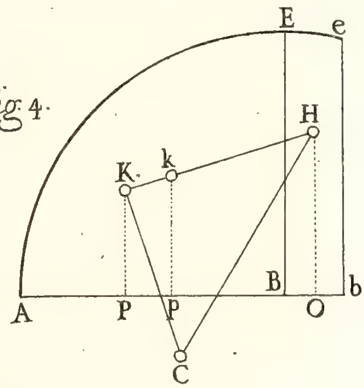


Fig. 4.

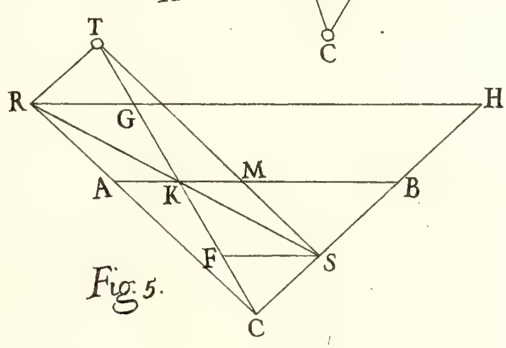


Fig. 5.

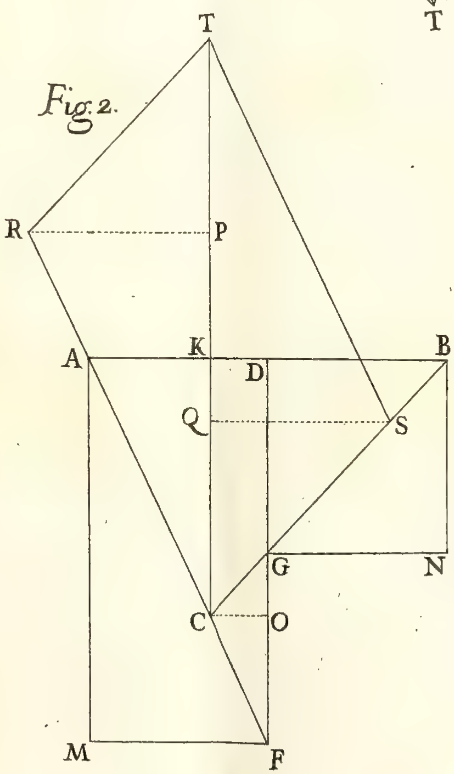
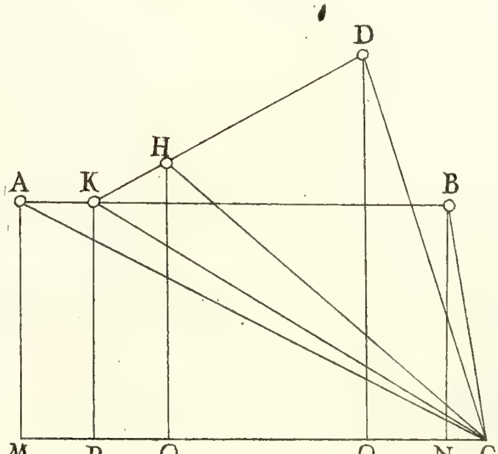


Fig. 2.



PETRI TABARRANI

De thermometrorum peculiari correctione nunc primum excogitata.

Accedit

Epiſtola de fonticulo quodam.

NOn dubito fore pleroſque, Sodales ornatiſſimi, qui hanc meam de thermometris diſſertatiunculam ſuperfluam hiſce temporibus iudicent, quum viros de Philoſophia optime meritos varia, & multiplicia commenta hac ſuper re ſcripſiſſe legent: ſed hi ſciant velim me pauca iccirco commemorare, quæ eorumdem correctioni, atque illuſtrationi tantum inſervire valent. Oblata autem mihi ea primo occaſione, pro meo ſtudio meritam gratiam debitamque, Optimi Viri, eius honoris cauſa referre expedit, quem proximis diebus mihi habuiſtis, ut in veſtrum præclariſsimum cœtum congregarer.

II. Optima, vel ſaltem optimis proximiora eſſe thermometra mercurio conſtructa apud noſtrates philoſophos in confeſſo eſt, (*a*) ſiquidem alia, ne Florentinis quidem exceptis,

(*a*) *Halley Phil. Tranſ. & n.* 197. *Boerh. elem. Chem. tom.* 1. *exper.* XIV *coroll.* 3 *ſch. p. m.* 41. *Muſſchenb. tentam. exper. nat. cap. in Acad. del Cim. p.* 8. *Elem. phyſ. n.* 557. „ *Etenim mercurius, cum fuerit ab omni fœditate purgatus, eiuſdem eſt naturæ ubicumque terrarum, ac tubis incluſus nullam patitur commutationem: præterea eſt ſimillimum veri, vel eidem expanſioni, & condenſationi per eumdem caloris, vel frigoris gradum, poſtquam Phyſicis eum bene purificaſſe placuerit, ubi vis gentium obnoxium eſſe ec.*„ *De l' Isle Mémoire pour ſervir à l' hiſtoire Petersb.* 1738.

ceptis, atque a clariſſimo Reaumurio correctis (*a*), pluribus ſcatent vitiis, (*b*) quorum aliquo nec eadem ex mercurio conſtructa, ac in præſens vulgo adhibita deficiunt; quod vitium in eodem conſiſtit vitro, cuius capacitatem aliquantum calore dilatari, itidemque frigore comprimi luculenter cernitur (*c*), quo fit, ut vera, & iuſta rarefactio, & condenſatio mercurii, vel alterius liquoris, quo thermoſcopia ſint confecta, nullatenus haberi poſſit (*d*).

III. Qua de re quamvis nullus amplius ambigeret, nihilo tamen ſecius in celeb. Academia, quæ Petersbourgi eſt, proximis annis non defuit, qui animi penderet; quamobrem Bulſſingero, qui tum ibidem tamquam academicus morabatur, quædam vitri peculiaris forma, concava nimirum, atque convexa, ſcutellæ inſtar conflata in mentem venit (*Fig.* 1), qua eam vitri affectionem a philoſophis iamdiu cognitam, indicatamque plane ſancire non dubitavit. Eiuſmodi ergo vitrum hic tum adhibuit, eventuſque adamuſſim accidit, ut vir clariſsimus arbitrabatur; etenim inflexo tubo illi annexo, thermometrum conſtruxit, cuius convexa ſuperficie coram academicos madefacta, liquor in tubo contentus, *ſaltulum* ſic dictum inferius agebat, contra vero eveniebat in eius concavam vitri ſuperficiem eadem calida infuſa: itidem utrumque contra accidebat, ſi clariſsimus auctor pro calida frigida utebatur: (*e*) quapropter memoratam vitri affectionem ſine ulla contentione, atque dubitatione tali ſic eius forma excogitata manifeſto confirmavit; quo fit, ut vel de thermometrorum vitio modo deſcripto, quod eſt ex eis quinctum, quæ clariſs. Muſſchenbroeckius memorat, (*f*) nullus in præſens dubitet.

IV.

(*a*) *Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences an.* 1730.

(*b*) *Muſſchenbr. loc. cit.*

(*c*) *Sag. di natur. exper. pag. m.* 178 *Hiſt. de l'Académie des Sciences année* 1700, 1710.

(*d*) *Vitrum ipſum* [inquit Muſſchenbr. loc. cit.] *capacius fit calore, anguſtius frigore; quare rarefactiones liquoris adſcendentis minores cernuntur, deſcenſus enim minores, quam ſi vas, uti par erat, pro experimentis, ſemper æque capax maneret.*

(*e*) *Comment. Acad. Scient. Imper. Petrop. tom. III. p* 242.

(*f*) *Quinctum*, inquit, *vitium tolli hucuſque non potuit loc. cit.* 537.

IV. Cum igitur, Sodales ampliſſimi, Romæ duobus ante annis ad conſtruenda thermometra ſecundum Farheneitii, & Muſſchenbroeckii methodum me applicuiſſem, mente, & cogitatione verſare cœpi, quomodo ei thermoſcopiorum vitio mederi poſſem; quamobrem cum experimentis faciundis variis thermoſcopiis eodem clariſſimo Bulffingeri vitro, aliiſque ei ſimillimis conſtructis una cum clariſſimo Leprotto (occaſionem nacti Petri Caſati præſtantis Vitrarii, qui tum forte Romæ aderat) intentus eſſem, cœpi egomet mecum ſic cogitare, utrum videlicet thermometra eo Bulffingeriano vitro confecta memorato vitio immunia forent: cui rei magnopere ſum aſſenſus, intelligendo in thermometris eo vitro conſtructis, ſi utraque ſcilicet eiuſdem ſuperficies, concava nimirum, atque convexa cum agilitate eodem inſtanti madefieret, nullum *ſaltulum* fieri, verum quamdam tantummodo commotionem, ſeu tremorem *ſaltuli* vice obſervari, ab actione caloris, vel frigoris in utraque ſuperficie, concava videlicet, atque convexa, per idem tempus productum: indicium certum, ut liquet, quod in alternis caloris, & frigoris viciſſitudinibus id omne, in quo convexa deficit ſuperficies, concava omnino ſuppleat: ceterum haſce ambas ſuperficies æquidiſtantes, quam maxime poteſt, vitrarius ducat oportet; tum enim altera alteram ſuperficiem melius ſupplebit.

V. Id omne, Sodales, cum præſtantiſſimo Leprotto iam tum contuli, idemque, ut per litteras clariſſimum Muſſchenbroeckium conſulerem, quid ipſe ſentiret, mihimetipſi auctor fuit, quod mox hic tum feci, mihique quamvis eidem nec nomine forſitan noto, tamen benevole vir experientiſsimus non modo reſpondit, curam meam approbans, & laudans, ſed etiam de rebus quibuſdam ad proba paranda thermometra non parum utilibus, & neceſſariis, ſincere loquens monuit, quemadmodum ex ſuapte epiſtola ſub huius finem diſſertatiunculæ appoſita intelligetur.

VI. Mea igitur emendatio, ut quiſque veſtrum, Sodales, percipit, ab eo Bulffingeriano vitro orta eſt; ita ut, ſi hæc mea correctio nonnihili ſit æſtimanda, maior ſane laus eidem clariſſimo Bulffingero habenda ſit, qui ob rationem, quam ſupraſcripſi N. III, eiuſmodi vitrum concavum excogitavit, quam mihimetipſi, qui id vitrum ad conſtruenda

thermometra, eo ut commemorato vitio immunia forent, tantummodo adhibui.

VII. Præterea hæc mea thermometra interim dum ego una cum iis, quæ conſueto cylindro prædita ſunt, conſtruebam, calorem frigusque ſemel appræhenſum citius amittere quam ea, plane intellexi: & cur ita accidat, unumquemque non latet, ſiquidem eadem præterquamquod vitris conſtent bene craſſis, ſupereſt cylindrica maſſa mercurii, quam arreptum calorem vel frigus non tam cito dimittere conſtat: contra vero illa duabus exilioribus vitreis ſuperficiebus, atque uno tantum, ut ita dicam, mercurii plano ſcatent; tum etiam maiori donantur ſuperficie, quam eadem cylindris prædita; quibus ex rebus fit, ut liquorem contentum caloris, frigoriſque externi actio celerrime afficiat; ad ſummam ea thermometra promptiora quibuſcumque aliis, atque expeditiora fore ad oſtendendas caloris, vel frigoris perennes mutationes neutiquam eſt dubitandum.

VIII. Super hæc animadvertendum, Sodales, quod clariſſimus Farheneitius ob maiorem, qua pollent, ſuperficiem, ſphærarum vice, ut calor vel frigus celerrime penetrare, ac afficere poſſet liquorem thermometri, cylindros adhibuit (*a*): præterea ſummus philoſophus Boerhaavius thermometrum, vulgo dictum Drebbellii, emendavit, ſenſibiliuſque reddidit peculiari ampulla ex binis ſegmentis ſphæricis, nec minime diſtantibus loco ſphæræ ſubſtituta, eo ut vas compreſſum evaderet (*b*): eadem hac ideo ratione quo magis poſtrema hæc omnia illis, alterum tantum noſtra Bulffingeriano vitro, ut dictum eſt, conſtructa, his ſingulis antecellere iure, ac merito dicendum eſt.

IX. Has igitur ob cauſas hanc meam emendationem illi eidem, quam præcla: Muſſchenbroeckius tradit (*c*), niſi me animus fallit, plane antepono, ſiquidem vir doctiſſimus cylin-

(*a*) *Ut autem*, inquit, *thermometra ab omnibus caloris mutationibus afficiantur, loco globulorum cylindris vitreis ſunt prædita; eo enim modo ob maiorem ſuperficiei quantitatem citius a variatione caloris penetrantur ec. The. Philoſoph. Tranſact. Abridgd. vol. v. par. II. III. IV. p.* 52.

(*b*) *Elem. Chem. tom.* I *exper.* III. *pag. m.* 76. *Tab.* 2 *Icon.* III.

(*c*) *Elem. de Phyſiq. tom. I. cap. xxvi. n.* 953.

cylindris vitreis utitur, queis exquiſite, ut dictum eſt, obſervare non accidit, velut in meis concavis impreſſiſve ſphæris animadvertitur, perennes mutationes frigoris, caloriſve, in atmoſphæra, ut ſatis unicuique notum eſt, obvenientes. Attamen præcipuam cauſam, ob quam cylindrus fuit ſphæræ ſubſtitutus, graviſſimus auctor in annexa, quam ſupra dixi, epiſtola, eo fuiſſe ſcribit, ut proportio inter utramque ſuperficiem, cylindri ſcilicet & tubi, facilius determinaretur; etenim, hoc modo, inquit, ad unam eamdemque ſcalam probe accommodata, & concordia habentur thermometra; id autem, ultro ait, his meis concavis ſphæris obtinere difficile eſt: porro id omne, Sodales, haud inficior, ſed vel in iis, quæ cylindro conſtructa ſunt, ſatis ſuperque laborioſum evadit opus; ita ut memoratam peræquam proportionem niſi per libellam melius accommodari poſſe intellexi, ponderando ſcilicet mercurium in cylindro, ſeu concavo Bulffingeriano vitro non ſemel enunciato contentum, ut habeatur tantummodo quantitas, quæ pro tubo annexo ſumenda eſt, qua item methodo idem vir clariſſimus de l'Isle uſus eſt (*a*): verumtamen ſingulis his rebus unum, aut alterum thermometrum conſtructum eſſe tantum ſat eſt, nam cetera quotlibet ſecundum ea accommodari poſſe hic idem vir clariſſimus nos monet; dummodo tamen liquor thermometri quocumque, vel maximo frigore glaciali, ſeu artificiali in phialam nequaquam deſcendat, ſed nonnihil in tubo tunc temporis remaneat; ſiquidem unus ex terminis ſcalæ faciundæ, ut oſtendam paulo poſt, ibidem ſumendus eſt.

X. Altero præterea vitio ſubiiciuntur thermometra, de quo nulla a philoſophis, quod ſciam, fit mentio; etenim thermometris in recipiente vitreo, ſic dicto, machinæ pneumaticæ poſitis, interim dum aer, ut adſolet, eo extrahitur, liquorem thermometri (in meis præſertim ſcutellæ inſtar, ut dictum eſt, confectis) N. IV in tubum aliquantum deſcendere animadvertitur: contra vero ibidem aere introeunte, eumdem liquorem in tubum adſcendendo inibi redire protinus obſervatur; quod indicia plana affert, quantum ego perſpicio, memoratum liquorem ab aeris pondere ſuper

(*a*) *Mémoire pour ſervir à l' Hiſtoire ec.*

per vitri parietes premente plus æquo ſuſpenſum teneri: quod vitium tamen facillime tolli poteſt, diſponendo videlicet terminos ſcalæ conflandæ, eo ut vera thermometri altitudo, vel eius vitri reſpectu, ſemper habeatur, ubi dictum liquorem deſcendere cernitur, thermometro in vacuo Boyleano locato: attamen eum thermometri in memorato vacuo deſcenſum clariſſimo noſtro ſodali Galeatio contigit, ut videret, varia experimenta in hoc veſtro ſcientiarum Inſtituto ſuis auditoribus faciendo.

XI. Philoſophi etiam nunc conſtructis thermometris, atque omni aere per ignem vindicatis, obſtruxerunt, ac *hermetice*, ut dicunt, *ſigillarunt*: unus, quod ſciam, non ſemel commemoratus vir clariſſimus de l'Isle thermometra aperta relinquit, quod cuidam ex meis amicis, Romæ cum eſſem, minus arridebat; ſiquidem aiebat ab aeris columnula ita premendum, urgendumque liquorem thermometri, ut veræ eius altitudini hæc eadem preſſio impedimenta inferre valeat; quamobrem tum mihi experiri placuit, ſi ita vel aliter accideret, ac amicus opinabatur; idque tamen feci duobus thermometris ſupra altitudinem per ignem elevatis, ibidemque *hermetice ſigillatis*, ad quam in aquam ferventem immerſa aſcendere ſolent: ſic igitur ea parata thermometra, tam in aquam ferventem, quam in idem Reaumurii conſtans artificioſum frigus mox deſcribendum immerſi, atque eius aſcenſum, deſcenſumque in tubo notavi; tum demum iiſdem thermometris de integro patefactis, eademque, ut ſupra, repetita operatione, ad eadem adamuſſim ſigna, quæ in tubo ante notaveram, aſcenderunt, deſcenderuntque thermometra. Ex eo igitur, Sodales, unuſquiſque veſtrum colligere poteſt, caloris frigoriſque viciſſitudines, quæ in atmoſphæra aſſidue contingunt, thermometra ad eamdem apta ſcalam, vel clauſa, vel ſint aperta, peræque oſtendere.

XII. Notandum etiam, Sodales, quod ſi quis (*a*) thermome-

(*a*) *Vide implendi thermometra, purgandi liberandique ab omni aere mercurii, methodum apud clariſſimum Muſſchenbroeckium Commentar. ad tentam. exper. nat. cap. in Acad. del Cim. pag.* 12. *Eſſai de phyſiq. chap. xxvi. n.* 948: *quod facillime obtinetur noſtra præſertim vitra adhibendo, quæ tertia figura donata ſunt.*

mometra obſtructa velit, [quæ nihilominus plus mihi arridenr, quamvis ſit opus laborioſius, quam ea, quæ aperta relinquuntur, ſiquidem pulvis, humidumque, quod eſt in aere, obducere tubos poterit, opacoſque reddere] interim dum parat, nimium igne, vel alia quacumque re vitrum minime torquere ſtudeat; etenim ex his quædam, quæ iam optima evaſerant, *hermetice ſigillata* non ſemel patefeci, quæ poſterius quacumque diligentia adhibita, perfecta non plane ut antea, cum fuerint de integro obſtructa, nequaquam redierunt; præclare enim conflata thermometra, notante clariſſimo viro Petro Van Muſſchenbroeckio [*a*], ad idem adamuſſim ſignum in glaciem immerſa cum aperta, tum clauſa deſcendant oportet. Ceterum ut unuſquiſque præſtantiora, quammaxime poteſt, thermoſcopia conſtruat, vel omnia ea, quæ mihi memoratus vir clariſſimus per litteras notum fecit, animadvertat (*b*).

XIII. Venio nunc, Sodales, ad thermometrorum ſcalam, quam inter binos terminos thermometrorum tubulo (*c*) appoſitos cum ſolertiſſimo Reaumurio conflandam eſſe opinor, quorum alter fervens aqua eſt, alter vero frigus interim dum aqua conglaciatur frigoribus; ſiquidem utrumque ſatis commodum fore, vel ego exiſtimo: cum hunc eumdem philoſophi conſtantem, & firmum ubivis gentium experti ſint: de illo certiores facti iam fuimus, ut notum eſt, a clariſſimo Amontonſio in monumentis regiæ ſcientiarum Academiæ; (*d*) de eo vero poſſum egomet vobis exponere

(*a*) *Comment. ad tentam. exper. natur. cap. in Acad. del Cim. loc. cit.*

(*b*) *Epiſt. ad fin.*

(*c*) *Hos tubulos magni refert per totum ſpatium ſcalæ faciundæ æquales, quoad fieri poteſt, fore neceſſe eſt, ut thermoſcopia habeantur æqualiter deambulantia, quam rem, quomodo obtinere valeamus, neminem melius oſtendiſſe video præter non ſemel memoratum de l'Isle* [*loc. cit.*], *curando videlicet, ut mercurii portio per univerſam tubi cavitatem excurrat, ac per idem tempus ſpatia, quæ mercurius excurrendo tranſit, circino metiendo, ii tantum ſeligantur ad ſphærulas noſtras adnectendi, qui relata æqualitate donati ſunt.*

(*d*) *Attamen, ut hoc præclarum inventum verum, & abſolu-*

nere, clariſſimi viri, quod vel Romæ, quemadmodum Lutetiæ pariſiorum accidit, atque Amſtelodami, eumdem frigoris gradum eius effectus ergo ex non ſemel laudato Leprotto intellexerim; qua de re eumdem clariſſimum Muſſchenbroeckium proximis diebus monui; id ſcire, ut infra videbitis, aventem. (*a*)

XIV.

---

tum omni tempore evadat, atmoſphæræ pondus in barometro animadvertendum eſt, idemque in thermoſcopiorum præſertim conſtructione unuſquiſque diligenter attendat oportet, ſiquidem quo maius eſt pondus atmoſphæræ, animadvertente clariſſimo Farheneitio, eo maior item calor eſt aquæ ebullientis; contra vero calor aquæ imminuitur, quoties incumbentis atmoſphæræ pondus imminui videtur; hinc ait doctiſſimus Boerhaavius: igitur in gradu caloris aquæ ferventis deſignando apprime neceſſarium eſſe, ut annotetur ſimul pondus aeris in barometro, cum aliter nihil certi ſcribatur. Dum interea verum omnino eſt, quod illa aqua, quæ ebullit, dum atmoſphæræ pondus manet idem, numquam plus caloris concipere augmento ignis. Unde hoc modo emendata regula amontonſiana ſemper vera habetur. Elem. Chem. par. alt. de art. theor. exper. vi. p. m. 84.

(*a*) *Sub finem anni proximi* 1746 *in manus pervenit meas opuſculum quoddam gallice editum, quod continet deſcriptionem methodi thermometri univerſalis Lutetiæ Pariſiorum an.* 1741 *impreſſum, in quo auctor ſuum non inſcripſit nomen; hoc tamen idem manufactum ſeorſum videre contigit M. Micheli; eius ergo opuſculi auctor libenti animo primo termino, caloris videlicet, nequaquam altero aſſentitur, qui ad frigus pertinet; idque duabus cauſis, quarum prima eſt næ valde ſingularis, atque, ut opinor, inaudita; ſiquidem hac in re cum quibuſdam ſentit, qui contra, atque ipſe in omne tempus animadvertit, ſe obſerva ſſe dicunt; altera vero eſt mera ſuppoſitio, quam vir bonus facit; videlicet in ea eſt opinione, ut in regionibus frigidioribus glaciei centrum maiori nitri quantitate, aliiſque ſalibus a noſtris diſcrepantibus refertum ſit; quamobrem thermometri liquor, inquit, eis in regionibus plus deſcendere valet, quam quantum in aliis accidat: utilius tamen foret, ut ego opinor, hunc eumdem auctorem curaſſe ad exemplum clariſſimi Muſſchenbroeckii, ut citius ab aliis experimentum [ſiquidem experimentis aliorum nequaquam ſuiſmetipſis moris eſt ut fidem præſtet] eis in regioni-*

XIV. Præterea loco eiuſmodi frigoris vel eo uti poſſumus conſtanti, & firmo, quod præſtantiſſimus Reaumurius ſuo marte, quantum ſciam, nactus eſt, inventum ſane nobile, atque perinde æſtimandum, ut ego arbitror, ac ſit, quod modo commemoravimus clariſſimi Amontonii præ calore; quod conſtans & perpetuum frigus, ut legitur in monumentis Academiæ regiæ ſcientiarum, pars una ſalis marini, binæque nivis, tres omnino, vel eius tres partes binæque illius, quinque omnino gignunt, ſimul ac una ambo permixtæ in aquam ſolvuntur; etenim tranſacto eius ſolutionis puncto temporis, quod fere dicam in inſtanti, frigus modo enunciatum, quo maius eadem illa occaſione nequaquam ſentitur, parum ſe imminuit.

XV. Quemadmodum igitur thermometra a clariſſimo de l' Isle excogitata, vel corrigendis barometris [ut una gravitas aeris ſeparetur ab alteratione eiuſdem a calore orta] inſervire valent (*a*), iccirco metheorologicas ephemerides legendo aliis ſingulis poſſunt fortaſſe anteponi; qua barometrorum correctione penitus neglecta, eam clariſſimo viro in dubium venit fuiſſe cauſam, cur multiplices varietates ad montium cacumina, atque ad eorum radices Phyſici obſervaverint, quibus in locis aeris temperiem maximopere variam eſſe unumquemque non fugit: verumtamen, Sodales, ſingula alia thermometra phyſicorum ædibus minus animo exulare intendo; ſiquidem ea aeris temperationi obſervandæ bene hercle inſervire valent, atque ultro oſtendere, ut animadvertit idem prælaudatus de l' Isle (*b*), quomodo caloris frigoriſque viciſſitudines liquores varios, quibus thermoſcopia conflantur, diverſimode afficiant: porro autem ſingulorum ſeries thermometrorum merito, Sodales, ſer-

bus fieret, quam mera hac uti ſuppoſitione; ſiquidem nos in experimentis, nequaquam in ſuppoſitionibus acquieſcimus; ſuppoſitiones enim, animadvertente clar. viro Muſſchenbroeckio [elem. de Phyſ. §. 9] haud poſſe fore non fucatas ex eo patet, quod eaſdem fieri a Philoſophis non oporteret.

(*a*) *Loc. cit. qua de re vel clariſſimum Bulffingerium cogitaſſe legitur in commentariis Acad. ſcient. Imper. petrop. tom. II. III.*

(*b*) *Loc. cit.*

ſervanda, itemve phyſicorum bibliothecæ ratione honoris iiſdem ſunt decorandæ, qui phyſicæ non ſine cauſa habendus eſt; etenim in eam illuſtrandam Philoſophi rerum, nequaquam fabularum, auctores magnum ſumptum & laborem, ut notum eſt, inſumpſerunt.

His omnibus habitis tum denique non putavi, Sodales optimi, eſſe alienum inſtituto meo ob maiorem totius rei intelligentiam vobiſcum communicare, quod ad clariſſimum Muſſchenbroeckium ſcripſeram, ut dictum eſt, [N. V.] & quod mihi vel ea de re humaniter ipſe reſpondit.

CLAR.

CLAR. VIRO PETRO VAN MUSSCHENBROECKIO PROFESS. CELEBER.

PETRUS TABARRANUS MED. DOCT. S. D.

NOn erit tibi permoleſtum, opinor, Vir Doctiſſime, me hominem tibimet prorſus ignotum tecum pauca quædam communicare ad thermoſcopia ſpectantia, pro quibus licet in variis europæ regionibus multi, & præclari viri tecum laboraverint, ſtudioſeque cogitaverint, res tamen eo non devenit, ut omnibus careat vitiis, inter quæ illud non parvum, quod tu ipſe hucuſque tolli non potuiſſe candide, & ſyncere [ut eruditorum omnium mos eſt] confiteris, (*a*) videlicet vitri ipſius capacitatem calore augeri, eamdemque frigore comprimi; iccirco bene ac ſapienter infers; *ex gradibus adſcenſus non poſſumus de vera quantitate rarefactionis aliquid certum ſtabilire* (*b*). Quod quidem licet abunde pateat ex eo, quod mercurius, ſeu vini ſpiritus ſtatim deſcendat, mox aſcendat in tubum, dum ſphæra, vel cylindrus alicuius thermometri aquæ calidiori immergitur. (*c*) Oppoſitum vero eveniat, ſi frigidiori aqua immergatur (*d*); placuit tamen mihi una cum doctiſſimo viro Antonio Leprotto, Clem. Papæ XII. Archiatro, cui ob ſingularem erga me benevolentiam plurimum debeo, adhibita machinula clariſſimi Bulffingeri (*e*) rem ad examen revocare. Propterea ab artifice eiuſmodi machinarum non imperito fieri curavimus prælaudatam machinulam tubulo recurvo cum phyala vitrea conſtantem [*Fig.* 1], cuius inferioris hemiſphærii pars introrſus retracta curvaretur ita, ut exteriori ſuperficiei parallela fieret. Eam ſpiritu vini in modum thermometri florentini re-

 ple-

(*a*) *Elem. Phyſ. p.* 245. (*b*) *loc. cit.*

(*c*) *Sag. di nat. eſper. fat. nell'Accad. del Cim. part.* 2. *eſper.* 1. *Amont. Mémoire de l'Acad. Royale des ſciences* 1700. 1705.

(*d*) *Sag. di nat. eſper. loc. cit. Homberg. Mémoire de l'Acad. Royale des ſciences* 1710.

(*e*) *Comment. Acad. ſcient. imper. petrop. tom. III. p.* 243.

plevimus, eademque ita compoſita experimenta coram amicis pluries repetita ſunt, ſemperque cum iiſdem clariſſimi auctoris adamuſſim convenerunt; videlicet infuſa aqua calida in phyalæ huius machinulæ cavitatem ſubitaneus aſcenſus, quem vocant *ſaltulum*, ſtatim viſus eſt, qui a reliquo ſubſequente aſcenſu evidentiſſime diſtingui poterat. Affuſa poſtea in eamdem cavitatem aqua frigida, non aſcenſus, ſed celerrimus deſcenſus apparuit. Merſa tandem machinula modo in hanc, modo in illam aquam, ita tamen, ut phyalæ exterior ſuperficies, abſque eo quod in concavam nullo modo aqua illaberetur, madefieret, nil aliud, quam quod ſolet in thermoſcopiis vulgaribus, viſum eſt: poſtrema tamen hæc non tam clare cernebantur, ac ſuperius dicta, ex eo fortaſſe, quod ad hæc præſtanda ſatis apta non eſſet machinula; quamobrem alias ab artifice fieri curavi, ut in figuris 2. 3. 4, tubis gracilioribus inſtructas, ut *ſaltuli* illi magis conſpicui redderentur. Quibus omnibus ſæpe ad examen revocatis, matureque perpenſis, obſervatum eſt, ſi cum dexteritate mergerentur ita, ut per idem, ut ita dicam, temporis momentum utraque ſuperficies madefieret, nullum fieri *ſaltulum*, ſed aliquem dumtaxat tremorem. Quo viſo illud mihi in ſuſpicionem venit, an aliqua ex dictis machinulis ad rem eſſet pro thermoſcopiis quincto antedicto vitio liberandis, ſi non ex toto ob binas ſuperficies, haud omnino æquales, ſaltem maiori ex parte ita, ut obtineri valeat abſque ſenſibili errore, ſi quidem vitra probe conſtructa ſint, vera rarefactionis quantitas. His igitur machinulis quædam fabricavi thermoſcopia 3. 4 adhibitis machinulis, tam ex methodo a te, vir præſtantiſſime, tradita, (*a*) quam ex regulis clariſſimi de l' Isle, (*b*) quæ, ſi nil aliud, ſaltem a caloris mutationibus afficiuntur, & quidem multo magis, ut videre contigit, quam quæ cylindris inſtructa ſunt [quod inventum ſolertiſſimo Farheneitio, quantum ſcio, debetur]; *eo enim modo*, ut idem Farheneitius inquit, *ob maioris ſuperficiei quantitatem, citius a variatione caloris penetrantur* (*c*). Et certe thermoſcopia hæc noſtra citiſſime,

(*a*) *Elem. Phyſic. p.* 244.
(*b*) *Miſcell. Berol. tom. iv. p.* 343.
(*c*) *Philoſ. tranſact. Abrigd. vol. vi. part.* II. *p.* 52.

ſime, poſtquam calefacta ſunt, frigeſiunt, & mercurius citius in tubos aſcendit, ſi phyala, poſtquam in glacie ſali communi immixta manſerit, aeri exponatur: contra vero citius idem mercurius deſcendit, phyala in eamdem glaciem immiſſa: quæ quidem non ita expedite contingere videmus in iis, quæ coniunctum habent cylindrum. Hæc ſunt, vir doctiſſime, quæ pro thermoſcopiis corrigendis, & accuratiori ratione conſtruendis excogitavi, quæ an recto, ut dicitur, ſtent talo, tute ipſe iudicabis; ego enim ſapientiæ, & ſingulari tuæ doctrinæ tantum tribuo, ut, ſi eadem tibi arrideant, de eorum veritate amplius non dubitavero, tanti a me ſit tui ipſius iudicium. Vale.

Romæ v. nonas Octobr. 1738.

VIRO

VIRO EXPERIENTISSIMO PETRO TABARRANO MED. DOCT.

P. VAN MUSSCHENBROECK.

QUo tempore phyſicæ elementa conſcribebam, nondum remedium tollendis omnibus thermometrorum vitiis inveneram, deinde tentando, meditandoque omnia fere ſuſtuli, atque ante annum memoriæ tradidi in opere phyſico, quod belgico edidi ſermone, atque nuper in gallicam linguam verſum eſſe video. Remedium, quod attuli, idem eſt cum tuo: rem acu tetigiſti, gratulorque tuæ ſagacitati, & dexteritati: adnotas mercurium in tuis thermometris citius a calore, & frigore affici quam in cylindris, quod a duabus cauſis pendebit, vel a craſſitie vitri, ex quo bulbi cylindrive ſunt conflati, vel a magnitudine ſuperficierum eorumdem; quo enim ſuperficies maiores, eo maior in intrinſecum contentum mercurium erit caloris externi actio. Præcipua ratio cylindrorum tubis adnexorum fuit, ut facillime determinaretur proportio inter capacitatem cylindri, & tubi, ut conſtrui poſſent plurima thermoſcopia pari paſſu ambulantia, atque ad eamdem accommodata ſcalam (*a*): hoc difficilius tuis concavis impreſſiſve ſphæris obtinebis (*b*). Sed aliqua manet & vix ſuperanda difficultas; nempe omne vitrum non eſt æque durum, alterum citius ab igne emollitur, alterum difficilius: hoc fortius trahit mercurium, hoc imbecillius: hoc poroſius eſt altero: & inſpice tuborum internas externaſve ſuperficies, vitrum, invenies aſperiori, alterum læviori ſuperficie donatum; quo evenit ut mercurius in tubum hunc facilius adſcendat, quam in alterum (*c*). Quamobrem ſi bona thermoſcopia parare volueris, uno & eodem vitro pro omnibus utare; elige quod limpidiſſimam, & politiſſimam ſuperficiem acquirit: menſura

---

(*a*) *Vid. num. ix.* (*b*) *vid. loc. cit.*

(*c*) *Hac de re conſule clariſs. viri Comment. ad tentam. exper. nat. cap. in Acad. del Cim. pag.* 10.

ſura accurate per pares quaslibet portiones tuborum, ut capacitatem partium noſcas (*a*), atque ita accommodes ſcalam; in hoc ſolo maximum ſitum eſt arcanum.

Si poſſideas thermoſcopium ad ſcalam Farheneitii, vel Reaumurii fabrefactum, tum oro, ut experimentum capias, an Romæ idem frigus deſideretur, ut aqua in glaciem abeat, quam Amſtelodami (*b*): ſi autem quædam alia nova phyſicam ſpectantia Romæ ſint detecta, eaque mecum communicare volueris, noſtra hollandica etiam remittam; nunc autem officioſiſſime ſalutatus, Vale.

1. *Novembr.* 1738. *Ultraiecti*.

Epi-

(*a*) *N. XIII.*

(*b*) *Idibus Februarii* 1739 *cum eſſem Lucæ accepi hanc viri clariſſimi litteram, moxque clariſſimum Leprottum oravi, ut Romæ eius rei periculum faceret, ſiquidem eiuſmodi thermometra eumdem poſſidere me non latebat: quamobrem facto Romæ periculo, obſervationem frigoris, quo aqua Romæ conglaciatur, adamuſſim congruere cum ea, quæ hac ſuper re facta eſt Amſtelodami, mihi ſtatim reſcripſit; cuius rei, ut ſupra dictum eſt N. XIII, certiorem feci clariſſimum virum; verum poſtea nullum ab eodem reſponſum tuli: ita ut, an litteræ inde redditæ ſint, animi pendeam.*

Epiſtola, in qua fons deſcribitur ab avulſo nemore luculenter auctus.

QUod nuper tibi pollicitus ſum, me fontem quam primum tibi deſcripturum, quem Carolus Dominicus Orſuccius Patritius Lucenſis non parum auctum fore nobiſcum loquens forte meminit, poſtquam nemus ad conſerendas oleas in quodam ſuo prædio eradicaverit, libenter facio, quum vel diligens, & prudens agricola, qui ei prædio, aliiſque rebus faciundis præeſt, id omne verum eſſe candide teſtatus eſt; tum etiam egomet eius rei veritatem plane agnovi. Id igitur prædium in plano ſic dicto Mommii quarto a Camaiore circiter lapide meridiem verſus, atque occaſum ſolis in conſpectu Vieregii ſitum eſſe ſcito; quod prædium modo a nobili Lucenſi familia Buſdraghiorum ære non pauco emit; partim enim in planitie eſt, partim in colle non valde excelſo collocatur, ubi ſuper cetera ſylva, pulcherrimumve olivetum extant; excelſiori vero loco eidem ſylvæ, atque oliveto finitimo nemus, quod dixi, aderat quamplurimis ingentibuſque ilicibus conſitum; quod nemus non modica impenſa cultum reddidit ilicum loco oleis inſertis.

Ad extremitatem igitur eius nemoris in vicinia videlicet oliveti fonticulus prorumpebat, cuius aqua, poſtquam nemus fuit, ut dictum eſt, eradicatum, ita adaucta cernitur, ut memoratus Orſuccius trapetum ad terendas oleas ibidem ædificare cogitaverit; etenim in præſens fontis aquam ſic auctam ei quodammodo ſufficere trapeto non temere opinatur. Fons iſte, niſi multum ego fallor, firmum ratumque facit eum ipſum, quem Plinius ab exciſo nemore in hemo exortum eſſe tradit (*a*), de quo ab eodem Seneca fit mentio, atque de Theophraſto didiciſſe ait [*b*], tametſi ratio-

(*a*) *Naſcuntur fontes deciſis plerumque ſylvis, quos arborum alimenta conſumebant. Sicuti in hemo, obſidente Gallos Caſſandro, cum valli gratia ſylvas cæcidiſſent ec. Nat. hiſt. lib.* 31 *cap.* 4.

(*b*) *Natur. quæſt. lib.* 3 *cap.* 11.

ratione quadam ſecundum ſtudia, ſeu mavis philoſophiæ principia, quibus tum temporis imbutus erat, excogitata [quæ porro ex rebus fictis commentitiiſque conſtat] (*a*) hic ceteroquin apud nos perantiquus, & doctiſſimus ſcriptor ei Theophraſti effato fidem non habuit; veluti recentem quemdam ſcriptorem in quadam ſua diſputatione, & dialogo minime gravibus ſententiis pleno, effatum Plinii, vel ſit Theophraſti, nullo habito ad noſtra tempora reſpectu, libere, ut Seneca, & licenter inficias ire legitur (*b*); quamobrem minus hic idem recens ſcriptor meo iudicio excuſatione dignus cenſetur, quam priſcus Seneca; etenim unumquemque hiſce temporibus non fugit ingens aquæ quantitas, qua plantæ attrahendo aluntur & creſcunt, prætereaque exalando uberrime eam diffundunt (*c*); qua una ſed validiſſima fultus ratione idem vir doctiſſimus Iacobus Bartholomæus Beccarius (*d*) præclariſſimus monuit Lucenſes, qui ut prudentes, & providi vel eius docti viri conſilium inierunt, ut priuſquam Viaregii nemus extirparent, ſolum ipſum animadverterent, ſi forte dubitandum foret de redundante uligine, quæ haud amplius a plantis attracta ſuper idem ſolum diſperſa poſtea maneret (*e*), tanti ſit ab eo clariſſimo viro aquæ attractio, quam uſque agunt plantæ. Quapropter mirari mehercle deſinamus de fonte, animadvertente Plinio, poſt exciſionem nemoris in hemo exortum, cum quid ſimile modo habeamus, eiuſque præterea aſſerti ratio modo in promptu ſit.

Non deerit fortaſſe, opinor, qui eius dictæ accretionis aquæ ſolo omni ex parte exculto cauſam aſciſcat, utpote

(*a*) *Sed pace Theophraſti dixiſſe liceat, non hoc eſt ſimile veri: quia fere aquoſiſſima ſunt quæcumque umbroſiſſima. Quod non eveniret, ſi aquas arbuſta ſiccarent ec. loc. cit.*

(*b*) *Dialog. ſop. alc. ſcrit. ec. vegl.* 2 *pag.* 93.

(*c*) *Lan. magiſt. nat. & art. tom.* 2 *c.* 1. *Exp.* 129. *Hal. nat. de rogit.*

[*d*] *Parer. intor. al Tagl. dell. Mach. di Viareg. n.* 24.

(*e*) *Eius rei exemplum legatur in Kirchero, paludem magnopere effuſam poſt nemoris cuiuſdam in latio incenſionem proferente. Lat. vet. & nov. lib.* 4 *cap.* 3. *Lanciſ. de ſyl. Ciſt. & ſerm. conſ. confut. rat. n. iv.*

quod ſic elaboratum aquam pluviam arcet atque continet; quod antea nequaquam accidebat, quum durum, diſertum, incultumque foret ſolum, extra quod aqua pluvia facilius diffluere valebat.

Porro hac in re ei forte eſſet ſermoni locus, ſi ſolum modo deſcriptum evolutum, nudatumque fuiſſet arboribus, verum ingentibus denſiſque ilicibus, ut dictum eſt, refertum erat; iccirco aqua pluvia non tam facile, ut inquiunt, diffluere poterat: præterquamquod ſi ſolum excultum, atque ideo ſingulis nudatum ilicibus, arcendo retinendoque aquas pluvias ex eorum ſententia eius augmenti aquæ fonticuli impræſentiarum cauſa eſt; his ergo argumentis infero, quod aqua pluvia retenta, ut aiunt, hoc auxit fonticuli aquam, quod a plantis haud amplius ſit attracta & conſumpta, quum idem ſolum vel ſit, quemadmodum non ſemel ſcriptum eſt, ſingulis nudatum arboribus. Hæc ſunt, quæ mente verſabam, ut tibi nota eſſent. Plura ſcripſiſſem, verum ea tibi ſat eſſe intelligo. Vale.

IOAN-

Fig. 1.

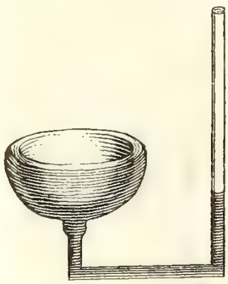


Fig. 2.

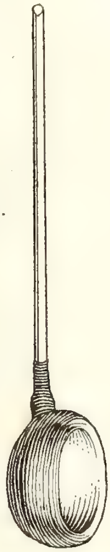


Fig. 3.

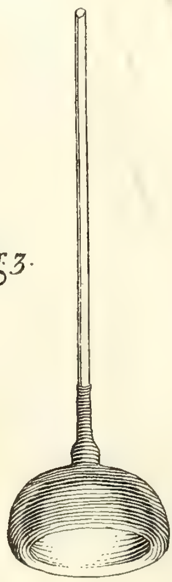
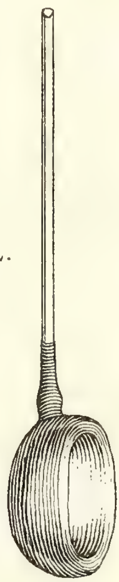


Fig. 4.



IOANNIS ANTONII GALLI

De nonimeſtri fœtu extra uterum aucto, & mortuo per abdomen vivæ matris extracto.

QUod fœtus extra uterum nutriri poſſit, & augeri res notiſſima eſt, neque unica obſervatione confirmata. Negari quidem non poteſt, quod res ſimul rariſſima ſit. At tempus fecit, ne ſaltem noſtris hiſce temporibus iterum obſervari deſideraretur. Vobis etenim, Sodales ornatiſſimi, adhuc memoria non excidit, me duobus ab hinc annis e viva matre per abdomen mortuum extraxiſſe fœtum nonimeſtrem extra uterum nutritum, & auctum. Quo evulgato id porro evenit, quod de rebus rariſſimis ſolet, ut nempe, excitatis hinc illinc ſermonibus variis, ſtatim quæ rei circumſtantiæ maioris momenti eſſent, a quampluribus infirmarentur, imo a nonnullis etiam omnino negarentur. Ex quo ſane mecum ipſe reputavi, cum primum in hoc ornatiſſimo, lectiſſimoque conventu veſtro meditatum aliquid de ſcripto recitare debuiſſem, mihi de re ipſa, veritatis cauſa, diſſerendum eſſe, quod ne videar minus clare, & inutiliter feciſſe, diſſertationem dividam in duas partes, quarum prima complectar prægnationis hiſtoriam; fœtus, & ſecundinarum per abdomen extractionem; quæque poſt matris obitum de ſacco, de utero, de tubis, & ovariis obſervaverim; altera autem nonnullas adiungam animadverſiones ad phyſicam alias, alias ad praxim ſpectaturas. Ut veſtras demum vos ipſi adiungatis oro, obteſtorque. Sic quod pro veſtrum, pro rei, pro loci dignitate certe ex me defuturum erit, per vos ipſos addetur cumulatiſſime.

Mulier duos circiter ſupra triginta annos nata, habitus plenioris, & ſucculenti, quamquam per decennium iuveni viro iuncta, unicam tamen, & quidem moleſtiſſimam graviditatem felici iam partu compleverat. Anno milleſimo

 ſeptin-

ſeptingenteſimo quadrageſimo tertio ante kalendas decembris alterius prægnationis minus dubia habere cœpit argumenta. Præter illa multa, ob quæ pluribus moleſta, ipſi autem hæc etiam moleſtiſſima fuit graviditas, hoc unum addebatur, quod frequentes, & fere diuturnos pateretur dolores ad hypogaſtrium, eoque maiores præſertim cum ſupra latus ſiniſtrum decumberet. Ad quintum circiter menſem tanta illi acceſſit moleſtia a graviditate, ut ad opem aliquam poſtulandam impelleretur, quamquam patientis eſſet, fortiſque animi mulier. Primum vocata fuit in auxilium obſtetricula, quæ ſtatim os uteri explorans, imminentem abortum pronunciavit. Quænam inde habuerit certa ſigna, mihi prorſus non conſtat; conſtant quidem multa, & validiſſima, quæ urgente obſtetrice fuerunt a muliere non omiſſa tentamina ad abortiendum, de quibus tandem fruſtrata una cum obſtetrice graviditatem ipſam in dubium revocavit. Ad definiendam ideo vocatus ego potui ex multis argumentis ſatis validam habere de graviditate ſuſpicionem; ex oris vero uteri exploratione, quamquam ad ſextum menſem properaſſet graviditas, ne minimam quidem habere potui. Supererat perſentire motus fœtus, de quibus iam certa dicebatur mater; at ego non niſi circa ſeptimum menſem per manum ventri admotam tam certos, & diſtinctos percepi, ut quam antea ſolummodo ſuſpicatus eram, modo pro certo haberem graviditatem, etſi ſtatus oris uteri tunc temporis per me iterum explorati conſtanter excluderet quamcumque graviditatis opinionem. Quod ſane unum cum ſæpe numero mente revolverem, numquam potui cum altero conciliare certiſſimo graviditatis ſigno, nempe motibus fœtus, niſi hunc extra uterum verſari excogitaſſem. Mulier interim & a moleſtiſſima prægnatione, & a doloribus univerſo abdomini additis eo fortius ſollicitabatur. Noviſſimis menſibus accedebant vomitus fere continuus, inappetentia, ſitis multa, urinæ paucæ, alvus ſtrictiſſima, languidus oculorum aſpectus, facies ſubflavo colore fœdata, vigiliæ, febres, univerſi corporis macies. In hoc rerum ſtatu impatiens expectaverat partum prope kalendas ſeptembris, quando pariendi doloribus, ut ipſa aiebat, per tres, quatuorve dies, & fœtus inſolitis, violentiſſimiſque motibus vexata, de repente in gravem incidit ſyncopem, a qua

reſti-

reſtituta nullis amplius pariendi doloribus, nulliſve fœtus motibus ſollicitari faſſa eſt, ſed gravi potius, & inſolito premi pondere ad fundum abdominis, cum ſederet, aut ad latus, ſupra quod decumberet. Urgentibus deſcriptis doloribus mucoſitates ſanguineæ, quales imminentem partum præcedere ſolent, e pudendis identidem fluxerunt, quibus impulſus ad os uteri denuo explorandum, illud tetigi non ut alias occluſum ſemper, reſiſtens, & prominens, glandis extremo non diſſimile, ſed complanatum, molliuſculum, imo apertum ita, ut medii digiti extremo ingredi facile permitteret in uteri cavum, quod inveniens omnino vacuum, ut in non prægnantibus eſt, de fœtu extra uterum concepto, & adhuc exiſtente aperte, & tuto commonere, conſtanterque ſuſtinere non amplius dubitavi.

Aeque potuiſſem & facilem, & tutam, & minus laborioſam per abdomen extractionem prægnanti mulieri polliceri: unicum certe, & extremum præſidium. At ipſa rei novitate, raritate, incertitudine, periculo perculſa animo maluit exitum naturæ providentiæ, quam artis induſtriæ committere.

Per menſem, & ultra inter metum, & ſpem, inter plurium obſtetricum, & muliercularum opiniones, ſuaſioneſve, quas fingere vobis poteſtis & quantas, & quam inanes, & inauditas, inter varios animi affectus, & anxietates; per menſem [inquam] & ultra fœtum mortuum abdomine geſſit non ſine aliorum ſymptomatum acceſsione. Inter graviora notavi ventris oneroſam molem, & procidentiam, quo ſe verteret; cadaveroſum, & male olentem ſpiritum; febriles motus irregulares cum intenſo frigore, & fere continua inhorreſcentia; frequentes repentinos lapſus in animi defectiones; abdominis ac ſi magno hydrope, vel enormi abſceſſu tumeret, tantam diſtenſionem, & pulſationem, ut quomodocumque ſita deficere, & ſuffocari videretur. Per quæ ſane multa, & omnia graviſsima, & periculoſiſsima cum mulier in certo, & proximo vitæ diſcrimine verſari ſe tandem cognoviſſet, extractionem fœtus per abdomen etiam, atque etiam a me poſtulavit.

Quamquam ſpes boni exitus mihi eſſet deſperatiſsima, ut tamen animadverti mulierem viribus conſtare adhuc ſatis, & forti animo eſſe; operationem vero ad vitam ſaltem

pro-

protrahendam tutam ſatis, utilem, & conſonam fore, illam ſuſcipere non renui, dummodo ad probandam authoritate, ad confirmandam præſentia, ad iuvandam conſilio vocaretur Petrus Paullus Molinellius, quem in rebus chirurgicis habui Magiſtrum ingenio, doctrina, integritate præſtantiſſimum.

Octavo idus octobris ad patientem convenimus ambo; quæ inter nos prius excitatæ fuerunt animadverſiones non de fœtus extra uterum exiſtentia, non de extrahendi per abdomen neceſsitate verſabantur. Erant hæc tam certa, & evidentia, quam quæ maxime; multo minus in controverſiam venit, an ſimul, & ſemel, an per intervalla aperiendum abdomen, & fœtus extrahendus. Circumſtantiis in operando viſa eſt res committenda. Fuerunt quidem de loco abdominis aperiendo, de operandi methodo, de patientis ſituatione.

Quoad primum = ex maiori dolorum conſtantia, decubitus difficultate, contentique fluidi repercuſsione in ſiniſtro, quam in dextero latere, ſiniſtra ſtatuimus aperire media quaſi via inter oſsis ilei angulum ſuperiorem, & umbilicum.

Quoad ſecundum = duximus aliis præferre inſtrumentis ſcalpellum (Gallis biſtouri) eoque recta per abdomen ad tres tranſverſos digitos dividere primum integumenta, poſtea ope ſulcati ſpecilli muſculos, peritoneum inde, tandem ſaccum, in quo fœtus contineretur.

Quoad poſtremum = illam collocare ſedentem ad lecti marginem conſtituimus, ne inter operandum, ſi iacuiſſet, præ ſuffocatione, qua ſæpiſsime opprimebatur, ſurſum elevare cogeremur.

Poſt hæc ad inciſionem. Simul ut ſaccum penetravi, ſtatim fluxit pleno gurgite ſerum putridum, ſanioſum, atro ſanguine tinctum, fœtentiſsimum. Præter capillos fœtus non aliud quidpiam ſibi mixtum habebat. Hic tum ad decem circiter libras fluere ſinimus non parvo cum reſpirationis levamine. Ut longe copioſius flueret, ſineremus; adhuc enim ex tumente abdomine, & repercuſsionis ſenſu non tenuem copiam contineri deprehendebatur. Verum ſatius exiſtimavimus occludere vulnus, & mulierem in lecto iacentem collocare, priuſquam ſyncope non admodum remota

mota corriperetur, vireſque frangerentur.

Ad vulneris ideo deligationem ſtatim converſi prius linteam, & mollem turundam butyro illitam intruſimus, deinde ſiccis cylindricis glomeribus cum adnexo filo totam plagam implevimus; demum ſuperimpoſitis ſpleniis ſpiritu vini imbutis cum ſatis lato mantili firmavimus. Ne ſupra vulnus decumberet ægram commonuimus; ut cibo tenui, & cardiacis reficeretur, commendavimus.

Neque hoc primum male ceſsit. Somnum, quem tamdiu vix tenere potuerat, cœpit per aliquot horas: cibum, quem vomere ſolebat, retinuit: vix correpta ſyncope: vix ſpiritus anguſtia: de vulnere parum dolens lecto per totam noctem iacuit, ut ſitam reliquimus.

Summo mane detecto vulnere, glomeribuſque omnibus eductis ſimul cum turunda, ſerum eiuſdem prorſus, ut antea, conditionis ad duas libras, & ultra effluxit. Siſtebatur identidem inter fluendum ob fœtum os vulneris occludentem. Quod ne iterum eſſet, firmiori mulieris ſtatu animatus vulnus dilatavi. Tunc, ægra nonnihil ſupra vulnus inclinata, multum fluxit humoris, & promptius. Digitis intromiſsis brachium fœtus facile tetigi, ſaccum autem peritoneo intime adhærere cognovi.

Quid ergo tum deerat præter fœtus extractionem? ad eam perſolvendam nonnulla urgebant, ad ferendam vero ſatis virium ægræ adhuc non eſſe ex eo conſtabat, quod propter evacuationem vix copioſiorem quaſi in ſyncopem laberetur. Cardiacis itaque, iuſculis, cibo, ſomno ultro refecta ipſa voluit fœtum extrahi ſeptima a vulnere die. Quamquam ille per ſeptem fere hebdomadas mortuus, adhuc tamen carnoſus erat, & bene completus. Ergo ne integer extrahendus? Poſtulaſſet vulnus nimis amplum. At placuit periculo potius, quam commodo, & brevitati in operando conſulere, ideoque fruſtatim educere, quod tamen nedum fieri potuiſſet ſine prævia vulneris ulteriori dilatatione.

Vulnus itaque prius ad pollicem tranſverſum hinc inde dilatavi, in quo faciendo, ut primum, ſic modo res feliciter ceſsit; vix etenim paucæ fluxerunt ſanguinis guttæ. Statim ad exitum ſe ſe obtulit brachium fœtus ſiniſtrum, quod digitorum auxilio ad ſcapulam uſque extractum cultro

ab

ab ipſa ſeparavi. Ea deinde forcipe, qua Cheſeldenus utitur in calculo ſua methodo e veſica extrahendo, & crura, & fæmora, & dexterum brachium, & quamlibet aliam fœtus partem pro libitu prehendere, & comprimere, & frangere, ad os autem vulneris trahere, & tenere, & dividere commodiſsime potui ægra ſemper æque bene ferente.

Inter extrahendum obſervavi, quod tantum putreſcere cœperant vertex capitis, abdomen, & funiculus umbilicalis, cuius ideo viribus niti non potui ad placentam extrahendam. Oportuit ergo ut manum uſque ad pollicem intromitterem, qua ad ileum reflexa ſtatim illam inveni ſolito quidem craſsiorem, compactioremque, nec non ſuppoſitis partibus admodum adhærentem, non adeo vero ut non potuerim illam ab ipſis ſenſim, ſenſimque divellere, & integram extrahere. Inſignibus hæc donata erat ſanguiferis vaſis, &, quod inſolitum, tota ſubnigro colore fœdata, quo ipſo fœdatam vidi eam, quæ in conſpectum venire potuerat, ſacci portionem. Extracta placenta de membranis nihil obſervavi. Utrum conſumptæ fuiſſent, utrum ſacco communes, dicere non auderem; de ſacco quidem dicam, quod propter nimiam cum circumpoſitis partibus adhæſionem, ne levem quidem portiunculam potui ſeparare.

Ad vulneris ideo deligationem converſus iuxta primam methodum abſolvi citiſsime, non quin ab ægrotantis intolerantia ſollicitarer, ſed quia ego ipſe præ nimis gravi fœtore non ſemel quaſi deficere autumaverim.

Propter multam humoris fluentis copiam bis hactenus in die vulnus curaveram, & bis impoſterum debui eamdem omnino ob cauſam. Hoc ſolum interfuit, quod humor ante fœtus extractionem fluebat fœtens maxime, ſeroſus magis, & ſanguinolentus; poſt illam vix male olebat, ſaniemque potius ſubnigram fere ſemper æmulabatur. Sequenti die vulneris ora inveni pari nigredine colorata, ceterum mollia, & humida. Nullus interim in abdomine dolor, diſtenſio nulla, nulla maior virium iactura, ſomnus quietus, ciborum tolerantia; ad ſummum eo res redibat, ut nihil præterea id temporis expetendum videretur.

At quantum ſpei ex his colligeretur, tantum adimebant conſtans, & in dies copioſa ſanioſi humoris in ſac-

cum

eum collectio ; & inde aucta univerſi corporis macies.

Reipſa ægra undecima a prima operatione die febri cum multo frigore correpta fuit. Acceſſerunt illico ſumma ſpirandi difficultas, deglutitio impedita, ciborum intolerantia, extrema virium deperditio, animi frequentes defectiones, demum lethales convulſiones, inter quas circa veſperam occubuit nono kalendas novembris.

Habita in cadavere abdominis ſectione coram prælaudato Molinellio invenimus ſaccum, in quo fœtus fuerat contentus, adhuc ita extenſum, ut fere totam occuparet cavitatem ; partibus autem ſingulis illi undequaque circumpoſitis ita intime adhærebat, vix ut portiuncula diſiungi cultro potuiſſet ; intimam præterea habebat ſuperficiem plane ſubnigram, craſſitiem vero, qualis eſt tenuis inteſtini, præter portionem, cui adhæſerat placenta, & qua ſiniſtrum ileum reſpiciebat ; ibi etenim magis compactum erat, reſiſtens, & craſſum. Quoad tubas, & ovaria, erant dextrorſum aliqua ſatis manifeſta veſtigia utriuſque ; at ſiniſtrorſum non ita ; patebat enim quidem ſiniſtræ tubæ oſculum in uterum ; verum immiſſum in illud ſpecillum vix unam, aut alteram lineam poterat introduci ; eoque non ſolum, ſed etiam diligenti inſpectione poſtea conſtitit, tubæ in ſuo per uteri ſubſtantiam curſu fuiſſe magnam partem obſtructam.

Ceterum ne minimum quidem extra uterum ſiniſtræ tubæ, aut ovarii veſtigium apparebat, ſed harum partium locum craſſi, & anfractibus interrupti ſacci parietes obtinebant. Demum uterus conſpiciebatur is prorſus, qui in non gravidis ſolet. Notandum hoc tantummodo fuerat, quod eius ſubſtantiæ ſupra ſiniſtram tubam adnatus erat tumor, qui magnitudine, colore, contentiſque ſorbum æmulabatur. Tubam ipſam viſus eſt comprimere, & occludere. Cetera, quæ ſunt abdominis, viſcera tantum vidimus exſucca, & contracta, quantum in tabe extrema confectis ſolent reperiri. Plura obſervare neque res poſtulaverat ; neque aliud quidquam peculiari dignum obſervatione.

Hactenus ergo abdominis ſectionem, atque etiam totius rei ſi minus ornatam, attamen ſinceram, & integram commemorationem ſum executus. Nunc alteram ingredior diſſertationis partem, qua mihi propoſui animadverſiones nonnul-

las complecti ad praxim alteras, alteras ad phyſicam ſpectaturas; atque de his nunc primum.

Non ſemel reperti ſunt fœtus extra uterum enutriti, & aucti, ex quo dubium omne de conceptu ex ovo evelli prorſus debuiſſet. Nihilominus dum opinio hæc tam evidentibus comprobata obſervationibus communiter accipiebatur, Moebius alter obſervationes ipſas Paracelſi fabulis comparavit, quin imo adverſus hiſtoriam præ ceteris ſingularem a celebri chirurgo Abrahamo Cypriano conſcriptam non paucas edidit animadverſiones. De his quidem non hic mihi ſumo iudicium ferre.

Hoc potius mihi ſumerem, ut per hanc meam noviſſimam obſervationem ceteris antea habitis adiunctam opinioni conceptus ex ovo ceteroquin probatiſſimæ tantum addi poſſet firmitatis, & roboris, quantum controverſiis, & animadverſionibus aliis vel nullum, vel leviſſimum ſaltem locum relinqueret.

Revera non agitur de fœtu tam parvulo, & vix concepto, ut hæſitandum ſit, an fingi potuerint rudimenta in membranulis ovarii, aut tubæ aliqua alia ex cauſa alteratis. Fœtus hic omne iam ceperat incrementum extra uterum, totamque ætatem in tenebris expleverat. Longe minus naturæ tribuendum, quod ad exitum fœtui promovendum adeo omnia evertere, & commutare potuerit, ut inde habitæ obſervationi nullatenus fidendum ſit. Natura licet fœtum hunc tamdiu mortuum abdomine ſervaſſet, nedum viam ad expellendum aperire tentaverat aut ulcere, aut alia quadam morboſa partium alteratione. Uterus ipſe quocumque graviditatis tempore exploratus, atque etiam poſt obitum matris diligentiſſime diſſectus, cum integritate, & magnitudine idem ſemper fuerit, ac qui in non prægnantibus ſolet, ſuſpicionem omnem tollit, quod fœtus utero diſrupto, & lacerato ſibi viam fecerit in abdominis cavitatem, quod etiam ex hoc longius abeſt, quod ipſe una cum placenta intacto utero ex peculiari ſacco fuerit extractus. Demum in defuncta muliere commoda inveſtigatio utriuſque tubæ, & ovarii, uteri etiam, & integri ſacci, in quo fœtus includebatur, præſente Viro in anatomicis æque ac chirurgicis verſatiſſimo, & probatiſſimo, videtur alteri anteponenda habitæ inter fœtum extrahendum viva ſuperſtite

matre.

matre. Dum ſanguis effunditur, dum partes dolore contrahuntur, dum patiens agitatur, & conqueritur, & tubas, & ovaria, & parvulum uterum vix ſupra pelvim eminentem per vulnus prope umbilicum commode perluſtrare, libere evolvere, & quanta oporteat diligentia contemplari (quæ omnia nobis perſuadere voluit Cyprianus ſe optime facere potuiſſe) quam difficile ſit, quiſque iudicabit in chirurgicis operationibus vel mediocriter verſatus.

Verum ne plus meis tribuere, quam quæ aliorum ſunt, videar æſtimare, mittamus hæc, converſi libentius ad tumorem conſiderandum uteri ſubſtantiæ adnatum. Quoties iam quoties naturæ induſtria, conſilio, providentia, factum eſt, ut præternaturalibus ad veram rerum naturalium, & quidem magis abſconditarum cognitionem perduceremur! Ita porro tumore iſto. Is ex illis mihi viſus fuit, qui lentiſſime fiunt, creſcunt, & ad ſuppurationem perveniunt. Propter ſitum vere tubam comprimebat, & occludebat. Cur ſtylus per tubæ oſculum in uterum hians facile intromiſſus tubam ad tumorem uſque, non ultro penetrabat? Cur tuba ipſa ab uteri oſculo uſque ad tumorem conſpicua, ultra vero una cum ovario in ſaccum obliterata? Sed quantum de tumore hæc clara, & vera, tantum a controverſia non abeſt, an ipſe fuerit impedimento, quin fœcundatum ovum tranſiret per tubam in uterum, an potius tumorem ipſum fecerit tranſitus fœcundato ovo alia ex cauſa denegatus. Utrum ex his probabilius ſit, primum ne, an ſecundum, Phyſici videant, & definiant. Si forte primum, ad id ſaltem hæc mea feciſſet obſervatio, ut non magis de conceptu ex ovo opinio confirmaretur, quam alia de ovi fœcundatione a ſeminali aura per vias ſanguinis ad ovarium translata vel maxime probaretur.

De tumore ſatis. Tria adhuc reſtant, quæ mihi videntur non eſſe abſque aliqua animadverſione prætereunda. Occurrit primo placenta duplo maior ſolito, nec non inſignioribus ſanguiferis vaſis locupletata; circa quam animadvertant, qui fœtum per ſanguinem nutriri authumant, num magis eorum opinioni favere poſſit admirabilis hæc naturæ ſollicitudo, dum quem non potuerat copioſum, & elaboratum per uterum fœtui ſuppeditare, fecerit per placentam duplo maiorem, ſicque voluerit, ut ſuppeterent uteri defe-

ctui illius magnitudo, & vaſorum copia, per quæ neceſſaria fœtui non defuiſſet ad nutritionem ſanguinis redundantia.

Alterum, quod animadverſione dignum eſt, conſiſtit in intima adhæſione totius ſacci cum partibus circumpoſitis, quod licet primo intuitu a morboſo ſtatu repeti poſſe ſuadeant tot obſervationes in cadaveribus phtyſi, inflammatione, vel alio ſimili morbo confectis, in quibus viſcera aut cavitatibus, aut ſibi invicem adhærere reperta ſunt; attamen non ab aliqua etiam alienum eſſet probabilitate utili cuidam naturæ artificio tribuere, quæ ſi de vegetabilibus ſollicita ad arbores quandoque, imo ad parietes annectit conſulendi cauſa nonnullorum expanſioni, incremento, & adminiculo, quo plus de fœtu erit extra uterum, pro quo ideo deſideretur, ubi tuto contineatur, unde foveatur, & uberius nutriatur.

Poſtremum reſpicit uterum ipſum, qui licet nullius uſus in hac graviditate fuiſſet, ideoque ſemper ore clauſus, tamen apertus eſt urgentibus deprimentibus, & expulſivis doloribus conſueto pariendi tempore. Ergo ne exiſtimandum pro partu a fœtu excitari, ut contrahatur fundo, & aperiatur ore ad illum expellendum, ſi tum fecerit, cum nullum contineret; an potius a divina quadam ſupremi artificis moveri lege, & mechaniſmo, quemadmodum naturalis hiſtoriæ cultoribus mirari non raro contingit, dum certis temporibus aliqua vident id, quod continebant, expromere, & veluti in lucem edere? Utcumque tamen id ſit, obſervatio hæc noſtra, ſi non veram, cur uterus in partu aperiatur, cauſam oſtendit, quæ tamen ad hanc rem explicandam, ut modo hactenus excogitatæ ſunt, ad unam omnes, niſi admodum fallor, oſtendit pugnare cum veritate. Sed iam ad practica me convertam.

Certa non haberi incipientis graviditatis ſigna abunde ſatis comprobatur quotidiana experientia. Quot enim mulieres tunc vere gravidæ non ſunt, cum eſſe magis cenſebantur? & quot aliæ vere gravidæ deteguntur, quibus nec minimum erat indicium, unde eſſe ſuſpicarentur? Ineunti ſaltem graviditati nedum ſigna certa deeſſent, ſi quæ pro minus incertis habenda, virginibus etiam ſingula ſæpenumero non acciderent a ſolo menſtruorum defectu. Quot gravidis

dis recurrerunt menſtrua, quibus non gravidis defuerunt? Lac ipſum (ut probabiliora ſequar) e mammis excerni quamplurimis gravidis non continget. Virginibus autem non ſemel contigiſſe accipitur. Quocumque ergo graviditatis tempore ſolus erit de illa ſuſpicioni locus, certitudini autem nullus? nequaquam. Motus tandem fœtus, & oris uteri ſtatus tam certa apud me ſunt graviditatis ſigna, quam quæ eſſe, quin ſimul, & ſemper veram fuiſſe graviditatem obſervaverim. Hinc eſt, quod ſi utrumque deerit omnino, nec vera ſit, nec falſa tam intra, quam extra uterum graviditas; ſi deerit primum, indicium erit, aut falſam eſſe graviditatem, aut ſi vera, proximum morti futurum fœtum. At ſi tantummodo deerit ſecundum, ſcilicet oris uteri ſtatus nunquam mutetur, motus autem fœtus in abdomine creſcant, & diſtincte perſentiantur, vere conſtabit de fœtus exiſtentia extra uterum. Id ſane in cauſa fuit, cur duos ante noviſſimum graviditatis menſem de fœtu extra uterum non falſo ſuſpicarer. Monet equidem graviſſimus chirurgiæ Scriptor, dum indicia quærit fœtus extra uterum exiſtentis, monet (inquam) præter alia graviditati communia, duo iſta accedere, quod urgentibus partus doloribus os uteri non aperiatur, & aquæ ad ipſum non colligantur.

Obſervatione hac mea conſtaret, & dignoſci id poſſe longe prius, quam partus dolores urgeant, & urgentibus ipſis adhuc os uteri aperiri.

Addam me vidiſſe mulierem, cui poſt diuturnos dolores, neque uterus apertus fuit, neque aquæ collectæ, quamquam nonimeſtrem fœtum utero gereret, ut poſt matris obitum conſtitit ex abdominis, & uteri ſectione.

Ne tamen dum hæc addo, exiſtimetis, me facere animo tanto Viro adverſandi, cui fateor me tam tribuere, quam literatiſſimi omnes. Imo hæc, & alia quæque a me hactenus dicta ita velim accipiatis, ac ſi veſtris ſubiicerem diſquiſitionibus. Neque alio certe in illis proponendis ſpectavi, niſi ut veſtrum magis ingenium excitarem, quam de meo periclitarer.

ROGE-

ROGERII IOSEPHI BOSCOVICHI

De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decreſcentibus in ratione diſtantiarum reciproca duplicata in ſpatiis non reſiſtentibus.

NEminem iam latet Matheſeos cultorem virium centralium theoria, quam Hugenius primus attigit, & horologiis oſcillatoriis applicavit, Newtonus ita perfecit, & ad aſtronomiam tranſtulit tam felici ſucceſſu, ut vix quidquam in eo genere deſiderari poſſe videatur. Multa ille quidem, Viri doctiſſimi, & elegantiſſima theoremata demonſtravit, & difficillima problemata ſolvit ſummo tum Mechanicæ, tum Geometriæ fructu, quas methodis nulli ante ipſum uſitatis mirum in modum auxit, ditavitque; ex quibus illa, quæ pertinent ad definiendos motus in ſectionibus conicis corporis agitati verſus centrum immobile viribus decreſcentibus in eadem ratione, in qua creſcunt diſtantiarum quadrata, non quidem maxime omnium ardua, atque inacceſſa, ſed vel eo nomine maximi uſus, quod tam feliciter keplerianas Planetarum leges cum ſimpliciſſimis mechanicæ principiis concilient, ita iam ubique proſtant, ut prorſus ſupervacaneus videatur labor, in re adeo pertractata verſari. At præterquamquod in iis etiam, quæ maxime pervulgata ſunt, atque trita, fieri ſæpe ſolet, ut quædam, licet non penitus contemnenda, ab aliis tamen vel neglecta, vel etiam nequaquam animadverſa exciderint, quæ novo cuidam veluti ſpicilegio locum relinquant; arbitrati ſumus futurum profecto operæ pretium, ſi ex iis alia dilucidius exponeremus, alia nova methodo adhibita vel ſimplicius, vel accuratius demonſtraremus. Accedit quod cum nonnulla, quæ ad infinitorum indolem, atque uſum pertinent, Geometris nec iniucunda, ut ſperamus, nec inutilia pro-

proferre meditaremur; ea quidem non niſi tam nobili, & aliunde iam ſatis cognito, atque perſpecto illuſtranda exemplo eſſe duximus; ubi etiam occaſione arrepta, celebre velut myſterium quoddam, quod Eulerus, ſummus ceteroquin vir, & de univerſa Matheſi optime meritus, at cæco formularum ductui, noſtro quidem iudicio, plus æquo tribuens, inſeruit haud ita pridem primo tomo mechanicæ, exponemus, atque enodabimus, & vitium fallacis argumentationis, qua ſententiam omnino incredibilem confirmare maxime nititur, aperiemus. De conſilio ſatis: aggrediamur rem ipſam.

I. Admittimus in corporibus, ut rationi, & phænomenis conformem, vim inertiæ, ſive determinationem quandam retinendi eum ſtatum quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel ſunt poſita, niſi vires impreſſæ cogant ſtatum mutare. Eam tamen inertiæ vim nec ex phænomenis, nec a priori demonſtrari poſſe cenſemus. Vires alias metimur mutatione ſtatus, quam inducunt tempore quam minimo; & agnoſcimus compoſitionem motus, qua fit, ut corpus binis viribus ſollicitatum in fine cuiuſque temporis ſit in angulo oppoſito eius parallelogrammi, cuius latera ſingula percurriſſet ſingulis viribus ſeorſim agentibus; unde illud etiam conſequitur, ſi vis utraque agat initio temporis tantummodo, deſcribi ipſam parallelogrammi diametrum motu æquabili.

II. Si vis quæpiam conſtans æqualiter, & ſecundum eamdem directionem agat in corpus ſola vi inertiæ præditum initio tempuſculorum æqualium; celeritates in fine temporum, continentium quaſcumque ſummas eorum tempuſculorum, erunt, ut ipſa tempora, & ſpatia computata a primo illo tempuſculo creſcent ſecundum ſeriem numerorum naturalium 1. 2, 3 &c.: unde facile deducuntur hæc duo: 1. Si a ſpatiis, quæ percurruntur uſque ad finem temporum, continentium quaſcunque ſummas tempuſculorum æqualium, dematur dimidium ſpatioli poſtremo tempuſculo deſcripti; erunt reſidua accurate ut quadrata temporum, vel ut quadrata celeritatum. 2. Si toto eo tempore habuiſſet corpus velocitatem, quam habet in fine, percurriſſet accurate duplum eius reſidui.

III. Nam in *Fig.* 1, cuius conſtructio ex ipſa inſpectione

ne patet; ſi tempuſcula æqualia exponantur rectis æqualibus AB, BC, CD &c., ſpatia deſcripta rectangulis BK, CM, DO &c. Spatia, quæ percurruntur binis temporibus quibuſcumque AD, AE, erunt ut ſummæ eorum rectangulorum, ſive ut areæ ADPOMK, AEGTOMK. Si ab iis areis auferantur triangula omnia AKL, LMN, NOP &c.; remanebunt triangula ADP, AEG, quæ erunt, ut quadrata laterum homologorum AD, AE exprimentium tempora. Sed illa triangula exprimunt dimidium ſpatii poſtremo tempuſculo deſcripti, cum ſint dimidia rectangulorum BK, VM &c., adeoque & DV, ZN &c. vel EH, FI &c. Patet igitur primum. Velocitate vero, quæ habetur poſtremo tempuſculo, confecta fuiſſent ſingulis tempuſculis ſpatia æqualia expreſſa per BQ, CR, DS &c., adeoque toto tempore AE ſpatium expreſſum per AEGQ duplum trianguli EGA, quod triangulum eſt exceſſus ſpatii AEGTOK ſupra dimidium poſtremi ET. Patet igitur & alterum.

IV. Hinc ſi ea tempuſcula concipiantur infinite parva; erit æquipollenter dimidium ſpatioli percurſi primo tempuſculo, ad ſpatium percurſum tempore finito, ut quadratum primi tempuſculi ad quadratum temporis eiuſdem, & celeritate acquiſita in fine ipſius temporis manente per totum tempus, abſolveretur æquipollenter duplum ſpatii deſcripti motu ita uniformiter accelerato: ſpatium enim poſtremo tempuſculo deſcriptum reſpectu totius ſpatii deſcripti tempore finito evadit infinite parvum, & tuto contemnitur.

V. Si aucto numero eorum tempuſculorum in infinitum, ipſa demum ita evaneſcant, ut actio evadat continua; erunt ſpatia quibuſcumque temporibus deſcripta, ut quadrata temporum accurate, adeoque totum ſpatium tempuſculo utcumque parvo deſcriptum ad ſpatium deſcriptum tempore finito, erit ut quadratum ipſius tempuſculi ad quadratum temporis finiti. Quamobrem ſi pro menſura virium perpetuo agentium aſſumitur ſpatium percurſum tempuſculo indefinite parvo; aſſumi debet pro menſura virium, quæ concipiantur agere per intervalla tempuſculorum æqualium, dimidium ſpatii primo tempuſculo percurſi.

VI. Corpus præditum ſola vi inertiæ proiectum ex A (*Fig.* 2) ſecundum directionem AC tempuſculo indefinite parvo percurrat AB. Secundo tempuſculo æquali percurreret

ret per n. 1 BI æqualem BA, & poſitam in directum. Sed ſi in B agatur verſus datum punctum F vi, qua ſeorſim agente percurreret BH; percurret per n. 1 diametrum BD parallelogrammi HBID. Sequenti tempuſculo vi inertiæ percurreret pariter DP æqualem DB, ſed ſi in D urgeatur verſus F vi, qua ſeorſim agente deſcriberet DL, abibit per diametrum DE parallelogrammi DPEL; & ita porro ſi initio ſequentium tempuſculorum æqualium urgeatur verſus idem punctum F viribus quibuſcumque; deferetur ſemper per diametros parallelogrammorum, & deſcribet latera poligoni ABDEKabd &c. poſiti in plano immobili rectarum FA, AC.

VII. Omnium triangulorum AFB, BFD, DFE &c. æquales erunt areæ inter ſe. Ducta enim FI, triangula AFB, BFI ob baſes AB, BI æquales, & altitudinem in F communem, æqualia ſunt: pariter æqualia ſunt BFI, BFD conſtituta ſuper eadem baſi FB, & inter eaſdem parallelas FB, DI: ac proinde etiam FBA, FBD æquantur inter ſe; eodemque argumento æquantur FBD, FDE &c. Inde ſequitur areas, quas percurrit, & quaſi verrit recta coniungens corpus cum centro virium F, ſive areas clauſas perimetro deſcripta a corpore, & rectis coniungentibus extrema puncta perimetri ipſius cum puncto F, fore ut tempora, quibus percurruntur, quia continebunt eumdem numerum æqualium triangulorum, quem numerum æqualium tempuſculorum continent ea tempora.

VIII. Vires, quas corpus habet in punctis B, D, E &c. verſus punctum F, dicuntur centripetæ: conatus ille, quem corpus vi inertiæ exerit, deveniendi potius per rectam lineam ad I, quam ad D, & qui vincitur a vi centripeta, dicitur vis centrifuga: quare vis centripetæ in B erit menſura per num. 2 dimidia BH, vis centrifugæ dimidia DI; eritque ſemper in motibus liberis neceſſario æqualis vis centripeta vi centrifugæ, cum hæc nihil aliud ſit, niſi corporis niſus recedendi ab eo puncto, ad quod a vi centripeta deflectitur, ortus a determinatione abeundi per lineam rectam.

IX. Si ducatur AH, erit ABDH parallelogrammum, quia latus HD parallelogrammi HI erit æquale lateri oppoſito BI, adeoque & rectæ AB, cui cum etiam parallelum

 ſit;

ſit, erunt & AH, BD parallelæ. Quare ducta AD, ſe mutuo biſariam ſecabunt in O diametri AD, BH, eritque BO menſura vis centripetæ.

X. Si altitudo illa, ex qua vi eadem perpetuo agente acquireretur celeritas, cum qua corpus proiicitur, dicatur Q; erit Q = ABq : 4BO; quia eſt per num. 4 BO ad Q ut quadratum tempuſculi, quo vi centripeta deſcriberetur BH, ad quadratum temporis, quo motu uniformiter accelerato deſcriberetur Q. Sed quoniam eodem illo tempuſculo celeritate proiectionis deſcriberetur BI, vel BA, & tempore, quo motu accelerato deſcribitur Q, deſcriberentur per num. 4 2Q celeritate, quæ acquiritur in fine eius temporis, & quæ ponitur æqualis celeritati proiectionis; erit quadratum illius tempuſculi ad quadratum huius temporis, ut ABq ad 4QQ. Erit igitur ABq . 4QQ : : BO . Q; unde fit ABq × Q = 4QQ × BO, & ABq : 4BO = Q.

XI. Altitudines Q, ex quibus cadendo corpora agitata diverſis viribus uniformiter agentibus acquirerent datam aliquam velocitatem, ſunt in ratione inverſa virium ipſarum. Cum enim ſit ABq : 4BO = Q, & data velocitate maneat ABq : 4; erit Q reciproce, ut BO, ſive reciproce, ut vis centralis. Rurſus ſi BO exponat ſpatium finitum, quod gravia percurrunt dato tempore motu uniformiter accelerato, & AB ſpatium, quod eodem tempore percurritur data quadam velocitate, erit eodem prorſus argumento altitudo, in fine cuius acquirerent eamdem velocitatem, ABq : 4BO. Data igitur velocitate proiectionis, & vis centralis quantitate abſoluta, invenietur Q, ſi fiat tertia continue proportionalis poſt ſpatium, quod gravia libere cadendo motu uniformiter accelerato percurrunt dato tempore, & dimidium ſpatii, quod data velocitate percurritur motu æquabili eodem tempore, ad quæſitam altitudinem Q, ut eſt vis centralis data ad gravitatem.

XII. Celeritas, qua corpus movebitur in perimetro poligoni, erit reciproce, ut perpendiculum demiſſum ex centro virium in latus, quod percurritur, productum, ſi opus eſt, & celeritas optica, ſive quæ apparet ſpectanti ex F, erit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo centro. Eſt enim prima, ut latus ipſum, quod percurritur ex: gr: AB, BD &c., ſecunda, ut angulus AFB, BFD &c.

ſub

ſub quo ſpectatur motus ex F. Sed ob areas omnium triangulorum æquales, æqualia ſunt producta ex baſibus AB, BD ſingulorum, & altitudinibus, nempe perpendiculis demiſſis e communi vertice F in ipſas, quæ producta ſunt earum arearum dupla. Igitur baſes ipſæ erunt reciproce, ut altitudines. Anguli vero AFB, BFD &c. ſunt reciproce, ut quadrata laterum FA, FB &c.; eſt enim propoſitio elementaris. *In triangulis, in quibus unus tantum angulus infiniteſimus eſt, eſſe æquipollenter angulum ipſum directe, ut aream, & reciproce, ut quadratum lateris alterutrius adiacentis.*

XIII. Si concipiatur augeri numerum tempuſculorum, & minui magnitudinem in infinitum, ut evadat demum actio vis centripetæ continua, evaneſcent latera poligoni, quod abibit in *Fig.* 3 in curvam AEB cavam verſus centrum virium F, & directio proiectionis ABC figuræ 2 in tangentem AC, ac pariter directiones laterum omnium in rectas tangentes. Manebunt autem areæ AFE clauſæ rectis AF, FE, & arcu deſcripto AE proportionales temporibus. Quare viribus perpetuo ſollicitantibus corpus verſus punctum F immobile deſcribitur curva cava verſus idem punctum poſita in plano immobili tranſeunte per directionem proiectionis, & centrum virium, ita ut areæ, quas deſcribit recta coniungens corpus ipſum cum centro virium, ſint temporibus proportionales, celeritas in orbita ſit in ratione reciproca perpendiculi demiſſi e centro virium in tangentem, & celeritas optica apparens ex centro virium ſit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum.

XIV. Facile inverſa demonſtratione numeri 6 demonſtratur inverſum theorema, nimirum corpus, quod orbitam ita deſcribat circa punctum immobile, ut areæ ad ipſum punctum terminatæ, ſint temporibus proportionales, præter vim inertiæ, qua motum conſervet, urgeri viribus ad idem punctum directis.

XV. Si ſumatur arcus AD infiniteſimus, ducanturque DO, DI parallelæ, tangenti CA, & rectæ FA, exprimet AO æquipollenter vim centripetam, & DI ipſi æqualis vim centrifugam, ſive vim, qua corpus, dum nititur abire per tangentem, conatur recedere a puncto D curvæ ad punctum I tangentis; conatus autem percurrendi AI, dicitur

vis tangentialis. Arcus AD aſſumendus omnino eſt infiniteſimus, & adhuc AO, DI expriment vim centripetam, & centrifugam æquipollenter, non accurate, quia pro menſura vis perpetuo agentis aſſumptum eſt in num. 5 ſpatium, quod percurritur illa vi uniformiter agente in directum eodem aliquo tempuſculo indefinite parvo. Iam vero illa vis, quæ perpetuo agit in omnibus punctis arcus AD, non ſemper uniformiter agit, niſi ea puncta concipiantur ita indefinite inter ſe proxima, ut inæqualitas actionis reſpectu actionis totius ſit infinite parva. Præterea directio virium perpetuo mutatur, unde fit, ut amittatur pars actionis, quæ ſemper minuitur in compoſitione virium, adeoque ſpatium AO ſit aliquanto minus eo, quod percurreretur, ſi virium directio eſſet ſemper eadem, quæ differentia non eſt infiniteſima reſpectu ipſius ſpatioli AO, niſi, exiſtente arcu AD infinite parvo, directiones omnes ſint æquipollenter parallelæ, & pars amiſſa in compoſitione virium infinite parva reſpectu eius, reſpectu cuius amittitur.

XVI. Hinc ſi vis centralis concipiatur agens per intervalla tempuſculorum æqualium, quo caſu deſcribitur poligonum; effectus vis centrifugæ primo tempuſculo eſt in *Fig.* 2 DI intercepta inter arcum BD, & chordam AB, productam; ſi vero concipiatur perpetuo agens, quo caſu deſcribitur curva, eſt DI in *Fig.* 3 intercepta inter arcum & tangentem. Sed in utraque conſideratione menſura vis ipſius erit eadem: nam per num. 5 in prima ſumi debet dimidius, in ſecunda totus effectus vis agentis primo aliquo tempuſculo, & DI in *Fig.* 2 æqualis BH dupla eſt BO, cui æquari debet intercepta inter arcum BD, & tangentem parallelam æquipollenter chordæ AD. Si rite diſcernantur poligona a curvis, & conſideratio virium agentium per intervalla æqualium tempuſculorum a viribus perpetuo agentibus, vitabuntur facile plures paralogiſmi, in quos facile inciditur, & qui nonnumquam in errorem inducunt, licet ſæpe ad veram deducant concluſionem binis erroribus ſe mutuo corrigentibus.

XVII. Quælibet curva vel in ſe rediens, vel abiens in infinitum, vel infinitis ſpiris circumvoluta, deſcribi poteſt a corpore cum quavis velocitate egreſſo ex dato eius puncto ſecundum directionem tangentis, & ſollicitato viribus

qui-

quibuſdam ipſum perpetuo urgentibus verſus punctum aſſumptum ex parte cava eiuſdem curvæ. Sit (*Fig.* 2) eiuſmodi curva ABDE &c. & centrum virium F. Ducatur chorda AB quæcumque, producaturque, ut ſit BI ipſi æqualis: ducatur FB, & ipſi parallela ID occurrens curvæ in D, tum DH parallela IB, & chorda BD, quæ eodem modo producatur in P, ducaturque PE parallela DF, compleatur parallelogrammum DPEL, & ducta, productaque DE, continuetur conſtructio, ſi opus ſit in infinitum. Iam vero ſi corpus proiiciatur per AB, & ubi devenerit ad B, impellatur verſus F vi, qua ſeorſim agente percurreret BH, abibit per diagonalem BD: & pariter ſi in punctis D, E &c. urgeatur verſus punctum F viribus, quibus ſeorſim agentibus percurreret DL, EM &c., feretur per diametros DE, EK &c. parallelogrammorum LP, MK &c., & deſcribet poligonum inſcriptum datæ curvæ. Si iam concipiatur primam chordam minui in infinitum, ac proinde ita augeri numerum æqualium tempuſculorum, & minui tempuſcula, ut actio vis centripetæ evadat continua, & poligonum deſinat in curvam, ac directio proiectionis in tangentem; deſcribetur curva ipſa a corpore iis viribus centripetis prædito, & ea cum velocitate egreſſo ſecundum curvæ tangentem.

XVIII. Si curva in ſe ipſam redeat; poterit ita aſſumi prima chorda AB, ut poſtrema XA deſinat accurate in A, & tunc eæ, quæ proxime ſequentur, ſint iterum AB, BD &c. Nam ſi aſſumpta AB utcumque, deſinat in punctum aliquod Z ea, quæ proxime antecedit A; concipiatur, punctum B recedere ab A motu continuo: movebuntur reliqua omnia puncta D, E &c. motu continuo, & ubi Z in A deſinet, definiet locum puncti B, & chordam primam AB. Quoniam autem areæ omnium triangulorum debent eſſe æquales inter ſe, erunt areæ AFB, AFX æquales inter ſe, ac proinde ſi continuetur XA in Q, ut ſit AQ = AX, ducanturque BQ, FQ; triangulum FAQ, quod æquatur FAX, ob baſes XA, AQ æquales, æquabitur triangulo AFB; & quoniam ſunt ſuper eadem baſi FA, erunt etiam inter eaſdem parallelas, ductaque BG parallela AQ, erit GQ parallelogrammum, cuius diametrum AB iterum percurret corpus, & manentibus omnibus, ut prius, perget

per

per BD, DE &c. Quare viribus centralibus eodem ſemper modo agentibus in iiſdem curvæ punctis per intervalla æqualium temporum, deſcribetur indeſinenter poligonum curvæ ipſi inſcriptum, & actione continua ipſa curva deſcribetur.

XIX. Quæcumque dicta ſunt de vi centripeta urgente corpus verſus datum punctum, eodem prorſus modo applicantur vi repellenti a dato puncto, quo caſu deſcribuntur vel poligona inſcripta datis curvis obvertentibus convexitatem centro virium, vel ipſæ curvæ.

XX. Vis in B ad vim in b eſt, ut BH ad bh, vel BO ad bo, quas vires inter ſe conferre, & determinare relationem virium ipſarum ad celeritatem proiectionis, tum ut ex datis orbibus determinentur vires, quibus deſcribi poſſint, tum ut ex datis viribus eruantur orbitæ, quæ percurri debent, ad Geometriam, & Analyſim pertinet, in qua diſquiſitione ſatis patet, quam neceſſarius ſit uſus infinite, ſeu potius indefinite parvorum, quorum natura explicata a nobis eſt in diſſertatione duobus adhinc annis edita.

XXI. Quædam pauca inde huc revocanda. Nos nomine quantitatis infinite parvæ intelligimus non quantitatem in ſe determinatam, ſed quæ concipiatur decreſcere ultra quoslibuerit limites. Nominamus infinitam eam, quæ concipitur augeri ultra quoſcumque limites; finitam, quæ vel in ſe determinata eſt, vel nec concipitur augeri, nec minui ultra certos limites in ſe determinatos. Unam aliquam infiniteſimam ad libitum aſſumptam dicimus primi ordinis, eam, quæ ad hanc ſit, ut ipſa ad aliquam finitam, dicimus ordinis ſecundi, atque ita porro. Aequipollentes autem appellamus quantitates, quarum differentia eſt alicuius ordinis inferioris ipſarum ordine. Patebit autem paulo inferius non inelegans uſus eorumdem ordinum in problemate inverſo virium centralium decreſcentium in ratione reciproca duplicata diſtantiarum.

XXII. Hanc virium legem ſectiones conicæ ſibi vindicant. Sive enim directo problemate quærantur vires corporis percurrentis ſectionem conicam tendentes ad ipſius focum, & occurrit ratio reciproca duplicata diſtantiarum; ſive problemate inverſo data lege virium decreſcentium in ratione reciproca duplicata diſtantiarum quærantur orbitæ,

quæ

quæ deſcribuntur, & occurrunt ſectiones conicæ. Quamobrem aſſumenda eſt aliqua ipſarum ſectionum affectio, ex qua petatur determinatio utriuſque problematis. Nos unam ceteris præferemus ſatis notam, quæ omnium commodiſſime aſſumi poteſt pro definitione ipſa, ſi conicæ ſectiones ita primum in plano poſitæ extra conum conſiderandæ ſint, ac definiendæ, ut deductis demum præcipuis ipſarum affectionibus, demonſtretur, cono utcumque ſecto, eius naturæ curvam obvenire, quod & Hoſpitalius præſtitit, & alii plerique.

XXIII. Defin. Ex quovis puncto A lineæ LABS (*Fig.* 4) ducta recta AF ad datum punctum F, & recta AC normali ad datam rectam EC, quæ per punctum F non tranſeat, ſit ſemper FA ad AC in ratione data: lineam LABS omnia eiuſmodi puncta continentem dicimus ſectionem conicam, ſi ratio fuerit minoris inæqualitatis, ellipſim, ſi æqualitatis, parabolam, ſi maioris inæqualitatis, hyperbolam: punctum F dicimus focum, rectam EC directricem. Ea definitio & ſimpliciſſima eſt, & omnibus conicis ſectionibus eodem prorſus modo convenit, & ipſas non modo a rectis lineis, verum etiam a circulo ipſo ſecernit, cui non applicatur, niſi concipiatur, directricem EC abire in infinitum, & nuſquam iam eſſe; quo caſu, ſi ſint duo puncta A, B, ratio AC ad BR, ac proinde etiam FA, ad FB accedit ad rationem æqualitatis ultra quoſcumque limites, & curva in circulum deſinit centro F. Sed quod caput eſt, ex ea præcipue, omnes conicarum ſectionum affectiones facillime, ac pene immediate deducuntur.

XXIV. *Coroll.* 1. Si chorda BA ſectionis conicæ occurrat directrici in E, ducaturque EF, & ipſi parallela AH; erunt FH, FA æquales: nam per defin. eſt FB ad BR, ut FA ad AC, & alternando FB ad FA, ut BR ad AC, ut BE ad AE, ut FB ad FH.

XXV. *Coroll.* 2. Contra vero ſi capiatur FH æqualis FA, patet fore AH parallelam FE, vel ſi ſit & FH æqualis FA, & AH parallela EF; occurret ipſa FE chordæ BA productæ ſi opus ſit, & directrici in eodem puncto E: ac proinde dato foco & duobus punctis A, B, determinatur unum directricis punctum, & datis tribus punctis & foco, determinantur bina puncta directricis, & directrix ipſa.

XXVI.

XXVI. *Coroll.* 3. Dato foco F, directrice ER, & punčto A, facile inveniuntur omnia alia puncta ſectionis, ſi ducta quacumque FB indefinita, & facta FH = FA, ductaque AH, & illi parallela FE, ducatur recta EAB, quæ, ubi occurrat rectæ FH in B, determinabit punctum quæſitum. Facile autem inde deducitur ellipſim, & parabolam iacere totas citra directricem, hyperbolam habere ramum etiam ultra ipſam, qui vocatur hyperbola oppoſita: ellipſim in ſe redire, parabolam, & utramque hyperbolam in infinitum protendi: omnes curvas eſſe, quibus recta non niſi in duobus punctis poſſit occurrere, omneſque foco F obvertere cavitatem præter hyperbolam oppoſitam, quæ ipſi convexitatem obvertit.

XXVII. *Coroll.* 4. Ope *Coroll.* 1. facile determinatur poſitio tangentis. Nam producta EF in I, erunt anguli EFA, IFH æquales alternis FAH, FHA æqualibus inter ſe ob latera FH, FA æqualia. Concipiatur recta FB ita accedere ad FA, ut demum coeant, & evaneſcet chorda AB, una cum angulo AFB: abibit ſecans EAB in tangentem, & anguli AFI, AFE fient æquales, ac proinde recti. Quamobrem ſi data coni ſectione, & directrice detur punctum A, vel E, dabitur tangens EA, ducta FA, vel FE, & facto angulo recto ad F.

XXVIII. *Prop.* 1. *Probl.* Deſcribat corpus ſectionem conicam viribus ipſum perpetuo urgentibus verſus focum: quæritur ratio ipſarum virium in diverſis punctis. Concipiatur vires agere initio æqualium tempuſculorum indefinite parvorum ita, ut deſcribatur iuxta num. 17 poligonum ſectioni conicæ inſcriptum, cuius bina latera quæcumque indefinite parva (*Fig.* 5) ſint AB, BD, focus F, directrix CEL.

XXIX. Areæ AFB, BFD erunt conſtanter æquales triangulo, quod primo tempuſculo deſcribitur, per num. 7, chorda AD erit bifariam ſecta in O, & vires centrales exprimentur per rectam BO, per num. 9, cuius rectæ valor inveſtigandus eſt.

XXX. Rectæ BA, DA productæ occurrant directrici in C, & E, ducanturque centro F arcus OT, AIH, BG, EMN, rectæ AI, AH, & rectæ FP, BR, perpendiculares directrici, cui FB occurrat in L.

XXXI. Erunt per num. 25 rectæ FE, FC parallelæ rectis HA, IA, ac proinde anguli CFE, IAH æquales inter ſe. Cum igitur angulus IFH ad centrum ſit duplus anguli IAH ad circumferentiam; erit pariter duplus & anguli CFE, adeoque FB . $\frac{1}{2}$BG : : FE . EN = BG × FE : 2FB.

XXXII. Quoniam ob arcum EN æquipollentem tangenti normali ad EF, & rectam *F*IL æquipollenter perpendicularem chordæ AH parallelæ ipſi EF, ſunt EN, FL æquipollenter parallelæ; erunt NE . FL : : CE . CL : : ME . BL, ac proinde NE . ME : : FL . BL : : FP . BR, adeoque FP . BR : : NE = BG × FE : 2FB . EM = BG × FE × BR : 2FB × FP.

XXXIII. Quoniam arcus OT æquipollet tangenti perpendiculari ad FO, & parallelæ rectæ FE; ſimilia erunt triangula FAE, TAO, quorum anguli ad A æquales ad verticem. Pariter ſimilia ſunt AME, AOB, ob EM, OB parallelas. Quare FE . AE : : OT . OA, & EA . EM : : OA . BO, ac ex æqualitate ordinata FE . EM = BG × FE × BR : 2FB × FP : : OT . OB = BG × BR × OT : 2FB × FP.

XXXIV. Iam vero BR : FB eſt ratio conſtans, 2FP eſt pariter quantitas conſtans. Erit igitur OB ut BG × OT. Sed arcus BG, OT æquipollent ſinibus, ſive altitudinibus triangulorum BFD, FAO, quorum primi area eſt conſtans, ſecundi area æquipollet areæ conſtanti FAB, ac proinde ſunt reciproce, ut baſes FD, FA. Erit igitur OB reciproce ut FD × FA, ſive æquipollenter reciproce ut FBq. Si igitur augeatur numerus tempuſculorum in infinitum, ut evadente actione vis centralis continua, poligonum abeat in curvam; erunt vires corporis girantis circa focum ſectionis conicæ accurate in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Q. E. I.

XXXV. *Coroll.* 1. Quoniam valor BO obtinetur per quantitates finitas ductas in OT, & BG, quæ poſito arcu curvæ infiniteſimo primi ordinis, ſunt infiniteſimæ ordinis primi, oportebit ipſam OB eſſe infiniteſimam ordinis ſecundi.

XXXVI. *Coroll.* 2. Si duplum areæ AFB, vel BFD dicatur A; erit BG × OT = AA : AF × DF = AA : FBq. Si vero per focum F agitur in *Fig.* 4 recta LFS parallela directrici, occurrens ipſi ſectioni in L, & S, & SV nor-

malis ad directricem, patet fore LF = FS, & SV = FP. Erit autem ex defin. BR . BF : : VS = PF . FS. Erit igitur BF × PF : BR = FS, & 2BF × PF : BR = LS, ac proinde in formula inventa habebitur BO = AA : LS × FBq., vel ſi LS, quam ex conicis conſtat eſſe latus rectum principale ſectionis, dicatur L; erit BO = AA : L × FBq.

XXXVII. *Coroll.* 3. Hic valor BO a vero valore differt per infiniteſimam ordinis ad ſummum quarti, quod per elementa infiniteſimorum facile demonſtratur. Nam in primis in inveniendo arcu EN nihil neglectum eſt. In eruendis valoribus EM, & OB aſſumptus eſt arcus EN in num. 32 pro recta parallela ipſi FL. Differt autem ab ea recta per quantitatem non maiorem ordine tertio. Nam FL differt a perpendiculari ad chordam AH, & rectam FE ipſi parallelam, per angulum infiniteſimum ordinis ad ſummum primi, cum vera perpendicularis cadat intra angulum AFH infiniteſimum ordinis primi. Vera perpendicularis eſt parallela tangenti arcus EN. Quare recta FL eſt parallela rectæ, quæ cum eadem tangente continet angulum infiniteſimum ordinis ad ſummum primi. Eſt autem propoſitio elementaris, *poſito arcu circuli infiniteſimo ordinis primi, rectam quamlibet ductam per contactum, & terminatam ad radium, quæ cum tangente contineat angulum infiniteſimum ordinis primi vel inferioris, differre ab arcu, tangente, ſinu, chorda, per quantitatem ordinis ad ſummum tertii*. Quare ſubſtituta arcui EMN, recta Emn vere parallela rectæ FL, in eruendo valore Em = BG × FE × BR : 2FB × FP committetur error binis ordinibus ipſa inferior.

XXXVIII. Ad inveniendum valorem OB, aſſumptus eſt arcus OT pro recta parallela ipſi FE, a qua differt per infiniteſimam ordinis ad ſummum tertii, quod deducitur eodem diſcurſu, quo inventa eſt differentia arcus EN a recta parallela rectæ FL in numero ſuperiore.

XXXIX. Hinc ubi primum inventus eſt in num. 33 valor OB = BG × BR × OT : 2FB × FP, is aberrabit a vero valore quantitate ſaltem binis ordinibus inferiore ipſa OB. Eſt enim propoſitio elementaris: *In quantitate eruta per finitam multiplicationem, diviſionem, elevationem ad finitam potentiam, & extractionem finitæ radicis, tot ſaltem ordinibus diſtare ab ipſa errorem ortum ex infiniteſimis neglectis, quot ordi-*

ordinibus diſtabat illa ex infiniteſimis, quæ minime omnium diſtabat ab ea, reſpectu cuius neglecta eſt.

XL. In reductione autem valoris BG × BR × OT : 2FB × FP ad AA : L × FBq, in num. 34, negliguntur ſemper ea, quæ binis ordinibus diſtant ab iis, reſpectu quorum negliguntur. Nam ubi pro 2FB × FP : BR ſubſtituitur L, nihil contemnitur: ubi AA : AF × FD pro BG × OT, ſumuntur pro arcubus BG, OT eorum ſinus, qui ab ipſis differunt per infiniteſimam ordinis tertii, & pro area FAO area FAB, quæ ab ea differt per areolam OAB tot ordinibus ab ipſa diſtantem, quot ordinibus diſtat BO a BF, nempe binis.

XLI. Demum ubi pro AF × FD ponitur FBq, contemnitur infiniteſima binis ordinibus inferior; eſt enim propoſitio elementaris. *In triangulo* AFD, *cuius ſolus angulus* F *infiniteſimus ſit, ſecta bifariam baſi* AD *per rectam* FO; *hanc ipſam diferre a media proportionali tam Arithmetica, quam Geometrica inter* FA, FD *per infiniteſimam ordinis ſecundi*. Quare & FB, quæ differt ab FO per infiniteſimam ordinis ſecundi, differet a media proportionali Geometrica inter FA, FD, per infiniteſimam ordinis ſecundi, adeoque, per num. 39, & eius quadratum ab FA × FD.

XLII. *Prop.* 2. *Probl.* Invenire traiectoriam, quam deſcribit corpus utcumque proiectum, & perpetuo ſollicitatum verſus punctum datum extra directionem proiectionis viribus decreſcentibus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo puncto.

XLIII. Concipiatur, vires agere initio tempuſculorum æqualium, & deſcribetur (*Fig.* 6) iuxta num. 6 poligonum GABD.... X, cuius perimetri pars finita ſit GX. Erunt eius areæ GAF, AFB, BFD &c. æquales per num. 8, & recta AO ad rectam BI per num. 9, & 17 ut vis in A ad vim in B, ſive ex hypotheſi ut FBq ad FAq.

XLIV. Sit *F* focus ſectionis conicæ tranſeuntis per puncta GAB, per quæ, iuxta num. 25, definitur directrix, & iuxta num. 26, omnia ſectionis puncta. Si ſectio non tranſit per punctum D, occurrat rectæ Dd parallelæ BF in d, ubi triangulum FBd, quod æquatur FBD ob baſim FB communem, & FB, Dd parallelas, æquabitur triangulo FAB, ducaturque diA.

XLV. Quoniam per num. 37 ita eſt OA = AA : L × FAq, & Bi = AA : L × FBq, ut ab eo valore differant quantitate ordinis ad ſummum quarti; erit OA ad quantitatem differentem ab ipſa Bi per infiniteſimam ordinis ad ſummum quarti, ut FBq ad FAq, ſive per num. 43, ut OA ad BI. Erit igitur Ii ordinis ad ſummum quarti, & Dd, quæ ob AD bifariam ſectam in I eſt eius dupla, erit pariter ordinis ad ſummum quarti.

XLVI. Quoniam per num. 25 datis punctis A, B ad conicam ſectionem, & foco F invenitur punctum C eius directricis, in quo eam ſecat chorda BA producta; erit ipſum C commune tam directrici ſectionis tranſeuntis per puncta GAB, quam per puncta ABD. Sit prior directrix CeN, poſterior CEn, & occurrant illi perpendicula GH, AM, BN in H, M, N, ac recta dA producta in e, huic perpendicula Am, Bn, DL in m, n, L, & recta DA in E, rectis DE, Fe ſibi invicem occurrentibus in R. Sit demum PQ, directrix ſectionis tranſeuntis per poſtrema tria puncta VZX, ipſiſque PQ, CN ſint perpendiculares XQ, XS.

XLVII. In primis angulus EFe erit infiniteſimus ordinis ad ſummum quinti: nam iuxta num. 31 tam angulus CFE eſt dimidius anguli BFD, quam CFe dimidius BFd, ac proinde & EFe dimidius DFd. Eſt autem DFd infiniteſimus ordinis ad ſummum quinti, cum ſit FD finita ad Dd infiniteſimam ordinis ad ſummum quarti, ut ſinus anguli dDF, qui, cum æquetur alterno DFB, eſt infiniteſimus ordinis primi, ad ſinum DFd, qui evadit ordinis ad ſummum quinti.

XLVIII. Angulus vero EAe erit infiniteſimus ordinis ad ſummum tertii: nam eſt AD infiniteſima ordinis primi, ad Dd infiniteſimam ordinis quarti, ut ſinus AdD, qui cum radium non poſſit excedere, non poteſt eſſe infinitus, ad ſinum DAd, vel EAe ad verticem oppoſiti, qui ſinus evadit ordinis ad ſummum tertii.

XLIX. Quamobrem eſt ER ordinis ad ſummum quinti, eR ad ſummum tertii: nam in triangulis FEA, FeA, quorum latera omnia finita ſunt, anguli ad E, & e finiti ſunt, & ob angulos ad F, & A infiniteſimos, in triangulis EFR, eAR, finiti pariter ſunt anguli ad R, eorumque ſinus. Eſt

autem

autem in triangulo ERF ut ſinus finitus anguli R ad ſinum anguli F infiniteſimum ordinis ad ſummum quinti, ita latus finitum FE ad latus ER, quod evadit infiniteſimum ordinis ad ſummum quinti: & in triangulo ARe ut ſinus finitus anguli R ad ſinum anguli A infiniteſimum ordinis ad ſummum tertii, ita latus Ae finitum ad latus Re, quod evadit infiniteſimum ordinis ad ſummum tertii.

L. Quoniam igitur latus Ee maius non eſt lateribus ER, Re ſimul ſumptis: erit pariter ordinis ad ſummum tertii: cumque ſint ob angulos CFE, CFe infiniteſimos ordinis primi, rectæ CE, Ce ordinis ſaltem primi, erit angulus ECe ordinis ad ſummum ſecundi. Quare directrix ſectionis conicæ tranſeuntis per puncta ABD inclinatur ad directricem tranſeuntis per puncta GAB angulo ordinis ad ſummum ſecundi.

LI. Eadem vero demonſtratione directrix ſectionis tranſeuntis per puncta BDK, inclinatur ad præcedentem angulo infiniteſimo ordinis ad ſummum ſecundi, & ita porro uſque ad directricem PQ, cuius inclinatio ad primam CN continet omnes intermedias inclinationes. Continebit igitur angulus SPQ tot angulos ordinis ad ſummum ſecundi, quot latera poligoni continentur a B ad X, nempe numerum infinitum ordinis primi; ac proinde erit infiniteſimus ordinis ad ſummum primi.

LII. Ratio quoque FX ad XS differet a ratione FG ad GH, vel FB ad BN per infiniteſimam ordinis primi, vel inferioris. Nam ob angulos CNB, CnB rectos puncta Nn ſunt ad circulum, cuius diameter recta BC finita. Igitur ob angulum NCn infiniteſimum ordinis ad ſummum ſecundi, erit arcus & chorda Nn ordinis ad ſummum ſecundi, adeoque erit ordinis ad ſummum ſecundi differentia laterum BN, Bn, quæ minor eſt latere Nn, & differentia rationis FB ad BN a ratione FB ad Bn. Ratio FD ad DL eſt per definitionem eadem, ac ratio FB ad Bn, & eodem argumento ratio pertinens ad directricem ſequentem ab ea ratione differt per quantitatem infiniteſimam ordinis ad ſummum ſecundi, atque ita porro uſque ad rationem FX ad XQ, cuius differentia a ratione FB ad BN erit infiniteſima ordinis primi, vel inferioris, cum ſit ſumma omnium differentiarum intermediarum, quarum ſingulæ ſunt ordinis ad

ſum-

ſummum ſecundi, & quarum numerus eſt infinitus ordinis primi. Ob angulos autem PSX, PQX rectos puncta PSQX ſunt ad circulum, cuius arcus & chorda SQ ſunt ordinis primi, vel inferioris, & angulus SPQ, adeoque differentia laterum SX, QX, quæ eſt minor, quam SQ, & differentia rationis FX ad SX a ratione FX ad XQ erit infiniteſima ordinis primi, vel inferioris, ac proinde eodem modo differet etiam ratio FX ad XS a ratione FB ad BN.

LIII. Concipiatur iam, tempuſcula minui, & augeri numerum ipſorum ita, ut, viribus perpetuo agentibus, evaneſcant latera, & poligonum abeat in curvam perpetuam, evaneſcet angulus infiniteſimus SPQ, directrices omnes in unam deſinent, & ratio FX ad XS erit eadem, ac ratio FB ad BN, ac proinde etiam punctum X ad ſectionem conicam, cuius F focus, CS directrix. Igitur traiectoria quæſita erit coni ſectio. Q. E. I.

LIV. *Coroll.* 1. Celeritas in perimetro diverſarum ſectionum conicarum, quæ deſcribantur in quacumque diſtantia viribus ſemper habentibus rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, erit in ratione compoſita ex ſubduplicata directa lateris recti principalis, & ex inverſa perpendiculi demiſſi e foco in tangentem. Erit enim (*Fig.* 5) in ratione lineolæ AB, quæ dato tempuſculo deſcribitur. At quoniam per numerum 36 eſt vis $OB = AA : L \times FBq$, & A eſt duplum areæ AFB, ac proinde demiſſa FV perpendiculari in BA productam, eſt $A = AB \times FV$; erit $OB = ABq \times FVq : L \times FBq$, & $ABq = OB \times L \times FBq : FVq$. Sed quoniam ponitur vis OB eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiarum B*F*, erit $OB \times FBq$ quantitas conſtans. Igitur erit ABq, ut $L : FVq$, ſive AB, ut $\sqrt{L} : FV$. Evaneſcente autem latere poligoni, ſecans *B*AC vertitur in tangentem, & FV evadit perpendiculum in tangentem.

LV. *Coroll.* 2. Celeritas autem optica, ſive apparens ſpectanti motum e foco F erit in ratione compoſita ex directa ſubduplicata lateris recti, & reciproca duplicata diſtantiæ a foco. Eſt enim celeritas optica, ut angulus *AFB*, ſub quo motus ſpectatur ex *F*. Eſt autem ut in num. 11 angulus *AFB*, qui dicatur *F*, ut $A : FBq$, ac proinde AA ut $F^2 \times FB^4$. Sed per num. 36 $OB = AA : L \times FBq$. Quare erit BO, ut $F^2 \times FB^2 : L$, & $BO \times L : FB^2$, ut F^2.

Cum-

Cumque ſit vis BO reciproce ut FB^2; erit L : FB^4, ut F^2, & F ut $\sqrt{L}$: FBq.

LVI. *Coroll.* 3. Areæ, quæ dato tempore deſcribuntur in diverſis ſectionibus, erunt in ratione ſubduplicata lateris recti principalis: quadrata vero temporum periodicorum, quibus integræ revolutiones abſolvuntur in ellipſibus, ut cubi diſtantiarum mediarum a foco, ſive ſemiaxium tranſverſorum. Nam ob BO = AA : L × FBq., erit L × BO × FBq = AA, & ob BO × FBq quantitatem conſtantem, erit AA, ut L, & A, ut $\sqrt{L}$. Rurſus quoniam tempus periodicum eo maius eſt, quo maior eſt area totius ellipſeos, & quo minor eſt areola dato tempuſculo deſcripta; erit quadratum temporis periodici directe, ut quadratum areæ totalis, & reciproce, ut quadratum areolæ primo tempuſculo deſcriptæ: at ex conicis poſito ſemiaxe tranſverſo D, coniugato C, eſt dimidium lateris recti CC : D, adeoque L, ut CC : D, & L × D, ut CC; areæ autem ellipſium ſunt, ut D × C, & ipſarum arearum quadrata, ut DD × CC, ſive ut L × D^3. Cum igitur ſint quadrata primæ areolæ AA, ut L, erit quadratum temporis periodici, ut L × D^3 : L, ſive ut D^3.

LVII. *Scholium.* Quæ hactenus demonſtrata ſunt de viribus centripetis in ellipſi, parabola, & citeriore hyperbolæ ramo obvertentibus foco F cavitatem iuxta num. 26, eadem omnia eodem prorſus pacto demonſtrantur de viribus centrifugis in hyperbola oppoſita, quæ obvertit foco convexitatem, & deſcribitur viribus repellentibus corpus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum: & pariter eodem pacto applicari ipſis poterit ſequens problema.

LVIII. *Prop.* 3. *Probl.* Data directione, & celeritate proiectionis, & data quantitate abſoluta vis centralis decreſcentis in eadem lege propoſitionis 2, determinare ſectionem conicam deſcribendam. In primis directio proiectionis eſt ipſa tangens curvæ deſcribendæ, per num. 13; deinde data velocitate proiectionis, & data vi centrali, dabitur per num. 11 altitudo illa Q, ex qua corpus libere demiſſum ea vi uniformiter agente, acquireret velocitatem, cum qua proiicitur, quæ eſt ABq. : 4BO.

LIX. Iam vero per num. 36 eſt OB = AA : L × FBq., & L = 2FB × FP : BR, ac per num. 54 A = AB × FV. Erit igitur

igitur $OB = FV^2 \times AB^2 \times BR : 2FB^3 \times FP$, & $ABq : 4BO = FB^3 \times FP : 2FV^2 \times BR = Q$, adeoque $BR . FP :: FB^3 : FV^2 . 2Q$.

LX. Hinc eruitur elegantiſſima conſtructio problematis. Coniungatur centrum virium *F* cum puncto proiectionis *B*. Ducatur *FC* (*Fig.* 7) ipſi normalis occurrens alicubi in C directioni proiectionis CB, & BN parallela ipſi *FC*, quæ ſit ad *FC*, ut eſt quarta continue proportionalis poſt *FV*, & *FB*, nimirum, ut eſt $FB^3 : FV^2$ ad duplam datam altitudinem Q, (ſumenda eſt autem BN ad partes puncti C reſpectu *FB*, ſi corpus attrahatur in *F*, ſed ad partes oppoſitas, ſi iuxta num. 57 repellatur) agaturque recta CN, & ipſi perpendicularis BR; eritque *F* focus, CR directrix, *FB* ad BR ratio determinans quæſitam ſectionem, cuius omnia puncta inveniri poſſunt per num. 26. Patet: quia erit $BR . FP :: BN . FC :: FB^3 : FV^2 . 2Q$, & ob angulum CFB rectum, recta CB tangens per num. 27.

LXI. *Coroll.* 1. Sectio erit parabola, ſi fuerit altitudo Q æqualis diſtantiæ FB. Nam in parabola eſt $FB = BR$, & ob angulos CFB, CRB rectos triangula quoque CFB, CRB æqualia, adeoque perpendiculum demiſſum ex R in CB cadet in idem punctum V, eritque $FV = VR$, ac puncta FVR in directum iacebunt. Quoniam autem ob angulos ad V, & P rectos puncta FVPC ſunt ad eumdem circulum, ac proinde angulus $VFP = VCP = VCF$; ſimilia erunt triangula rectangula PFR, VCF, adeoque $CF . CV :: FR = 2FV . FP = 2FV \times CV : CF$; ac proinde in formula num. 59 $Q = FB^3 \times FP : 2FV^2 \times BR$ ſubſtituto valore FP, & poſita BF pro BR, fiet $Q = FB^2 \times CV : CF \times FV$. Eſt autem $CV . FV :: CF . FB$, adeoque $CV \times FB = FV \times FC$. Igitur erit $Q = FB$.

LXII. *Coroll.* 2. Si altitudo Q fuerit maior, adeoque vel maior velocitas, vel minor vis centripeta, traiectoria erit hyperbola, ſi minor, ellipſis. Cum enim ſit BN ad FC, ut quarta continue proportionalis poſt FV, FB ad duplam altitudinem Q, patet, aucta Q imminui BN, imminuta augeri, & in primo caſu evadere minorem, in ſecundo maiorem tam angulum BCR angulo BCF, quam ſinum BR ſinu BF.

LXIII. *Coroll.* 3. Si fuerit directio CB perpendicularis ad

ad FB, rectæ FC, BC evadent parallelæ, & puncto C in infinitum recedente, evadet directrix RP parallela directioni BC, rectæ vero FB, BR congruent cum recta FP, & recta FV cum recta FB, quare proportio num. 60 BR . FP : : $FB^3 : FV^2 . 2Q$ abibit in fig. 8 in hanc BP . FP : : FB . 2Q. Inde vero per converſionem rationis BP ad FB, ut FB ad differentiam duplæ altitudinis Q ab ipſa FB: ac proinde in eo caſu multo ſimplicior evadit curvæ determinatio, & pariter ut in *Coroll.* 2. Si fuerit Q maior quam FB, habebitur hyperbola; ſi æqualis, parabola; ſi minor, ellipſis. Donec autem fuerit Q maior dimidia FB, directrix PL iacebit ad partes B reſpectu F, quæ imminuta Q ita recedet, ut facta $Q = \frac{1}{2}FB$ abeat in infinitum, nec uſquam iam ſit: adhuc imminuta Q infra $\frac{1}{2}FB$, cadet directrix in pl ad partes oppoſitas, ut ſit Fp minor quam pB: evaneſcente prorſus Q abibit p in F.

LXIV. *Coroll.* 4. Quando facta $Q = \frac{1}{2}FB$, directrix abit in infinitum, ellipſis mutatur in circulum iuxta num. 23. Quamobrem ſi directio proiectionis ſit perpendicularis ad rectam, quæ coniungit punctum proiectionis cum centro virium, & velocitas ſit ea, quam corpus vi illa conſtanter agente acquireret cadendo per dimidiam eiuſmodi diſtantiam, deſcribetur circulus circa centrum virium, quod congruit cum Hugeniano theoremate 5.

LXV. *Coroll.* 5. Erui etiam poteſt celebre Galilei theorema, quo demonſtravit, viribus conſtantibus, & parallelis, quacumque celeritate, & directione, quæ cum directione, virium non congruat, deſcribi parabolam. Si enim (*Fig.* 6) concipiatur centrum virium F abire in infinitum; fient directiones virium BF inter ſe parallelæ, & ratio diſtantiarum BF ratio æqualitatis, ac proinde vires conſtantes. Quæcumque autem fuerit finita velocitas, erit altitudo Q infinities minor quam FB, adeoque caſus pertinebit ad ellipſim, quæ foco in infinitum recedente oblongata ultra quoſcumque limites in parabolam deſinet.

LXVI. *Scholium*. Per eaſdem formulas definiri poteſt etiam aſcenſus & deſcenſus corporis, utcumque proiecti verſus centrum virium, vel in partes centro oppoſitas; ſi ſectiones quæ deſcriberentur celeritate quam minima, vel nonnihil inclinata directione proiectionis, concipiantur deſinere

nere in rectam lineam, ubi demum evaneſcit proiectionis celeritas, vel congruit cum directione virium. Sed cavendum a paralogiſmis, in quos hic per quam facile inciditur.

LXVII. Corpus proiectum ex *B* (*Fig.* 9) directione CBD, deſcribat arcum Bd ſectionis conicæ bOBd, cuius directrix PCN determinetur ut in problemate, ſitque axis POFS. Si manente puncto B, & celeritate proiectionis, concipiatur directio CBD ita accedere ad rectam FB, ut demum cum ipſa congruat; aucta BN in infinitum, puncta POFVC ſibi invicem congruent, & rectæ C*B*D, FB cum axe POFS, & cum tota curva.

LXVIII. Hinc eruitur, corpus *B* proiectum per BD in partes oppoſitas centro virium F abiturum in infinitum, ſi altitudo illa Q, per quam motu uniformiter accelerato acquireret velocitatem, cum qua proiicitur, non fuerit minor, quam diſtantia FB, quia eiuſmodi velocitate debuiſſet percurrere hyperbolam, vel parabolam; ſi vero ea altitudo fuerit minor, corpus idem poſt aſcenſum uſque ad punctum S, in quod abit alter vertex ellipſeos eo caſu deſcribendæ, mutata directione regreſſurum ad F.

LXIX. Ipſum punctum S vel *s*, in quod abit alter vertex ellipſeos, vel hyperbolæ oppoſitæ, & celeritas in quovis puncto D facile determinantur per ultimas rationes (*Fig.* 9). Sit in *Fig.* 10 *F*Q æqualis datæ altitudini Q, & fiat QB ad *BF*, ut *BF* ad *F*S ſumendam ex eadem parte puncti *F*, ex qua iacebit *B* reſpectu Q. Quadratum autem celeritatis in D tam in aſcenſu, quam in deſcenſu, ſi Q cadat in B, erit in ratione inverſa diſtantiarum *F*D, ſi cadat infra vel ſupra, erit ut DS : *F*D, vel D*s* : *F*D.

LXX. Nam in *Fig.* 9 circulus centro *B* intervallo *FB*, occurrat rectæ R*B* productæ in A, & I, ducanturque *F*E, *B*H, normales ad RB, *F*S, & alter vertex ellipſeos (quem ſolum caſum figura exprimit) abeat in S. Erit per defin. PS . S*F* : : R*B* . *BF* = BA, & dividendo, ac alternando *F*P . RA : : S*F* . *BF*. Decreſcente *F*P ultra quoſcumque limites decreſcet pariter & AR, quæ ad illam habet rationem finitam, & *FB*, R*B* erunt æquipollentes. Pariter æquipollent tam *FB*, *F*H, *B*E ob angulum *BF*H imminutum ultra quoſcumque limites, quam *F*V, *F*C ſinus & tangens anguli infiniteſimi *FB*C. Quare ſubſtitutis hiſce æquipollentibus in

num.

num. 59 erit $FB^3 \times FP : FC^2 \times FB = 2FQ$, ſive $FB^2 \times FP : 2FQ = FC^2$.

LXXI. Ob angulum BFC rectum angulus PFC eſt complementum anguli HFB, adeoque æqualis angulo FBH, & triangula rectangula FHB, CPF ſimilia; ac proinde ut $FC^2 = FB^2 \times FB : 2FQ . FP :: FB^2 . BH^2 = FE^2$. Erit igitur $FE^2 = 2FQ \times FP$. Sed ex natura circuli eſt $FE^2 = AE \times EI$, ſive, ob *BI* æqualem, & *BE* æquipollentem *FB*, eſt $= AE \times 2FB$. Erit igitur $2FQ \times FP = AE \times 2FB$, & proinde $FP = ER . AE :: FB . FQ$, vel per converſionem rationis $FP . AR :: FB . BQ$. Numero 70 inventum eſt $FP . RA :: SF . BF$. Erit igitur $SF . FB :: FB . BQ$, quod erat primum.

LXXII. Velocitas eſt reciproce, ut FV per num. 12, & 54, ſive æquipollenter reciproce, ut FC. Inventus eſt autem valor $FC = FB^2 \times FP : 2FQ$ in fine num. 70, & num. 71 $SF . FB = FH :: FB . BQ$; unde per converſionem rationis fit $SF . SH :: FB . FQ = SH \times FB : SF$. Erit igitur $FC^2 = BF \times FP \times SF : 2SH$. Ac proinde quadratum celeritatis in diverſis punctis B ellipſeos, ut $2SH : FB \times FP \times SF$, ſive ob FP, SF conſtantes ut $SH : FB$, & abeunte puncto H in B, in *Fig.* 10 erit quadratum celeritatis in B, ut $SB : FB$, & in D ut $SD : FD$.

LXXIII. In hyperbola cadit Q ſupra B, & A, S abeunt ultra directricem, reliquis eodem modo ſe habentibus: at in parabola, congruentibus punctis A, R, & Q, B, abit S in infinitum, & ratio $SD : FD$, evadit reciproca ſolius FD; quod etiam ſic demonſtratur facilius. Eſt in *Fig.* 7 $FV = VR$ in parabola iuxta num. 61; pariter triangula rectangula PFR, VRB, FVB ſimilia ſunt, quia priora duo habent angulos ad F, & R alternos æquales, & poſteriora æqualia ſunt ob $FB = BR$. Erit igitur $FP . FR = 2FV :: FV . FB$. Quare $2FV^2 = FP \times FB$, & ob FP conſtantem erit FV^2, ut FB, & quadratum celeritatis reciproce, ut FB.

LXXIV. Si in *Fig.* 11 puncta *FBDSs* ſint eadem, ac in 10, & concipiantur FS, Fs æquales, ac per punctum C aſſumptum ad arbitrium in recta FC perpendiculari ad *FS* agatur CN ipſi FS parallela, atque inter aſſymptotos CN, CF indefinite producta per puncta S, & s tranſeant rami

 SHR,

SHR, ris, el, ELE hyperbolarum coniugatarum, tum per puncta D, B agantur ordinatæ ENDI, LKBH, poſitis punctis I, H ad partes puncti F reſpectu rectæ CN; exprimatur autem quadratum celeritatis, cum qua corpus proiicitur, quando Q eſt minor quam FB, per rectam BH, quando æqualis, per KH, quando maior per BL: & in quacumque alia diſtantia FD exprimetur quadratum celeritatis in primo caſu per DI, in ſecundo per NI, in tertio per DE.

LXXV. Nam ex notiſſima aſymptotorum natura eſt $CN \times NI = CF \times FS$, adeoque $NI = CF \times FS : CN = CF \times FS : FD$. Hinc $DI = NI - ND = CF \times FS : FD - CF = (CF \times FS - CF \times FD) : FD, = CF \times SD : FD$, & pariter $CN \times NE = CF \times Fs$, adeoque $NE = CF \times Fs : CN = CF \times Fs : FD$; hinc $DE = NE + DN = CF \times FS : FD + CF = (CF \times Fs + CF \times FD) : FD = CF \times sD : FD$. Adeoque ob CF, SF, sF conſtantes erunt DI, ut DS : FD, NI ut 1 : FD, DE ut Ds : FD.

LXXVI. In primo caſu velocitas omnis extinguitur in S, tum eædem ordinatæ DI exprimunt quadrata celeritatum in deſcenſu: ordinatæ autem ſuperiores Di exprimerent quadrata celeritatum, quæ haberentur in aſcenſu vi centripeta ſupra S in centrifugam verſa. In ſecundo caſu velocitas decreſcit ultra quoſcumque limites, ſed nunquam extinguitur. In tertio caſu decreſcit quidem, ſed ita, ut decreſcente NE ultra quoſcumque limites, ſemper remaneat velocitas maior, quam ea, cuius quadratum exprimitur per rectam BK vel DN, dimidiam eius, quæ exprimit quadratum velocitatis in diſtantia FS æquali Fs.

LXXVII. In omnibus caſibus ſi corpus demittatur deorſum ex B verſus F; ordinatæ DI, NI, DE indicabunt pariter quadrata celeritatum pro punctis D aſſumptis infra *B*, & celeritas in acceſſu ad F augebitur in infinitum.

LXXVIII. Quid vero poſt appulſum ad F? Eulerus tomo 1 Mechanicæ §. 655 cenſuit corpus poſt appulſum ad F debere ſurſum regredi, licet ad F appellat cum infinita celeritate deorſum, nec ullum inveniat obicem. Idque ſic omnino demonſtrari arbitratur. Si corpus (*Fig.* 10) ex S proiiciatur velocitate ita exigua, ut deſcribat ellypſin SNOM; girabit perpetuo circa punctum F deſcendendo, & aſcendendo

dendo

dendo per vices ab S ad O, & ab O ad S. Imminuta celeritate proiectionis, donec evaneſcat, abibit demum perimeter ellipſeos in rectam SF, & punctum O in F. Quare corpus ad F delatum retro curſum flectet ad S, nec ultra F progredi poterit.

LXXIX. Idem repetit §. 762, ubi generalius affirmat, ſi vires ſint in ratione diſtantiarum reciproca triplicata, vel maiore; delatum ad centrum cum infinita velocitate debere *nuſquam amplius reperiri, ſed quaſi ſubito annihilari*, valore nimirum formulæ, quæ diſtantiam exprimit, poſt appulſum ad centrum abeunte in imaginarium, ſive impoſſibilem: ſi vires ſint in ratione minore, quam triplicata, ſed non minore, quam ſimplici, corpus pariter delatum, cum infinita celeritate debere curſum retro flectere: & ſolum ubi vires ſint in ratione minus quam ſimplici, debere appellere cum velocitate finita, & ultra progredi. Senſit quidem, quam veritati minus conſentanea prima illa duo appareant ipſa prima fronte, ut ſatis luculenter expreſſit §. 272; cenſuit tamen ita evidenter deduci ex formulis algebraicis, & ex hac transformatione curvarum in rectas, ut *calculis potius, quam noſtro iudicio fidendum ſit*.

LXXX. Nos quidem infinite parva, & infinita, quæ in ſe determinata ſint, omnino reſpuimus iuxta ea, quæ demonſtrata ſunt in diſſertatione de natura, & uſu infinitorum, & infinite parvorum, de qua num. 20. Cumque celeritatis menſura requirat ſpatium aliquod aliquo tempore percurſum, nullam agnoſcimus celeritatem abſolute infinitam, aut infinite parvam. Illud certe patet, nullam omnino debere eſſe in natura aut vim, aut celeritatem infinitam, ne in hiſce quidem hypotheſibus; ſi quod par eſt credere, non puncta pure imaginaria agant in alia puncta, ſed corpora in corpora, quo caſu ob corporum impenetrabilitatem ad centrum virium deveniri non poteſt. Sed ſi libeat conſiderare punctorum vires in puncta; affirmamus hæc duo. 1 Ex transformatione ellypſeos, vel alterius ſectionis conicæ, in rectam lineam non deduci reflexionem motus a centro virium in eamdem plagam. 2 Poſſe oppoſitum demonſtrari, quod nimirum motus continuari debeat ultra centrum, celeritate per eoſdem gradus imminuta, per quos creverat.

LXXXI.

LXXXI. Primum ſic facile intelligetur. Recta MFN normalis ad axem SFO occurrat in M, & N ellipſi, quam deſcribit corpus proiectum ex S ſecundum rectam normalem ad SF. Actio vis centralis reſolvatur in duas partes alteram parallelam axi SF, alteram eidem normalem. Omiſſa hac poſteriore, quæ extinguit velocitatem proiectionis, tum generat acceſſum ad axem, ac receſſum, illa prior generat acceſſum ad rectam MN, & receſſum ab eadem. Ab S ad N hic acceſſus perpetuo acceleratur: ob celeritatem acquiſitam recedit corpus uſque ad O, nimirum donec ob directionem eiuſdem vis verſam in oppoſitum extinguitur tota ipſa celeritas: tum iterum nova amiſſæ æqualis acquiritur ad partes contrarias per arcum OM, quæ pariter per arcum MS amittitur.

LXXXII. Oportet igitur actionem virium omnium per arcum NOM æqualem eſſe actioni per MSN, & duplam actionis, quæ habetur in deſcenſu per arcum SN, brevitate nimirum temporis compenſata per intenſionem actionis ipſius ex maiore vicinia ortam. Attenuetur iam ellipſis ultra quoſcumque limites: decreſcet quidem arcus MON, ſed actio illa ſemper dupla actionis per SN augebitur cum ipſa. Si ellipſis demum abeat in rectam, evaneſcet prorſus hæc actio cum arcu NOM, & actio per SN excreſcet in infinitum puncto N abeunte in F. Contempto arcu NOM, videtur contemni quantitas infinite parva, & contemnitur, vis dupla eius, quæ genuit totam velocitatem acquiſitam in deſcenſu, nimirum vis, quæ debuiſſet hanc ipſam velocitatem extinguere, & contraria æquali producta, repellere corpus uſque ad altitudinem S. Plurima eiuſmodi exempla proferri poſſent, & ex Geometria, & ex Mechanica, & iccirco monuimus diligenter cavendum a paralogiſmis.

LXXXIII. Partem alteram ſic evincemus. Trahatur (*Fig.* 11) punctum poſitum in S ab omnibus punctis ſuperficiei ſphæricæ Mm in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Demonſtravit Newtonus attractionem ex omnibus compoſitam fore in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro F, donec punctum fuerit extra ſuperficiem; at intra ſuperficiem ubicumque, ut in O, fore prorſus nullam. Igitur id punctum accelerabit motum perpetuo uſque ad M, tum per Mm feretur æquabili celeritate, quam acquiſivit

uſque

uſque ad M, ac deinde per mds feretur motu retardato uſque ad diſtantiam Fs æqualem FS. Concipiatur iam, radium ſphæræ minui donec abeat in punctum F. Oportebit punctum attractum in F in ratione reciproca duplicata diſtantiarum progredi ultra F: nec in hac demonſtratione quidquam contemnitur præter ſpatium Mm prorſus iners, ubi id ultimo concipitur evaneſcere.

LXXXIV. Si conſtructis iiſdem illis hyperbolis, ducantur præterea ordinatæ MR, mr, OT, cum recta RVr; exprimentur quadrata velocitatum in D ante appulſum ad F per DI, & in d poſt appulſum per di priori æqualem paribus diſtantiis. Nec obeſt quod arcus SI conſtituat eamdem curvam, & exprimatur eadem formula, non cum arcu si, ſed cum el; quia ſæpe accidit, ut eiuſdem curvæ aut formulæ partes aliæ aliis problematis ſolvendis inſerviant, & eidem problemati partes diverſæ diverſarum curvarum. Utriuſque exemplum hic adeſt. Ordinatæ DI uſque ad S inſerviunt aſcenſui corporis attracti in F, ordinatæ Di, quæ ad eamdem curvam pertinent, nihil exprimunt in hac hypotheſi, ſed determinant quadrata velocitatum, quas corpus haberet in aſcenſu ſupra S, ſi vires centripetæ ibi mutentur in centrifugas; quæ mutatio cum fiat per ſaltum, viribus nimirum centripetis in S nec evaneſcentibus, nec in infinitum excreſcentibus; utraque hypotheſis eadem formula non exprimitur, ſed ad duplex problema pertinet.

LXXXV. Contra vero in caſu, quo puncta omnia ſuperficiei ſphæricæ vires exerant eodem ſemper modo circumquaque in ſphæram in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, exprimentur quadrata celeritatum puncti in S ſibi relicti uſque ad M per ordinatas DI ad arcum SIR, ab M uſque ad m, non per ordinatam OT ad eumdem arcum, ſed per ordinatam OV ad rectam Rr, ab m uſque ad s per ordinatas di ad arcum ris alterius hyperbolæ, qui nec cum arcu ISR, nec cum recta Rr exprimitur eadem æquatione.

LXXXVI. Eodem prorſus pacto, ubi ſuperficies ſphæræ Mm abiit in punctum F, quod concipitur præditum tota illa vi abſoluta, quam habuerat ſuperficies, arcus SRT, srt licet pertinentes ad diverſas hyperbolas exprimert per ordinatas ſuas quadrata celeritatum ſemper poſitiva, & in pari-

bus

bus a centro diſtantiis æqualia: & pariter in omnibus tribus caſibus hyperbolæ, parabolæ, ellipſeos abeuntium in rectam lineam, corpus delatum in centrum celeritate aucta ultra quoſcumque limites perget ad partes oppoſitas, & paribus a centro diſtantiis pares habebit celeritates.

LXXXVII. Poſſent facile definiri & tempora deſcenſuum, atque aſcenſuum. Illud ſit ſatis, quod eruitur ex num. 54 quadrata temporum deſcenſuum ex diverſis altitudinibus FS, corporis ex S libere decidentis, & oſcillationum ab S ad s fore ut cubos diſtantiarum ipſarum. Hæc ſunt, quæ vobis, Sodales optimi, proponere habebamus. Veſtrum erit de omnibus iudicium ferre.

Fig. 1.

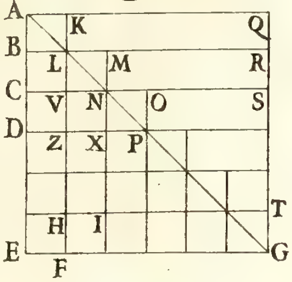


Fig. 2.

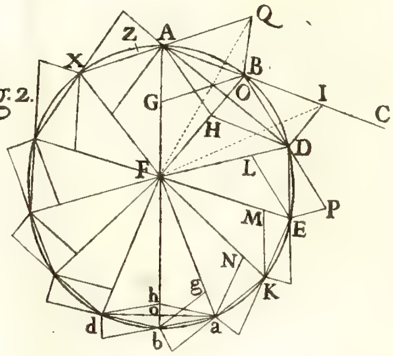


Fig. 3.

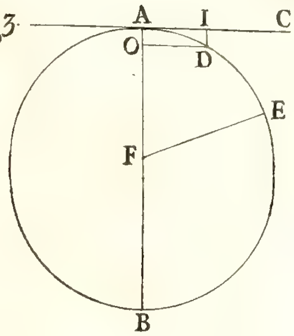


Fig. 4.

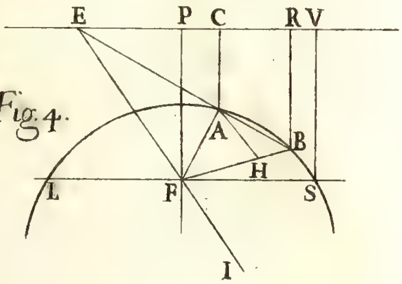


Fig. 5.

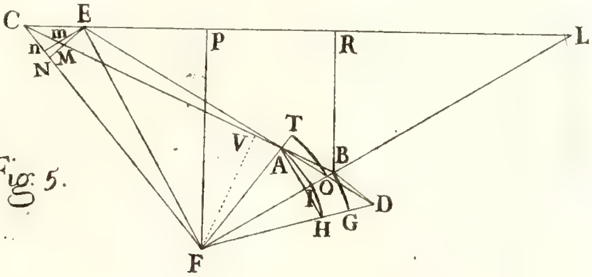


Fig. 6.

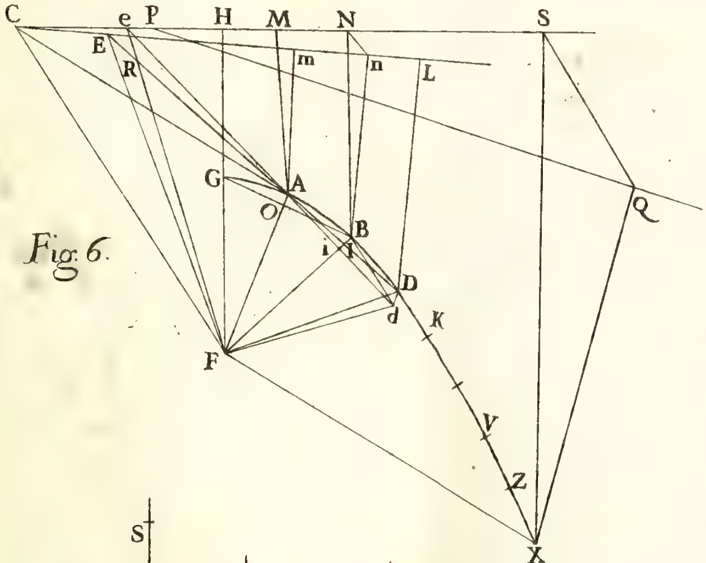


Fig. 7.

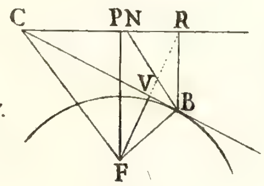


Fig. 8.

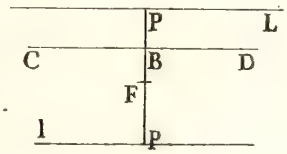


Fig. 9.

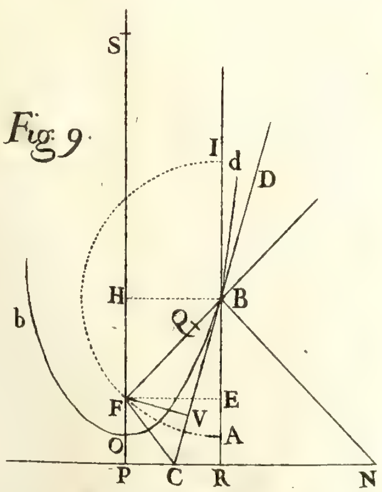


Fig. 10.

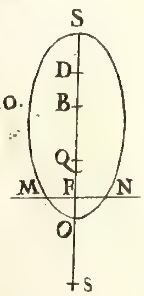
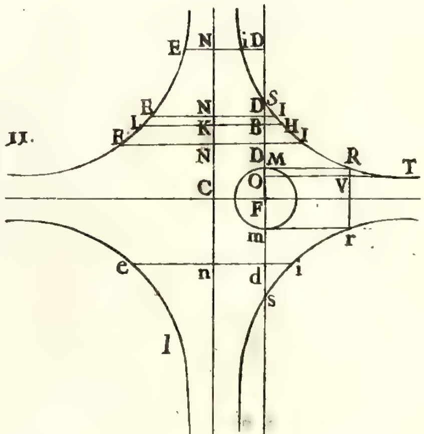


Fig. 11.



NATURAL HISTORY

ROGERII IOSEPHI BOSCOVICHI

De viribus vivis.

CEleberrimam de virium vivarum menſura controverſiam aggredimur, Sodales doctiſſimi, vel dirimendam, vel componendam, vel potius ſummovendam: opus ſane arduum, & audax conſilium: nulla enim fortaſſe alia Mathematicos primæ notæ, nulla certe Mechanicos gravius, diutiuſque in factiones diſtraxit. At quid nocebit tentaſſe? Si res minus proſpere ceſſerit; licebit ſaltem uſurpare vulgatiſſimum illud: *Vel contendiſſe decorum eſt*.

I. Duo virium genera in corporibus univerſa diſtinxit antiquitas, quorum utrumque a potentiis quibuſdam motus omnes vel generantibus, vel immutantibus ortum duceret: alterum, quod in niſu quodam ad motum conſiſteret, qui ſine ullo etiam motu haberi poſſet, ut ubi per ſubiectum planum impeditur gravitatis effectus; alterum, quod ſemper cum motu ipſo coniunctum eſſet, quod Peripatetici impetum appellarunt, & ita per niſum illum ſummoto obſtaculo cenſuerunt gigni, ac corporibus communicari, ut eius ope & motum continuarent, & obſtacula, ſi quæ ſe offerrent, pervincere conarentur, ac ſummovere. Utriuſque autem generis vires a ſola celeritate æſtimari conſueverant, ubi de ſingulis æqualibus materiæ particulis ageretur; ut nimirum niſus ille duplus eſſet, vel triplus, qui ſummoto obſtaculo duplam in eadem materiæ particula, vel triplam velocitatem generaret eodem tempore; impetus autem duplus cenſeretur, vel triplus, qui cum dupla, vel tripla celeritate eiuſdem particulæ coniunctus eſſet: ac proinde, ubi de inæqualibus materiæ quantitatibus, ſive, quod idem ſonat, de inæqualibus maſſis ſermo eſſet; æſtimabantur vires utriuſque generis a ſummis celeritatum particularum omnium æqualium, nimirum a maſſis ipſis in ſimplicem celeritatem ductis.

II. Et quidem, quod ad primi generis vires pertinet, earum menſura facile experimentis confirmabatur, cum & virium æqualitas, ſi æquales forent, ex æquilibrio innoteſceret, ac per æqualitatem ratio quoque, ſi forent inæquales, deduceretur, & celeritates dato tempore genitæ facile obſervando detegerentur. In vertice B (*Fig.* 1) plani inclinati AB accuratiſſime levigati ſit trochlea, filo DBC advoluto, e cuius altero extremo globus C libere pendeat, ex altero bini æquales ex eadem materia globi E, & D partim ab ipſo filo, partim ab eodem plano inclinato ſuſtineantur. Quoniam niſum ad deſcenſum per planum inclinatum minorem experimur, quam ad deſcenſum liberum; invenietur facile inclinatio illa, quæ globum C cum globis E, & D in æquilibrio ſiſtat. Eo caſu niſus ad deſcenſum globi D, æqualis niſui globi E æquabitur dimidio niſui globi C, cum ob æquilibrium primi illi duo ſimul hunc tertium ſolum adæquent. Iam vero ſi filo diſrupto diligenter notentur celeritates, quas in deſcenſu acquirunt eodem tempore globi C, & D; invenietur prioris celeritas poſterioris celeritatis dupla; in eadem nimirum ratione niſuum; quod idem generalius deprehenditur, ſi in D quicumque æqualium globorum numerus appendatur, vel globus cuiuſcumque maſſæ; celeritates enim ſingularum particularum in deſcenſu acquiſitæ eodem tempore erunt, ut niſus ex æquilibrio deducti, quod idem aliis quoque methodis, & in aliis virium generibus experiri liceret.

III. Quod vero ad ſecundi generis vires pertinet, tentatum quidem a Galileo, Merſenno, Ricciolio, aliiſque, ſed experimentis plures non ita notas circumſtantias involventibus, ut nihil inde erui potuerit, quod controverſiæ occaſionem præriperet. Adhuc tamen uſque ad annum 1686 ſecundi quoque generis virium menſura eadem ſatis communiter eſt adhibita. Eo autem anno in Actis lipſienſibus Leibnitius ſchediaſma edidit, cui titulus: *Brevis demonſtratio erroris memorabilis Carteſii, & aliorum circa legem naturæ &c.*, in quo primi generis vires *Mortuas* appellavit, ſecundi generis *Vivas*, & illas quidem a maſſis in velocitates ductis, has vero a maſſis ductis in quadrata velocitatum æſtimandas cenſuit; ut nimirum idem corpus cum dupla velocitate delatum non duplam, ſed quadruplam habere debeat

beat vim vivam, cum tripla, vel decupla non triplam, vel decuplam, ſed noncuplam, vel centuplam: cuius novæ ſententiæ illud in primis protulit fundamentum vir celeberrimus, quod videret gravia ſurſum proiecta aſcendere ad altitudines proportionales non celeritatibus ipſis, ſed celeritatum quadratis.

IV. Et initio quidem non ita multos nova opinio ſectatores habuit, pleriſque adhuc veteri ſententiæ addictis, Papino in primis recentem illam impugnante, cum quo aliquamdiu certavit Leibnitius. Verum Ioanne Bernoullio redintegrante bellum, qui novis elaſtrorum experimentis Leibnitianam ſententiam reſtituit, plurimi ſtatim per Germaniam potiſſimum, atque Italiam ſummi viri eaſdem partes amplexi ſunt, quas Hermannus elaſticorum globorum occurſibus, Polenus fovearum in molli corpore excavationibus factis impreſſione diverſorum globorum decidentium ex diverſis altitudinibus, alii aliis confirmare conati ſunt, ac ſtabilire; maximo auctoritatis pondere leibnitianæ ſententiæ accedente a reliquorum Bernoulliorum, & Volfii ſuffragiis in Germania, Graveſandii, & Muſſchenbroeckii in Hollandia, Comitis Iacobi Riccati iam olim, & nuper Patris Vincentii Riccati eius filii ſummi e noſtra Societate Mathematici in Italia, ac demum in Gallia ipſa veteri potius ſententiæ addicta matronæ lectiſſimæ du Chatellet, quæ in ſuis phyſicis inſtitutionibus leibnitianas partes acerrime propugnavit.

V. Nec tamen vetus ſententia tanto auctoritatis pondere obruta corruit, aut de ſuo dignitatis gradu devoluta eſt, plurimis per galliam potiſſimum, & angliam contra obnitentibus, & in hac quidem Stirlingio, ac Mac-laurino, in ea Mairanio ſummis viris, pro eadem tamquam pro aris, & focis acerrime pugnantibus, quorum poſtremus ita noſtro quidem iudicio veterem explicavit ſententiam, & ab omnibus adverſariorum telis protexit; ut nihil iam ab experimentis afferri poſſit, quod Mairanii methodo cum ea optime conciliari nequeat, analogia præterea, & ſimplicitate naturæ ipſi abunde faventibus: quem tantum virum & iniuria carpit, & quidem acrius, quam par eſſet, Petrus Martinus in opuſculo de viribus vivis edito quatuor ab hinc annis, licet eamdem ibidem, quam Mairanius ſententiam

propugnet. Ubi illud ſane Martino contigit, quod ſæpe quoſdam primæ notæ auctores carpentibus uſuvenire ſolet, ut in eo maxime, in quo eos corrigendos putant, labantur ipſi. Rem totam aperiemus quam breviſſime, non quod hac noſtra defenſione indigere arbitremur celeberrimum virum in re ſatis patente per ſe ipſam; ſed ut erga doctiſſimum hominem, nobiſque amiciſſimum, qualecumque hoc obſequii noſtri argumentum exhibeamus; atque ut in hoc ipſo cœtu, apud quem olim tam graviter accuſatus fuit Mairanius, non deſit, qui tanti viri, licet illam quidem ſponte etiam incurrentem in oculos, defenſionem ſuſcipiat.

VI. Inter cetera experimenta, quæ pro leibnitiana ſententia afferri ſolent, illud eſt non vulgare, quo globus A, (*Fig.* 2) ſi demittatur ſucceſſive ex diverſis altitudinibus AB in maſſam MN argillæ mollis, vel ſebi, vel alterius eiuſmodi materiæ cuiuſcumque, deprehenditur excavare foveas DCE proportionales ipſis altitudinibus, ex quibus globus demittitur: cumque ex legibus Galilei quadrata celeritatum, quas gravia cadendo acquirunt, ſint ut altitudines, ex quibus cadunt; patet foveas ipſas eſſe proportionales non velocitatibus, ſed velocitatum quadratis, ex quo leibnitiani deducunt vires quoque vivas corporum, quarum nimirum effectus ſit eiuſmodi fovearum excavatio, non ipſis celeritatibus reſpondere, ſed celeritatum quadratis. Id ipſum experimentum paſſim a leibnitianis adductum recenſuerat una cum aliis nonnullis in ſua diſſertatione Mairanius, quam anno 1728 commentariis Academiæ pariſienſis inſeruit, illud adiungens, ea in dubium revocari non poſſe, cum tradantur a viris æque doctis, ac in experimentorum diligentiſſima inſtitutione exercitatis. Admiſſo autem experimento demonſtraverat ex veteri ipſa de viribus vivis ſententia idem prorſus phænomenum conſequi debere, ſi ratio temporis, quo velocitates ſingulæ amittuntur, habeatur: illud enim oſtenderat, ſi earum virium, quæ in fovea excavanda amittuntur, ineatur ratio, duplam vim amitti non poſſe, niſi poſt quadruplum mollis illius materiæ loco motum, atque compreſſum.

VII. Mairanii locum in notis in ſuam illam diſſertationem Martinus producit, ubi etiam idem experimentum ad-

dit

dit & a Fontenello traditum, ut exacte inſtitutum, ac ſæpius repetitum, & a Cribellio fuiſſe propoſitum, & a Poleno admiſſum, quod idem demum in fine ipſius diſſertationis apud Muſſchenbroeckium quoque ſe legiſſe affirmat. Nihilo tamen minus ego, inquit, *ſi opus eſſet iurarem a nemine hoc experimentum fuiſſe inſtitutum. Sed ignoſcamus Mairano experimenti ignorationem, ſe enim in eo libenter credulum præbuiſſe apparet. Quis ei ignoſcet id, quod fidenter tradit, experimentum ipſum cum vulgari virium æſtimatione mire conſentire?* Sub finem autem de Muſſchenbroeckio agens. *Opponit*, inquit, *varia experimenta, inter quæ non reticet illud globi cadentis ab inæqualibus altitudinibus, imprimentiſque foveas proportionales altitudinibus ipſis; qui quidem error eſt ei communis cum Carteſianis, Leibnitianiſque omnibus ſic experimentum ſe habere tradentibus.* Mirum ſane videbitur contra tantam tantorum hominum, immo omnium Carteſianorum, ac Leibnitianorum licet contrarias inter ſe partes defendentium auctoritatem in quæſtione de facto, hac noſtra ætate, qua ubique diligentiſſimis, & crebro repetitis experimentis in naturam inquiritur, affirmaſſe, paratum ſe iurare a nemine hoc experimentum inſtitutum, & Mairanii credulitatem incuſaſſe. Nec minus admiratione dignus tantæ fiduciæ fons. Inſtituerat nimirum idem experimentum Martinus, cuius ſucceſſum cum Mairanii, ceterorumque omnium teſtimoniis apprime conſentientem, ut ex ipſa eius narratione conſtat, ipſe maxime iiſdem contrarium cenſuerat. Dimenſus enim fovearum profunditates BC, ſive arcuum DCE ſinus verſos, invenerat profunditatem foveæ impreſſæ a globo ex quadrupla altitudine decidente eſſe proxime duplam non quadruplam. At ii cum foveam nominant, non eius profunditatem intelligunt, ſed ſpatium omne DCE longum, latum, & profundum, quod indicat quantitatem materiæ mollis loco motæ, atque compreſſæ, nimirum ſegmentum ſolidum ſphæræ, cuius ſegmenti axis eſt ipſa illa profunditas CB. Conſtat autem, ſi axes CB plurium ſegmentorum ad diametrum ſphæræ rationem exiguam habeant, fore ſegmenta ipſa proxime, ut profunditatum quadrata; poſita enim ratione diametri ad circumferentiam ut 1 ad c, diametro ſphæræ $= a$, axe CB $= x$, eſt ſegmentum ſphæricum $\frac{1}{2}acxx - \frac{1}{3}cx^3$, in qua formula ſi x reſpectu a ſit ſatis exi-

exigua, ſecundum membrum contemni poterit ſine notabili mutatione primi; ac proinde ſegmenta ipſa erunt proxime ut $\frac{1}{2}acxx$, ſive ob $\frac{1}{2}ac$ conſtantem, ut xx, in duplicata ratione profunditatum. Quamobrem ex eo ipſo, quod Martino obvenerit fovearum profunditas proxime dupla in caſu altitudinis quadruplæ, colligitur foveam ipſam proxime quadruplam extitiſſe; quod Mairanius, quod Fontenellus, quod Muſſchenbroeckius, quod Carteſiani, & Leibnitiani omnes, ipſo Martino teſte, haud illi quidem plus æquo creduli, ita ſe habere affirmaverant.

VIII. Nec primum hoc eo in genere Martini infortunium. Accuſaverat gravius ipſe in epiſtola illa de luminis refractione (de qua epiſtola & nos mentionem fecimus in diſſertatione: De natura & uſu infinitorum, & infinite parvorum: edita anno 1741, & meminit Martinus in hoc opuſculo eodem anno edito) PP. Clavium, & Tacquetum, quod affirmarent e falſo directe ratiocinando verum demonſtrari poſſe, & integram diſſertationem de eodem argumento promiſerat. Nos ibidem, & quæ Martinus inter ſe confunderet, & in quo maxime falleretur, paucis expoſuimus, illud polliciti, ſi eiuſmodi diſſertationem edidiſſet, defenſionem ſuſcepturos, & quæ nobis tam in ea epiſtola, quam in edenda diſſertatione diſplicerent, evulgaturos. Edebat autem ipſe eodem ferme tempore opuſculum ſuum de virium vivarum menſura, cuius notis immiſcuit nonnulla, quæ ad eiuſmodi quæſtionem pertinerent. Cum vero ibidem nihil prorſus invenerimus, quod ad ea ſpectet, quæ nos obiecimus; cenſemus opuſculi impreſſionem abſolutam eſſe, ante quam noſtræ diſſertationis exemplum ad ipſum perveniret. Nec vero inter ea, quæ adiecta ſunt ibi, quidquam adeſt, quod nos magnopere moveat, ſive rationem illam ſpectemus, qua Martinus utitur ad probandum, non poſſe e falſo deduci verum, ſive reſponſionem, qua Tacquetianam demonſtrationem conatur eludere. In ipſa enim ratione æquivocationem quamdam latere, haud difficulter oſtendi poteſt, quod tamen manifeſtius patet ex ipſa tacquetiana demonſtratione, in qua illud ſane omnino inficiari Martinus non poteſt; ex falſa hypotheſi, quod recta linea, quam ibi Tacquetus nominat, perpendicularis ſit dato plano, deveniri ad veram propoſitionem, quod perpendicularis non

ſit,

ſit, abſque eo, quod ullum in toto illo diſcurſu ratiocinationis vitium deprehendi poſſit. Deducit quidem Tacquetus demonſtrationem eo, ut evincat, falſa illa hypotheſi admiſſa, angulum quemdam, qui vere rectus eſſe debet, obliquum eſſe; ſed male iccirco Martinus infert, a Tacqueto nihil niſi falſum ex falſo erui; nam in ea Tacquetus propoſitione non ſiſtit, ſed recta utique ratiocinatione ex illa anguli obliquitate iam deducta ad veram tandem propoſitionem progreditur, quod nimirum recta illa ipſa dato plano perpendicularis non ſit, quæ propoſitio & deducitur ex falſo, & cum ex ipſa ſua contradictoria deducatur, evidenter vera deprehenditur. Verum hic in eo fuſius immorari nec licet, nec libet: immorabimur fortaſſe alibi potiſſimum, ſi quid ad ea, quæ in noſtra illa diſſertatione propoſuimus, reponat uſpiam. Interea vero propoſita de viribus vivis controverſia ad ſe nos vocat.

IX. Nos quidem poſteaquam, & phænomena omnia, & phænomenorum explicationes ab utriuſque partis propugnatoribus propoſitas diu diligentiſſime conſideravimus, in eam tandem ſententiam devenimus, quam hic vobis, Sodales doctiſſimi, proponemus: *Vires vivas in corporibus nullas eſſe:* illud enim contendimus, phænomena omnia ita pendere a vi inertiæ, & momentaneis, ac perpetuo pereuntibus potentiarum actionibus, ſive viribus mortuis, ut vires vivæ ſint prorſus ſuperfluæ, ac ex illo Newtoni principio ſatis communiter admiſſo, cauſas non plures admittendas eſſe, quam quæ veræ ſint, & effectibus explicandis ſufficiant, omnino e phyſica reiiciendæ. Si eam ſententiam ſatis comprobaverimus, ſummovebitur ipſa de virium vivarum æſtimatione controverſia. Si autem adhuc virium vivarum nomine uti libuerit, & id nomen adnectere ideæ alicui obiecta alia aliunde nota complectenti; tum vero poterit ita adhiberi, ut vires vivæ vel maſſis reſpondeant in ſimplices celeritates ductis, vel maſſis ductis in quadrata celeritatum, quo quidem pacto controverſia ipſa componeretur redacta ad litem de nomine. Si demum ſecluſo principio illo, vires vivas licet ſuperfluas illas quidem, & inutiles, quiſpiam omnino velit admittere; affirmamus, ſalvis phænomenis, admitti poſſe vel ita, ut reſpondeant maſſis in celeritates ſimplices ductis, vel maſſis ductis in celeritatum quadrata,

ita

ita tamen, ut ſimplicitati & analogiæ naturæ melius conſulatur in priore, quam in poſteriore ſententia, quo demum pacto controverſia dirimeretur. Hæc autem omnia cum expoſuerimus; addemus ex ea occaſione nonnulla, quæ ad corporum compoſitionem, & partium, ex quibus coaleſcunt, naturam, vireſque pertinent, nobis ſaltem nova, & ut ſperamus nec iniucunda, geometris potiſſimum, nec infæcunda, & quæ noſtram hanc ipſam de viribus vivis ſententiam ſimpliciorem reddant, atque elegantiorem.

X. Agnoſcunt omnes utriuſque ſententiæ mechanici vim eam in corporibus, quam Keplerus omnium primus vim *Inertiæ* appellavit, Newtonius vim inſitam, & paſſivam. Ea eſt determinatio quædam materiæ ad perſeverandum in eo ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel eſt poſita, niſi aliqua potentia cogat ſtatum mutare. Ea vel eſt quædam naturæ lex conditori libera, vel eſt quædam, ut ſcholaſticorum voce utamur, exigentia conditionata ipſius eſſentiæ corporis, quam & Peripatetici poſſunt admittere, &, ſi velint, in qualitate etiam aliqua collocare, quæ habeat eiuſmodi conditionatam exigentiam. In quo ea ſita ſit phyſice, hic nimirum non quærimus. Satis eſt nobis, quod eam in corporibus admittant Mechanici, tam ii, qui vires vivas admittunt ſolis velocitatibus proportionales, quam ii, qui velocitatum quadratis, cum quibus agimus. Ea vi inertiæ corpora, ſi nullam habent velocitatem, quieſcunt; ſi habent aliquam, eamdem retinent, donec nova ab aliqua potentia generetur.

XI. Porro velocitas, vel celeritas, poteſt conſiderari (ut hic etiam ſcholaſticorum utamur vocibus, hic maxime idoneis) in actu primo, & in actu ſecundo. Velocitas in actu ſecundo eſt relatio quædam ſpatii, quod percurritur, & temporis, quo percurritur: nec eius idea quidquam aliud involvit præter tempus, ſpatium, & eorum relationem quamdam, qua hæc celeritas eo maior dicitur, quo plus ſpatii eodem tempore percurritur motu uniformi, & quo minus tempus in eodem ſpatio percurrendo impenditur; ac proinde eſt, ut ſpatium diviſum per tempus. Huic celeritati in ſingulis particulis materiæ reſpondet quantitas motus dato tempore perfecti ab eadem particula, qui motus, cum ſit translatio de loco in locum, eſt ut ſpatium

per-

percurſum. Ac proinde in toto corpore eſt quantitas motus, ut ſumma celeritatum particularum omnium, ſive ut celeritas in maſſam ducta. Hæc ipſis mechanicæ tyronibus notiſſima ſunt.

XII. Velocitas in actu primo eſt ipſa determinatio, quam habet corpus ad hanc celeritatem in actu ſecundo; ſive eſt determinatio percurrendi dato tempore determinatum ſpatium. Hanc velocitatem retinet corpus in motu uniformi vi inertiæ; immo ea nihil eſt aliud, niſi ipſa vis inertiæ determinata a præcedentibus diſpoſitionibus, nimirum vel a primo ſtatu, in quo eam materiam conditor poſuit, dum conderet, vel ab actionibus potentiarum, quæ in illam egerunt prius.

XIII. Potentiarum nomine intelligimus, eas cauſas, quæ per actiones ſuas ſtatum corporis mutant, quæ cum illud determinant ad habendam aliam celeritatem in actu ſecundo, dicuntur producere in ipſo novam celeritatem in actu primo. Actio momentanea, qua hæc velocitas generari concipitur, dicitur vis activa, quæ nobis quidem eſt unica vis, a Leibnitio autem vis mortua dicta eſt. Eiuſmodi potentiæ ſunt impenetrabilitas in colliſione corporum, ſi per contactum fiat: gravitas in acceſſu ad centrum, vel ad aliud corpus: ea cauſa, quæ, ſi partes quorumdam corporum ad ſe plus æquo accedant, eas repellit, ſi recedant plus æquo, ad ſe invicem adducit, & dicitur vis elaſtica; cauſa pariter adhæſionis particularum corporum, qua unius motum altera ſequitur: cauſa obſiſtens compreſſioni quorumdam aliorum corporum, quæ figuram amiſſam non recuperant, & mollia dicuntur; & aliæ eiuſmodi, ſi quæ ſunt.

XIV. Eæ pariter potentiæ poſſunt reponi vel in libera Dei lege, vel in alia conditionata exigentia quadam eſſentiæ ipſius corporis, vel etiam a peripateticis, ſi velint, in qualitate quadam, ſalvis prorſus phænomenis. In quocumque enim phyſice ſitæ ſint eiuſmodi potentiæ, modo eamdem velocitatem in actu primo generent in corpore, ſive ipſum ad eamdem celeritatem in actu ſecundo determinent, eadem ſemper motuum phænomena habebuntur. Quamquam autem hic & actionis, & generationis nomine utimur; tamen nulla vera, & phyſica actione, aut productione eſt opus, in ea generatione velocitatis in actu primo; ut ipſa celeritas

iuxta ideam, quam de ea tradidimus, non eſt aliquid, quod phyſice producatur, & de novo adveniat. Habetur abunde per præſentem combinationem illius vel legis, vel exigentiæ conditionatæ, in qua vis inertiæ ſita eſt, & illius alterius, in qua ſita eſt potentia ipſa, ac per circumſtantiam loci, vel aliam eiuſmodi, quæ conditionem in potentia ipſa imbibitam determinet. Sic gravitas per newtonianos eſt quædam vel determinatio ipſorum corporum naturæ, vel potius libera Dei lex, qua ſi bina corpora poſita ſint in quacumque diſtantia etiam in vacuo, ſtatim acquirant determinationem accedendi ad ſe invicem, & acquirendi novam celeritatem in actu ſecundo eo maiorem, quo minus eſt quadratum diſtantiæ. Intelligantur ea corpora exiſtere: intelligatur vis inertiæ, qua priorem celeritatem retineant, ſi nulla potentia agat: intelligatur tanta determinata diſtantia; intelligitur genita nova celeritas in actu primo, determinatis conditionibus omnibus: & intelligetur nova celeritas perpetuo advenire, ſi intelligantur perpetuo determinari conditiones eædem. Nulla in hac idea involvitur vera productio cuiuſdam, quod ſit velocitas in actu primo, nulla actio phyſica; quod quidem hic ſemel ita præmittimus, ut intelligatur ſemper, quo ſenſu actionem velocitatis generativam accipiamus, eamque uſurpare nobis liceat impoſterum, quin ullius vivæ vis productio ad velocitatis generationem requiratur.

XV. Potentias plerumque concipimus tamquam perpetuo agentes, ut gravitatem, & elaſticitatem. Eæ ſingulis momentis temporis ſolam producunt preſſionem, quæ in velocitatem non tranſit ulla multiplicatione, ſed ſolo ductu per tempus continuum; prorſus ut linea nulla ſui multiplicatione evadit ſuperficies, ſed continuo ductu per aliam lineam. Verum impenetrabilitas, ut in congreſſu eorum corporum, quæ figuram nulla vi mutant, & dicuntur dura (quæ corpora an exiſtant in natura hic non quærimus, ea autem inferius excludemus) ipſo momento temporis, quo contactus fit, velocitatem generat; & tamquam per ſaltum mutat; atque iccirco vis, quæ in percuſſione exeritur, dicitur eſſe altioris ordinis, nec pura preſſio utcumque multiplicata ipſam adæquat, ſed ſolum, ut diximus, ducta per tempus continuum.

XVI. Preſſio tamen ita cum velocitate connectitur, ut linea recta cum plano. Ut enim recta linea per aliam datam rectam ducta in eodem angulo planum deſcribit ſibi proportionale, ſic preſſio per datum tempus continuata abit in velocitatem ſibi proportionalem. Ut variata etiam linea, in quam altera ducitur, eſt planum genitum in ratione compoſita lineæ, quæ ducitur, & per quam ducitur; ita etiam variato tempore, quo eadem preſſio durat, velocitas genita eſt in ratione compoſita preſſionis, & temporis, per quod ea continuatur. Ut ſi in *Fig.* 3 recta EF perpetuo maneat eiuſdem longitudinis, dum per rectam AC ducitur ad angulos rectos, deſcribit rectangulum, in quo ſingulis particulis E*e* reſpondeant ſpatiola FE*ef* æqualia; at ſi ipſa perpetuo vel creſcat, vel minuatur, & fortaſſe etiam evaneſcat, ac ad partes oppoſitas abeat; aliam figuram planam deſcribit, vel ad eaſdem partes iacentem, vel partim ad eaſdem, partim ad contrarias; ſic & preſſio, ſi ſemper eiuſdem magnitudinis perſeveret, motum generat uniformiter acceleratum, in quo ſingulis tempuſculis æqualibus accedunt æqualia velocitatis incrementa; at ſi perpetuo varietur, producit motum difformiter acceleratum, in quo incrementa ipſa celeritatis tempuſculis æqualibus facta, vel maiora ſint, vel minora perpetuo, aut etiam preſſione directionem mutante, abeant in decrementa. Ut demum ſi ſpatiolum E*e* concipiatur indefinite parvum, ob differentiam rectarum *ef*, EF indefinite parvam concipitur areola FE*ef* tamquam rectangulum; ita ob binarum preſſionum differentiam tempuſculo indefinite parvo indefinite parvam, motus etiam difformiter acceleratus tempuſculo illo ipſo concipitur tamquam uniformiter acceleratus. Quamobrem ſi ſegmenta AE rectæ AC exprimant tempora: recta autem EF exprimat preſſiones ipſas; optime per planum BAEF exprimetur ipſa celeritas, in quam abit preſſio EF continuata per tempus AE. Quamquam ut omne aliud quantitatum genus, velocitates quoque per lineas exprimi poterunt, aſſumpta ad arbitrium una aliqua linea, quæ unam aliquam velocitatem exponat.

XVII. Ut autem hæc theoria generalior ſit, in ipſo æquilibrio, in quo oppoſitis preſſionibus binæ potentiæ inter ſe pugnant, & nullus conſequitur motus, nulla celeri-

tas in actu ſecundo; concipimus tempore quovis continuo velocitates in actu primo produci, ſed contrarias, & æquales, quarum proinde ſumma perpetuo maneat = o; actione autem potentiæ exercita momento temporis, quod temporis continui non eſt pars, ſed terminus, eodem prorſus pacto, quo punctum in geometria non eſt lineæ pars, ſed terminus, generari concipimus preſſionem illam tantum, quæ ad celeritatem eſt, ut linea ad ſuperficiem.

XVIII. Celeritas nova, quæ generatur, ſi generatur in eadem directione cum priore, additur ipſi, & exurgit utriuſque ſumma, ut in analyſi accidit quantitatibus eodem ſigno affectis: ſi generetur in directione contraria, ipſi negative additur, nimirum ſubtrahitur, & exurgit utriuſque differentia, ut quantitas negativa addita poſitivæ eam minuit, non auget; quo caſu ſi velocitas contraria eſt æqualis priori; remanet velocitas = o, ſive determinatio ad quietem, ut diximus in preſſionibus contrariis; ſi maior, remanet velocitas negativa, ſive cum directione oppoſita priori. Si demum nova celeritas generetur in directione aliqua obliqua; ei oblique applicatur iuxta legem notiſſimam compoſitionis, & reſolutionis motuum. Exponat (*Fig.* 4. 5.) priorem velocitatem AB, poſteriorem AC; completo parallelogrammo ACDB, diameter AD exponet & magnitudinem, & directionem velocitatis, quæ ex utriuſque compoſitione exurgit. Idem & in preſſionibus, & in velocitatibus contingere ab experimentis manifeſte diſcimus; & cum ex binis velocitatibus, vel preſſionibus AB, AC, tertia AD exurgit; ea dicitur compoſitio motuum: cum una AD concipitur tamquam orta a binis AB, AC definitis per latera parallelogrammi cuiuſcumque, cuius AD ſit diameter; ea dicitur reſolutio. Nec illud hic quærimus, an ex aliis anterioribus naturæ legibus neceſſario fluat, & demonſtrari poſſit; an ſit potius primaria quædam lex, cui aliam quampiam naturæ auctor pro arbitrio ſuo ſubſtituere potuerit, & illud ſancire, ut ex motuum compoſitione alia quæpiam directio, alia menſura novæ preſſionis, ac celeritatis exurgeret.

XIX. In compoſitione velocitas, quæ exurgit ſemper eſt minor componentibus ſimul ſumptis, quia latera AB, BD, ideoque & AB, AC ſimul maiora ſunt latere AD. In reſolutione augetur ob oppoſitam rationem, ſeu, ut verius dica-

dicamus, augeri concipitur; facile enim ex theoria, quam tradituri ſumus, deducitur, reſolutionem numquam habere locum, ſed ſolum mente concipi; revera autem ſolam haberi compoſitionem. At ſi velocitates componentes intelligantur reſolvi in duas, alteram ſecundum directionem novæ exurgentis, alteram ſecundum directionem ipſi perpendicularem; perpendiculares ipſæ ſemper ſibi æquales ſe elident mutuo, reliquarum ſumma, vel differentia ſemper eadem erit in ea, quæ exurgit, ac in componentibus. Nam ductis CF, BE perpendicularibus ad AD, & completis rectangulis Ff, Ee, ac reſoluta AC in Af, AF, & AB in Ae, AE, ſatis patet ex æqualitate triangulorum AFC, BDE, quæ facile demonſtratur, æquales fore AF, DE, & CF, BE; ac proinde etiam Af, Ae; adeoque ipſas Af, Ae oppoſitas ſe mutuo elidere, reliquarum ſummam in *Fig.* 4, differentiam in *Fig.* 5 eſſe AD.

XX. Hiſce omnibus præmiſſis; en demum, in quo cum leibnitianis, & antileibnitianis convenimus, & in quo diſcrepamus. Actionem illam potentiarum, qua generatur preſſio, vel celeritas, & quam appellavimus vim ipſarum, metimur per aggregatum celeritatum illarum, quæ generantur in ſingulis particulis, nimirum per maſſam in ſimplicem celeritatem ductam; in quo & Leibnitius convenit, qui vires mortuas ita æſtimat. Ea æſtimatio eſt ſatis conformis rationi. Cum enim concipimus ea actione generari vel celeritatem, vel preſſionem, quæ per tempus datum continuata, velocitatem producit ſibi proportionalem; ea actio, quam nos ad eum unicum finem concipimus, ab ipſo effectu æſtimanda erit. Eam autem actionem, nos nihil aliud producere concipimus, & affirmamus, præter hanc preſſionem, & velocitatem. Leibnitiani, & Antileibnitiani admittunt præterea vim vivam, ab his potentiarum actionibus in corpore relictam, & permanentem; quocumque demum modo eam explicent phyſice; ſive eam velint conſiſtere in peripatetica quadam qualitate, quæ ſit impetus, quod nolunt; ſive in alio quocumque. Nos hanc vis vivæ ſive qualitatem, ſive tantum ideam reiicimus, ut prorſus ſuperfluam, & affirmamus phænomena omnia abunde explicari per ideas tantum a nobis hactenus traditas, quibus concipiamus, a potentiis per actiones ſuas immediate produci ſolam veloci-

tatem,

tatem, & cum priori per vim inertiæ conſervata componi vel directe, vel oblique: illi inter ſe pugnant, quæ debeat eſſe menſura vis eius vivæ, quam vel concipiunt, vel admittunt. Quamobrem ſi illud oſtendimus, phænomena omnia motuum optime explicari ſine hac nova vel re, vel idea; evicimus ſane, vires vivas nullas eſſe, & obiecto quæſtionis ſummoto, quæſtionem ipſam ſummovemus.

XXI. Verum ut a motu uniformi ducamus exordium; evidentiſſime patet ad conſervationem velocitatis, quæ per præcedentes potentiarum actiones eſt acquiſita, ſatis eſſe ſolam vim inertiæ, nec ullam vim vivam requiri. Ea conſervatio in ipſa idea vis inertiæ manifeſte includitur. Quare ſi, ubi potentiæ agunt ad velocitatem generandam, nulla pariter vis viva neceſſaria ſit; omnia omnino phænomena ſine viribus vivis explicabuntur.

XXII. Iam vero ſi velocitas producatur per vires earum potentiarum, quæ concipiuntur agere ſine ullo etiam contactu, & impulſu alterius corporis, quemadmodum & a Newtonianis, & a Peripateticis concipitur agere gravitas etiam in corpus in vacuo collocatum; pariter manifeſto apparet, nullum opus eſſe viribus vivis. Ex eo, quod vires gravitatis ſingulis momentis temporis E in *Fig.* 3 producant preſſiones EF ſibi proportionales, & tempuſculis E*e* velocitates FE*ef*; producent totis temporibus AE, AC velocitates BAEF, BACD iuxta num. 16. Si autem eiuſmodi velocitates, exprimantur per ordinatas EH ad lineam quamdam AHG, ſpatiola tempuſculo E*e* producta a velocitate EH erunt, ut areolæ EH*he*, & tota ſpatia reſpondentia temporibus AE, AC, ut areæ AEH, ACG. Licet autem & celeritates ſingulis tempuſculis productæ ſint, ut vires, & ſpatia percurſa, ut celeritates; in aggregatis varia deprehendetur ſummarum ipſarum relatio, pro varia mutatione virium EF. Si vires ſint conſtantes; evadit BFD recta linea parallela AC, velocitas BAEF, ut vires, & tempora coniunctim: quare manentibus viribus, ſit EH, ut AE, ſit AHG recta deſinens in G, evadunt ſpatia AEH, ut quadrata laterum EH, vel AE, nimirum ut quadrata velocitatum, vel temporum, vel etiam ut productum ex AE, & EH, nimirum ex tempore, & velocitate. Patet igitur cur in hac hypotheſi gravitatis corpus ex quadrupla altitudine deſcendens

duplam

duplam celeritatem acquirat, & duplum tempus impendat. Eadem prorſus de cauſa ſi ſurſum impellatur cum dupla celeritate; aſcendet ad altitudinem quadruplam ſine ulla neceſſitate quadruplæ vis vivæ, quæ ſurſum trudat ipſum corpus. Aſcendit enim donec dupla velocitas contraria impreſſæ generetur, quæ impreſſam elidat, & mutet directionem motus in contrariam. Quod aſcenſus ille habet de poſitivo motu ſurſum, pendet a ſola vi inertiæ conſervante priorem celeritatem: quod habet de negatione ulterioris motus, provenit a gravitate, quæ poſt quadruplam demum altitudinem duplam genuit velocitatem.

XXIII. Quod ſi iam AE exprimat non tempora, ſed ſpatia, & EF vires, quæ ſingulis æqualibus tempuſculis generent velocitates ſibi proportionales; iam areola FE*ef* non exprimet velocitatem genitam ſpatiolo E*e*, quia quo celerius id ſpatiolum percurritur, eo minorem velocitatem generabit vis eadem. Erit autem celeritas producta in ratione compoſita ex directa vis FE & tempuſculi, quod tempuſculum cum ſit ut ſpatiolum E*e* directe, & velocitas tota inverſe; erit velocitatis incrementum directe ut FE, & E*e*, & reciproce ut tota velocitas, ac proinde productum ex velocitate in ſuum incrementum, erit ut areola FE*ef*. Inde autem ex infiniteſimorum lege colligitur, fore quadratum celeritatis corporis ex A deſcendentis ex quiete, ut eſt areola BAEF: & cum de decremento in velocitatem contrariam ducto idem diſcurſus ſit; ſi motus incipiat in A verſus C cum velocitate, quam exprimat BACD, & vires contraria directione agant; erunt reſiduarum velocitatum quadrata ut CEFD, & motus in C extinguetur totus. Si autem ſit EI ordinata ad lineam quamdam continuam NI*m* reciproca velocitatis EH; quæ nimirum ſit ad datam quamdam rectam L, ut hæc ad EH; erit areola EI*ie* directe ut ſpatiolum E*e*, & reciproce ut velocitas EH, nimirum ut tempuſculum; ac proinde totum tempus, quo percurritur AE, erit, ut tota area MAEI*m*. Ex eiuſmodi autem linearum natura, omnia quæ ad hoſce motus acceleratos, aut retardatos pertinent in elementis mechanicæ facile deducuntur: ut *e*: *g*: ſi vires EF fuerint ut diſtantiæ EC a fine motus C; linea BD ſit recta deſinens in C, linea AHG vertitur in quadrantem vel ellipſeos, vel circuli, area

MAEI*m*

MAEIm datur per quadraturam circuli, velocitates in fine ſpatiorum acquiſitæ ſunt ut ipſa ſpatia, & tempora ſunt æqualia. Hinc in hac lege gravitatis, quæ decreſcat in ratione diſtantiarum a centro, velocitas, quæ acquiritur in caſu per duplam diſtantiam, eſt dupla; ideoque e contrario ſi corpus exeat e centro cum dupla velocitate; elevatur ad duplam altitudinem. Atque ut elevatio ad altitudinem quadruplam in hypotheſi gravitatis conſtantis non evincit vim vivam quadruplam; ſic in hoc caſu elevatio ad altitudinem duplam non evincit vim vivam duplam. Pendet utrumque phænomenum a ſolis ſummis velocitatum, quas ſingulis tempuſculis æqualibus producunt vires ipſis proportionales, & a ſolis ſummis ſpatiorum, quæ ſingulis tempuſculis æqualibus percurruntur cum velocitatibus ſibi proportionalibus.

XXIV. Quod autem attinet ad corporum colliſionem præmittimus prius principium ſatis celebre *actioni ſemper æqualem, & contrariam eſſe reactionem*, quo tam feliciter uſus eſt Wrennus, Valliſius, Hugenius ad elaſticorum corporum congreſſus definiendos, & Newtonus ad ſuam mutuam gravitatem, per quam cœleſtium corporum motus implicatiſſimos explicavit. Nos id principium ita intelligimus, ut quotieſcumque vis alicuius potentiæ agat ſecundum unam directionem in unum corpus, ita æque agat in aliud ſecundum oppoſitam; ut æquales ſummas velocitatum producat utrimque in particulis, a quibus æquales motuum quantitates pendeant; ac proinde velocitates ſingularum particularum generet maſſis reciprocas. Nullum ſane phænomenum huic adverſatur principio, plurima illi favent, immo quantum experiundo licet animadvertere, favent omnia. Sic in magnete, & ferro, vis magnetica velocitates producit maſſis reciprocas: ſic in navicula, & navi maiore funis diſtentus: ſic ſi ceram digito premas, & digitus premitur ſimul, & illa materia. Quare hoc principium ex analogia naturæ ſatis aperte deducitur. At nos ex eo, & durorum, & elaſticorum, & mollium corporum congreſſus eadem generali methodo facillime deducemus.

XXV. Sint iam in *Fig. 6* bini globi duri AB, & CD, quorum maſſæ M, & m, velocitates, cum quibus ſibi invicem occurrunt V, & u; quæ quidem dicantur poſitivæ ſecun-

cundum directionem BC, negativæ ſecundum oppoſitam. Momento temporis, quo puncta B, & C ſe contingunt, debent immutari velocitates vi impenetrabilitatis ita, ut ad quietem reſpectivam reducantur, ſive ad æqualem velocitatem, cui nimirum impenetrabilitas non opponitur. Conſiderabimus igitur impenetrabilitatem, tamquam potentiam quamdam, quæ ita in utroque globo producat velocitates oppoſitas, ut eæ ex una parte relinquant velocitatem utrobique eamdem, ex altera ſint ob actionem utrinque æqualem reciprocæ maſſis. Dicatur communis velocitas x; erit velocitas a priore amiſſa $V - x$ ad velocitatem acquiſitam a poſteriore $x - u$, ut m ad M; ac proinde $VM - Mx = mx - mu$, ſive $VM + mu = Mx + mx$, ſive $\frac{VM + mu}{M + m} = x$; formula communis pro colliſione corporum durorum, in qua velocitas communis poſt colliſionem habetur, ſi ſingulæ maſſæ per ſuas velocitates multiplicentur, & productum dividatur per maſſarum ſummam. Si autem quæratur $V - x$ velocitas in priore globo producta ad partes oppoſitas; invenitur ipſa $\frac{VM + Vm - VM - um}{M + m} = \frac{Vm - um}{M + m}$; nimirum ut $M + m$ ſumma maſſarum eſt ad m maſſarum alteram; ita $V - u$ differentia velocitatum ad eaſdem partes, vel ſumma ad oppoſitas, quæ eſt velocitas reſpectiva, ad velocitatem illam, quæ in altero globo producitur ſecundum directionem oppoſitam rectæ iungenti centra.

XXVI. Nulla hic pariter neceſſitas virium vivarum. Si bini globi celeritatibus, quæ ſint reciproce proportionales maſſis, ſibi invicem occurrant; ſiſtitur ex eadem formula momento temporis utriuſque motus. Inde colligunt antileibnitiani, vires vivas eorum fuiſſe ante concurſum, ut maſſas, & celeritates; ac proinde in conflictu ob earum æqualitatem ſiſti motum. Si impenetrabilitatem reſpicimus ut potentiam quamdam, quæ ſecundum communes leges agat, licet per ſaltum, ex natura ſcilicet duritiei, nulla virium vivarum neceſſitas eſt in eo caſu.

XXVII. Concipiamus iam eoſdem globos, ubi venerint ad diſtantiam BC, repelli vi quadam, quæ ulteriori acceſ-

ſui reſiſtat, & imminutis diſtantiis augeatur. Mutabitur, non quidem momento temporis, ſed ſucceſſive velocitas utriuſque ita, ut ex principio actionis, & reactionis æqualis poſt quodcumque tempus continuum producantur velocitates maſſis reciprocæ ad partes contrarias. Interea vero minuetur perpetuo diſtantia, donec, ſi vis illa repulſiva fuerit ſatis magna, diſtantia maneat quidem aliqua, ſed ſit minima: quo caſu reducentur ad eamdem velocitatem, quod nimirum requiritur, ut diſtantia ulterius non minuatur. Tum vero, vel incipiet iterum creſcere diſtantia, ſi nimirum perſeveret repulſiva illa vis: vel perſeverabit, ſi ibi ea omnis ceſſet. Primus caſus exhibet nobis binos globos impingentes in elaſtrum BHC, quod dum clauditur angulus H, globi ipſi repelluntur, donec ad priorem poſitionem ventum ſit, poſt quam elaſtrum retrahi incipit plus æquo apertum a celeritate iam acquiſita, & globi cum acquiſita celeritate pergunt recedere a ſe invicem: ac poteſt idem primus caſus referre etiam binorum elaſticorum globorum concurſum, quorum partes, dum poſt contactum in B, & C introrſum cedunt, velocitatis inæqualitate in iis punctis inhibita per vim impenetrabilitatis; elaſticitas, quæ earum acceſſui ad reliquas reſiſtit, agit utrinque æqualiter. Secundus caſus exhibet corporum mollium naturam, qui haberetur, ſi elaſtrum in illa minima diſtantia diſrumperetur in H; quæ proinde concipi poſſunt tamquam compoſita fibrillis elaſticis illis quidem, ſed breviuſculis, & quæ citiſſime vel diſrumpantur, vel diſſolvant quoſdam veluti nodos, quibus continebantur. Sic enim partes, dum introcedunt, reſiſterent, ſed figuram nequaquam recuperarent.

XXVIII. Quoniam autem in illa minima diſtantia habemus globorum velocitates redactas ad æqualitatem, & velocitates utrinque productas maſſis reciprocas; habemus elementa eadem, ex quibus in congreſſu corporum durorum eruta eſt velocitas, quæ ab altero globo acquiritur ſecundum directionem oppoſitam rectæ iungenti centra. Eadem igitur erit formula pro corporum mollium congreſſu; & pro elaſticorum corporum colliſione duplicanda erit eadem acquiſita velocitas; eritque ut ſumma maſſarum, in iis quidem ad maſſam ſimplicem alterius, in his vero ad

duplam;

duplam; ita velocitas reſpectiva ad velocitatem ab altero acquiſitam.

XXIX. Si fuerint quotcumque globi intermedii in EFG; (*Fig.*7) ſub initium quidem punctum B cum tota velocitate globi AB celerrime accedet ad E; interea E incipiet acquirere velocitates verſus F, & B cum globo AB ad partes oppoſitas, ac proinde incipiet globus AB retardari. Ad acceſſum puncti E, vis, quæ repellit E, & F, ſtatim utrumque punctum ad partes oppoſitas urgebit, ſed minus, quam vis, quæ repellebat B, & E, ob minorem ſub initium velocitatem puncti E, quam B, adeoque minorem acceſſum. Quantumvis exiguo tempore poſt primum occurſum in B ſublato æquilibrio propagabitur mutatio ſtatus per omnia puncta EFGC, ſed multo maior erit velocitas acquiſita ſecundum directionem BC in proximis globis, quam in remotioribus. Progreſſu temporis deveniri debet ad diſtantias omnium minimas, poſt quas globi incipiant a ſe invicem recedere. Id non continget, niſi ubi velocitas reſpectiva evaſerit nulla; & proinde omnium globorum velocitates æquales. In eo caſu ob actionem & reactionem æquales ſumma celeritatum, quas ob vim repulſivam exercitam per BE acquiſiverunt particulæ globi AB, erit æqualis celeritati acquiſitæ ad partes oppoſitas a particulis globi E; ac ad partes pariter oppoſitas velocitatem acquirent æqualem globi E, & F, & ita porro uſque ad globum CD. Summæ velocitatum particularum omnium productæ a vi repulſiva in intervallis BE, EF, FG, GC, ſint x, y, z, u: erit ſumma omnium velocitatum, quas acquirent particulæ globi AB ſecundum directionem CB uſque ad illam minimam diſtantiam, $= x$; ſumma autem omnium, quæ remanent ſecundum directionem oppoſitam ex iis, quæ productæ ſunt in particulis reliquorum globorum, erit $= x - y, + y - z, + z - u, + u$ ſive erit $= x$. Nimirum prior ſumma poſteriori æqualis. Quamobrem ſi in plures globos quotcumque delatos eadem velocitate cum globo CD incurrat globus AB; eodem prorſus modo res cedet, ac ſi ii globi omnes in unicam maſſam coaleſcerent, & ſola vis per BE ageret; ac proinde recurrent, quæ dicta ſunt num. 28. Idem autem eſſet diſcurſus, ſi globi quotcumque pergerent etiam cum globo A, & alii quotcumque cum globo D cum iiſ-

 dem

dem velocitatibus eorumdem globorum. Semper in minima diſtantia reducerentur omnes ad velocitatem æqualem, & reducerentur productis utrinque æqualibus velocitatum oppoſitarum ſummis ita, ut velocitas ſingularum particularum primi aggregati acquiſita per vires repulſivas ad velocitatem particularum ſingularum ſecundi aggregati eſſet in ratione reciproca maſſæ ſecundi ad maſſam primi. Et idem pariter diſcurſus eſſet, ſi vires aliquæ non ſolum agerent in globos proximos, ſed & immediate removerent E a G, vel a CD.

XXX. Poteſt hic caſus accommodari globis vel elaſticis, vel mollibus, dum concurrunt: in quorum primas partes, quæ ſe contingunt, agat vis impenetrabilitatis, in reliquas vero, & in eas ipſas, dum introcedunt, & ad ſe accedunt magis, quam pro data diſtantia, vires repulſivæ. Poteſt pariter accommodari corporibus duris, concipiendo ea diviſa in plures particulas, quarum alias ab aliis removeat vis impenetrabilitatis, qui caſus a caſu elaſticorum ſolum differet in eo, quod in corporibus duris impenetrabilitas aget momento temporis, & in reliquis elaſticitas ſucceſſive, nec dura poſt æqualem celeritatem reſilient. Poteſt demum accommodari globis impingentibus in elaſtra pluribus angulis conſtantia, quem caſum figura exprimit, conſiderando ſolum effectum elaſticitatis, & abſtrahendo ab illa translatione virgarum elaſtri, quæ pendet ab aliqua rigiditate, & parum effectum turbat. Ubi datis ſingulorum intervallorum viribus abſolutis determinari poſſet, globis AB, CD ad ſe invicem accedentibus, quod punctum debeat quieſcere, qui debeat eſſe ſingulorum punctorum motus, quando ſingula puncta, quorum propiora potiſſimum initio plurimum accelerantur, tum retardantur, ad maximam celeritatem deveniant, & alia eiuſmodi. Nobis ſatis eſt oſtendiſſe, quomodo per ſolam generationem velocitatis ortam a potentiis agentibus utrinque æqualiter pendeant hi omnes effectus, ſine ulla neceſſitate virium vivarum.

XXXI. Et quidem illud etiam ſimul patet, quonam pacto in elaſticis, & in mollibus corporibus fiat illa introceſſio partium, & fovearum excavatio. Cum primum ſe molles globi contingunt, mutatur initio magis celeritas particularum contactui proximarum; donec paulatim partes omnes

omnes ad æqualem celeritatem reducantur. Ob illam velocitatis inæqualitatem accedunt partes aliæ ad alias magis, quam prius; ea eſt mutatio figuræ, introceſſio partium, excavatio foveæ. Si materia ſit elaſtica; figura recuperatur, immo etiam ultra priores limites iam conceptos excurritur, & oſcillationes quædam fiunt, ex quibus in fluidis elaſticis undæ quædam exurgunt: ſi materia ſit mollis; ubi ad illam celeritatem communem ventum eſt, manet diſtantia particularum eadem, & manet fovea. Sic in *Fig.* 2 dum globus A impingit in primas materiæ mollis particulas in B, ſtatim ex vi impenetrabilitatis, & repellentium potentiarum acquirunt velocitates, per quas æquilibrio ſummoto, velocitas aliqua generatur in omnibus, ita tamen; ut in propioribus ſub initium multo maior generetur, quam in remotioribus, donec demum, & globus, & particulæ, & tota maſſa MN, cum toto ſuſtentaculo ad eamdem velocitatem reducantur, quæ minima erit, & fere nulla ob immenſam totius telluris maſſam, cui fulcrum innititur.

XXXI. Hiſce autem omnibus præmiſſis ſponte propemodum fluit explicatio phænomenorum, quæ a Leibnitianis adducuntur ad probandum, vires vivas adeſſe, quæ ſint, ut maſſæ in quadrata celeritatis ductæ. Concipiatur globus CD maximus, (*Fig.* 6) verſus quem globus AB delatus cum una velocitate elaſtrum claudat ad datum intervallum. Si globus idem cum dupla velocitate impingat in quatuor eiuſmodi elaſtra, illa eodem intervallo claudet, & ab aliis quatuor duplam pariter in regreſſu non quadruplam velocitatem acquiret. Quia ſi recta AC in *Fig.* 3 ſit eadem, ac BC in *Fig.* 6; vires EF in ſingulis ſpatiis E erunt, ut numerus elaſtrorum, ſive quadruplæ in ſecundo caſu; quare & areolæ FE*ef*, & totæ areæ ACDB, quæ per num. 23 exprimunt quadrata velocitatum tam acquiſitarum, quam amiſſarum ſpatio eodem AC, erunt in ſecundo caſu quadruplæ, ac proinde velocitates duplæ; quamobrem rectæ EI ſemper ſubduplæ, & ſubdupla aggregata omnium tempuſculorum E*ei*I. Ex eo nimirum, quod ſingulis tempuſculis velocitates generantur viribus proportionales; cum per idem ſpatiolum E*e* corpus cum maiore velocitate delatum, minus diuturnam ſentiat quatuor elaſtrorum actionem velocitatis generativam, quam corpus delatum cum unica

vim

vim ſui elaſtri; minus quam quadrupla velocitas generatur, vel deſtruitur per id ſpatiolum, & aggregatum ſimul omnium eſt ex expoſita demonſtratione non quadruplum, ſed duplum. Nulla igitur virium vivarum neceſſitas: quas tamen ſi quis velit admittere, licet inutiles, & ponat ſingulis tempuſculis æqualibus generari proportionales viribus eodem paſſu, quo celeritates; hic profecto æque bene, ac nos, hæc phænomena explicabit, quod & de ſequentibus intelligi debet. Et eo reducitur luculentiſſima Mairanii explicatio, requirentis, ut amiſſarum virium ſumma colligatur.

XXXII. Eodem modo explicatur, Polenianum experimentum, quo demiſſis globis A (*Fig.* 2) eiuſdem molis, diverſarum maſſarum ab altitudinibus, quæ maſſis ipſis ſint reciproce proportionales, excavantur in argilla foveæ æquales DCE. Deveniet globus ſubquadruplus cum dupla tantum velocitate: & ſi globum quadruplum in quatuor æquales partes mente dividimus; ſingulis viribus in haſce partes æquales diſtributis, agent in globum minorem in ſingulis punctis ſpatii vires quadruplæ earum, quæ agent in partes ſingulas globi maioris; ac icciroo prorſus, ut numero ſuperiore, duplam tantum iiſdem illis ſpatiis percurſis uſque ad quietem deſtruent velocitatem, tempore ſubduplo duplam tantum contrariam producendo.

XXXIII. At in eo experimento, de quo num. 6, & 7 diximus, cum globus idem ex diverſis altitudinibus demiſſus ſemper foveas excavarit altitudinibus, adeoque, quadratis velocitatum proportionales; cauſa pariter ex eodem fonte petenda eſt. Superficies DCE ſegmenti ſphærici eſt, ut ſinus verſus CB, quod ex Archimede conſtat. Quare dum globus immergitur, incurrit in ſingulis punctis ſpatii BC in numerum particularum proportionalem diſtantiæ BC. Hinc ſit, ut vires, quæ in eo producunt velocitates contrarias, ſint ut diſtantiæ ab initio B motus retardati. Quare, ut in num. 23 notavimus, in hac virium hypotheſi velocitas dupla extinguetur duplo emenſo ſpatio BC, & eodem tempore. Quadrupla eſt materiæ quantitas, ea fovea contenta, quæ comprimitur; ſed non icciroo quadrupla velocitas contraria generatur. Globus duplo velocior ſingulis tempuſculis æqualibus ſucceſſive incurrit ille quidem in quadruplum numerum

merum particularum, ſed ea potiſſimum de cauſa ſingularum virium actiones excipit dimidio tantum tempore, ac proinde dimidias, & omnium ſimul duplas. Nuſquam autem virium vivarum veſtigium ullum, & multo minus neceſſitas.

XXXIV. Demum, & in globorum elaſticorum colliſione, quo pacto ſe res habeat, facile eſt expedire. Impingat globus in globum triplum, cum binis gradibus velocitatis, inquit Hermannus; unum illi communicabit, cum uno ipſe reſiliet, cum quo ſi incurrat in alium ſibi æqualem, quieſcet, illo abeunte cum eodem gradu. Quare quadruplam habebat vim vivam, quam in quadruplam maſſam diviſit. Phænomenum quidem ita ſe habere debet, ut evincitur etiam ex noſtris formulis, quas expoſuimus num. 25, & 28. Sed cauſa in promptu eſt. Elaſticitas in globo triplo unum gradum velocitatis produxit, in globo impingente tres oppoſitos, quorum duo priorem velocitatem elidunt; tertius relinquitur, qui pariter in ſecunda colliſione amittitur æquali velocitate per elaſticam vim in utroque globo producta. Nulla igitur hic quoque neceſſitas vis vivæ e globo in globos translatæ. Sic ſi globus A (*Fig.* 8) delatus ad C ita oblique impingat in globum B, ut facta $AC = 2$, & ducto perpendiculo in rectam iungentem centra BC, ſit $CD = 1$, perget globus per CF parallelam AD cum velocitate $AD = \sqrt{3}$, & globus B abibit cum velocitate $= 1$. Si autem rurſus cum data lege impingat in globum G, tum in I; iidem globi abibunt cum velocitate $= 1$, & globo A relinquetur primum velocitas $= \sqrt{2}$, tum $= 1$. Sed inde colligi non poterit habuiſſe vires vivas 4, quas diviſerit in 3 globos, una ſibi reſervata. Vis elaſtica in globo B generavit illam eius velocitatem $= 1$, & in globo C contrariam CD, quæ compoſita cum $Cd = CA$ oblique, ipſam potius minuit, & reduxit ad $\sqrt{3}$. Et idem in reliquis colliſionibus contigit, vi elaſtica ſemper binas æquales contrarias velocitates producente.

XXXV. Ceterum quod in experimentis potiſſimum, in quibus globus in argillam decidit, excavatio fovearum a nulla vi viva pendeat, ſed a potentiarum actionibus explicatis; ſic manifeſte colligitur. Si maſſa MN (*Fig.* 2) impingat in globum A; eadem prorſus fovea excavatur, ac ſi

globus

globus cum eadem velocitate impingat in maſſam. Excavatio autem eiuſmodi nec tribui poteſt vi vivæ globi A, qui nimirum quieſcebat, neque viribus vivis particularum materiæ mollis MN, quæ vires vivæ tendunt ad conſervandum omnium motum, non ad minuendum. In eo caſu provenit ex eo, quod impenetrabilitas, & aliæ potentiæ, dum agunt in globum A, ad generandam velocitatem in eo, agunt & in partes materiæ mollis generando celeritates oppoſitas, maiores quidem initio in proximis, in remotioribus minores; donec paulatim omnes evadant æquales; & acceſſus particularum ad ſe invicem, pendens ab illa inæquali velocitate initio motus, tandem ſiſtatur, & maneat fovea.

XXXVI. Hoc pacto per omnia phænomenorum genera excurrendo, oſtendimus, nuſquam viribus vivis opus eſſe: ſed ex ſimpliciſſimis principiis omnia omnium generum phænomena motuum explicari poſſe per immediatam celeritatis productionem factam actionibus potentiarum nihil poſt ſe relinquentibus in ipſis corporibus, præter diverſam determinationem vis inertiæ, cum ipſa vi inertiæ perſeverantem. Iam vero ſi quis, non obſtante inutilitate vis vivæ, illam adhuc velit admittere; poterit, ut libuerit, ſalvis prorſus phænomenis. Si enim ſtatuat, potentias illas quotieſcumque in ſingulis particulis ſingulis temporibus producunt celeritatis gradus ſibi proportionales, producere etiam vires proportionales; erunt vires ipſæ, ut maſſæ in ſimplices celeritates ductæ. Si autem velit, ſingulis æqualibus ſpatiis confectis, produci ſingulos vis vivæ gradus viribus producentibus proportionales; tum vero erunt virium aggregata, ut maſſæ in quadrata velocitatum ductæ. Nam ſingulis ſpatiolis E*e* (*Fig.* 3) producentur vires proportionales areolæ FE*ef*; ac proinde vires productæ toto ſpatio AE exprimentur per aream BAEF exprimentem etiam quadrata velocitatum. In utraque ſententia phænomena eodem modo contingent, quæ, ut vidimus, pendent a ſola celeritatum productione.

XXXVII. Prior ſententia eſt antileibnitianorum, poſterior leibnitianorum. Neutram amplectimur ob inutilitatem vis vivæ. Neutrius falſitatem ex phænomenis demonſtrari poſſe affirmamus. Prima tamen magis conformis eſſet ſimplicitati, & analogiæ naturæ, & illam quidem libentius

ample-

ampleſteremur, ſi alterutram omnino amplecti oporteret. Cum potentiæ ſingulis temporibus, non ſingulis ſpatiis producant celeritates ſibi proportionales; analogia melius ſervabitur, ſi & vires eadem lege producat. In oppoſita ſententia minima quæcumque vis per magnam velocitatem elevari poſſet ad maximam vim breviſſimo tempore producendam, & multo maiorem quam maxima vis longiſſimo. Id ſane ſimplicitati naturæ minus conſonum videtur eſſe. Demum cum mortuæ vires ſint in ratione maſſarum & celeritatum; etiam vivæ, ſi æque bene poſſunt, debent potius eodem modo æſtimari. At poſſunt: nam quæcumque diximus de potentiis generantibus celeritates, ſi dicantur de generantibus vires, & colligantur ſummæ ſive eorum, quæ acquiruntur, ſive eorum, quæ amittuntur, conſtabunt ſibi ſimul omnia, & phænomenum nullum repugnabit, ut in num. 31 indicavimus.

XXXVIII. Nec nos magnopere movet Leibnitiana, & Bernoulliana conſervatio virium vivarum, quæ habetur in Leibnitiana ſententia in corporibus elaſticis. Demonſtravit iam olim Hugenius in congreſſu corporum elaſticorum ſemper conſervari poſt congreſſum ſummam productorum, quæ fiunt ſingulorum maſſas ducendo in quadrata ſuarum celeritatum. Id Leibnitius, & Bernoullius attribuunt legi naturæ vires vivas conſervanti ſemper eaſdem. At noſtro quidem iudicio melius vires in oppoſita ſententia conſervarentur, ſi ullæ eſſent. Nam quadrata velocitatum, licet in Leibnitiana ſententia ſatis exprimant quantitatem virium, earum directionem exprimere non poſſunt; cum quadrata ſemper poſitiva ſint, & vires habere poſſint directiones contrarias, ac proinde ex poſitivis in negativas tranſire. Sic in Newtoni ſententia gravitatis decreſcentis in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro, ſi diſtantiæ dicantur x, vires exprimi quidem poſſunt per $\frac{1}{xx}$; donec directionem non mutant; ea mutata formulæ motuum, quæ ex tali expreſſione eruuntur, fallaces ſunt. Ex: gr: notum eſt, in ea virium lege, ſi punctum tendat ad ſingula puncta ſuperficiei ſphæricæ, menſuram attractionis ex omnibus reſultantis, donec eſt extra ſuperficiem, poſita diſtantia a centro $= x$

fore $\frac{1}{xx}$; at ſimul ac infra ſuperficiem deſcendit, evadit = o. Iam vero quoniam vires vivæ deberent eſſe & poſitivæ, & negativæ; ſi ſumma maneret, maneret utique, ut in omni & geometria, & analyſi, ita, ut negativa addita poſitivis ea minuerent, & additioni ſubtractio ſubſtitueretur. At eo pacto in Leibnitiana ſententia ſumma non manet: in Antileibnitiana vero ſententia, cum ſumma motuum ad eaſdem partes, & differentia ad oppoſitas conſervetur, motibus nimirum, qui producuntur ab actionibus potentiarum æque ſemper in partes oppoſitas agentium, neutram turbantibus; vis autem viva in ea ſententia ſit ut maſſa in celeritatem ducta, adeoque ut motus: conſervatur utique etiam vis viva ita, ut poſitiva pro poſitivis in ea ſumma, & negativa habeantur pro negativis. Quin immo ſi hoc ſenſu reformetur Carteſii principium de conſervatione quantitatis motus, rite ſervatis directionum ſignis; ita erit verum, & de iis viribus, & de motibus; ut animæ quoque liberæ vires nihil turbent eiuſmodi conſervationem; nam ea tantum lege ipſa etiam in corpora agit, ut ſemper oppoſitas debeat binis particulis celeritates imprimere, quod facile demonſtratur.

XXXIX. Si demum, quis vires vivas nullas admittat, at in corpore conſideret diſpoſitionem illam, quam habet, ad foveam excavandam in molli maſſa, ad tendendum numerum elaſtrorum, ad aſcendendum contra gravitatem uniformem ad aliquam altitudinem, conſiderando hos effectus tamquam ab ipſo præſtitos, ſine ullo reſpectu ad potentias, a quibus pendent, ad ſeriem actionum, & tempora, quibus exercentur; poterit is eam diſpoſitionem ita conſideratam appellare vim vivam, eritque eius menſura maſſa ducta in quadratum velocitatis. At æque alter poterit conſiderare diſpoſitionem ad quoddam ſpatium dato tempore motu uniformi percurrendum, vel in vincendis obſtaculis, ſeriem, & tempora actionum conſiderare, & huic erunt vires vivæ in ea conſideratione uſurpatæ, ut maſſæ ductæ in ſimplices celeritates. Qui ita voces uſurpari non permittat, quæſtionem de nomine inſtituet. Verum in quæſtione de nomine vetuſtiori potius loquendi modo eſt adhærendum, quam recentiori.

tiori. Nec eſt cur Leibnitius, ſi de nomine tantum immutando contendit, ſe tantopere iactet, tamquam ſi magnum aliquem omnium mechanicorum errorem deprehenderit; quod bene notat Mairanius.

XL. Explicatis hoc pacto phænomenorum generibus omnibus per actiones potentiarum, quæ communiter conſiderari ſolent, & reductis ad ſimpliciora, & generaliſſima principia productionis immediatæ velocitatis; remanet, Sodales lectiſſimi, ut noſtram ſententiam quamdam aperiamus, quæ maiorem etiam ſimplicitatem inducit, & analogiam circa potentias ipſas, & earum agendi modum: in quam nos quidem maxime propendemus, tum ob hanc ipſam ſimplicitatem, & analogiam; tum quod plurimis etiam primariis corporum affectionibus explicandis ſit apta; licet videamus, eam quidem ab iis omnibus, qui rem altius non perpenderint, cum riſu quoque excipiendam. Nihilo tamen minus diutiſſime meditati eam hic proferre non dubitamus, paratiſſimi tamen ſi gravius quidpiam contra ipſam proferatur nobis, eamdem deſerere, & communem ſequi. Lis ea eſt acerrima Newtonianos inter & Carteſianos circa motuum generationem, quod Carteſiani ſolo corporum impulſu eorum motum mutari, contendunt, Newtoniani vires admittunt etiam in corporum diſtantia agentes. Sic gravitatem hi etiam in vacuo agnoſcunt, illi contra vociferantur, unum eſſe in mechanica impulſum admittendum, cetera omnia a mechanica plurimum abhorrere.

XLI. Nobis autem rem diutius, & diligentiſſime conſiderantibus illud in mentem venit; ſi analogiæ, & ſimplicitati naturæ conſulatur; nullam mutationem motus fieri per impulſionem, ſed ſemper per vires agentes in aliqua diſtantia, ſive eæ in natura ipſa corporum ſitæ ſint, ſive potius ex libera quadam pendeant opificis ſupremi lege, qui pro arbitrio ſuo potuiſſet non ſolum hanc materiam condere potius, quam non condere, ſed etiam, cum his potius, quam cum illis condere affectionibus, & legibus, nulla vi illata naturæ corporum nihil aliud requirenti, niſi ſummam ſubiectionem Conditoris ſui divinis nutibus. Quamobrem cenſemus, ab illis principiis derivari, corpora, & eorum particulas nullo umquam caſu ſe ita contingere; ut vere nihil intermedii ſpatii interſit; ſed viribus quibuſdam præ-

ditas eſſe ſingulas materiæ particulas, quæ in aliis diſtantiis attractivæ ſint, in aliis repulſivæ ita, ut demum imminutis in infinitum diſtantiis, augeatur vis repulſiva in infinitum, non vincenda niſi infinita vi, quam ſolus Deus ipſe O. M. poſſit exerere, qui proinde ſolus poſſit, compenetrare corpora, & iis adimere extenſionem.

XLII. Nec illud nos movet, quod videamus continuas, & non interruptas ſuperficies corporum, videamus, admotis globis nullum apparere intervallum, admota manu contactum experiamur; nec illud veremur, ne quis baculo utendum dicat, ut innoteſcat nobis, an vere contactus corporum habeatur. Minima intervalla ſub ſenſum non cadere, ſatis patet. Trans pellucidam cryſtallum libere radii permeant quaquaverſus: immo, ut norunt, quicumque microſcopiis tractandis aſſueverunt, trans omnium corporum tenues laminas, licet ad ſenſum continuas, tranſeunt. Adſunt icciro meatus, qui non apparent, & adſunt in immenſa copia. Idem globorum intervallis poteſt contingere. Si maxima vis repulſiva in minimis diſtantiis ſeſe exerat; ubi globum globo admoveris, vis illa, ut in *Fig. 6*, aget in utrumque globum; donec utrumque ad eamdem celeritatem reduxerit. Promovebitur globus, qui ante quieſcebat, altero, ſi ipſum ſemper promoveas, ſemper intervallum illud minimum retinente, quod tu ſenſu percipere cum non poſſis; non poteris ſane inde arguere, ipſum intervallum vere nullum eſſe. Idem in manu continget, idem in baculo. Ubi ad minimas eas diſtantias ventum fuerit, vis repulſiva aget illa quidem & in id corpus, & in fibras, ut in vero immediato contactu vis impenetrabilitatis: fiet introceſſio partium, ut in preſſione ex contactu derivata: tendentur fibræ ea vi, & inde motu ad cerebrum propagato, eodem prorſus modo perceptio fiet, quo fieret per contactum. Ea omnia adduximus, ut ante quam fundamenta ipſa noſtræ ſententiæ aperimus; oſtendamus manifeſto, neque eius veritatem, neque eius falſitatem huiuſmodi experimentis, & ſenſuum teſtimonio evinci, ac in ipſis ſenſibus nullum prorſus fundamentum haberi poſſe pro utralibet. Sed ut magis communi loquendi modo conſulamus, quo & nos utimur, contactum dicemus phyſicum, & cui, ut unice per ſenſus noto, nomen contactus ex hominum

inſti-

inſtitutione eſt impoſitum, eum, in quo bina corpora devenerint ad diſtantiam, quæ nullo hominum ſenſu poſſit percipi, & in qua vis repulſiva ita ſit magna, ut nulla humana vi vinci poſſit. Contactum mathematicum, & immediatum eum, in quo intervallum in ſe ſit nullum. Illum priorem in baculo formidaremus, hunc ſecundum, ſi noſtra ſententia vera ſit, timere non poſſumus.

XLIII. Sed ut ad fundamentum noſtræ huius ſententiæ deveniamus; in primis difficultatem omnem amovebimus, qua huiuſmodi vires in diſtantia quadam agentes reiici ſolent, tamquam hic agendi modus, nec mechanicus ſit, nec naturæ congruens. Quæ nobis communis eſt difficultas cum Newtonianis, & quidem etiam Peripateticis gravitatem ſuam vel in libera Dei lege, vel in ipſa natura, & eſſentia corporis, vel in qualitate quadam reponentibus, quæ, licet in vacuo poſitum, corpus ad aliud corpus, vel ad centrum diſtans adduceret. Illud a Carteſianis petimus. Cur tandem per impulſum communicatur motus? Cur ubi globus globum impellit, motus quieto globo communicatur? Dicent ſane, impenetrabilitatem eſſe in cauſa; ſi enim bina corpora idem ſpatium occupare poſſent; non eſſet, cur alterum ab altero retineretur. Urgebimus: quid autem eſt impenetrabilitas iſta? unde fit, ut idem ſpatium bina corpora occupare non poſſint? Dicent ſane, eam eſſe vel naturam corporum, ut alterum alterius locum non occupet, vel liberam Dei legem, vel ignotum aliquid; & ſi quidquam aliud reponant; ſemper urgebimus, donec eodem recidant. Sinant igitur, nos quoque eadem reſponſione uti: nimirum eam eſſe vel corporum naturam, vel liberam Dei legem, ut alterum ad alterum in quibuſdam diſtantiis accedere, in aliis recedere debeat, & quidem in minimis ſemper recedere ſecundum certas quaſdam leges, quas paulo infra explicabimus.

XLIV. Et ſane ut alia innumera attractionum & repulſionum genera omittamus, quæ in minoribus diſtantiis ſe abunde produnt; luculentiſſima eiuſmodi virium exempla in gravitate habemus, & in viribus illis, quibus corpora in lumen agunt, & lumen in corpora. Multa a doctiſſimis viris ingenioſiſſime reperta ſunt ad gravitatem explicandam per corporum impulſionem ope materiæ gyrantis,

tis. Cenſemus nec per Carteſianos vortices, licet reformatos, nec per Hugenianum, gravitatem explicari poſſe. Et Carteſianorum potiſſimum vorticum reformatio, quam infeliciter a ſummis etiam viris tentata ſit, exemplis aliquot illuſtravimus in diſquiſitione in univerſam Aſtronomiam, quam anno 1742 exhibuimus. Hic ipſe infelix exitus tantorum tentaminum nobis abunde ſuadet, gravitatem ab impulſione nequaquam pendere, & planetarum, cometarumque motus tam diuturnos procedere a vi inertiæ, & a viribus gravitatis agentibus in immenſo pene vacuo, vix ullam reſiſtentiam exhibente. Radios autem luminis in tranſitu prope corporum opacorum acies intorqueri vi quadam ſine ullo contactu, deprehendit olim Grimaldus noſter, & Newtonus inde illam activam vim deduxit, qua tam feliciter uſus eſt, ad reflexionem, inflexionem, & refractionem potiſſimum explicandam. Et quidem ita putamus, luminis repulſum in reflexione non fieri ab impactione in eam ſuperficiem, a qua id reflectitur, ut eam propoſitionem cenſeamus a Newtono demonſtrari, quantum in phyſicis licet, optices l. 2 parte 3 prop. 8. Binis hiſce luculentiſſimis exemplis inſtructi, adverſariorum clamores nullis rationibus, ſed ſolis præiudiciis ab infantia ſecum deductis innixos non formidamus; & vires aliquas adeſſe in natura, per quas ſine immediato contactu mutetur corporum ſtatus, & velocitas generetur, ita admittimus; ut eum agendi modum ſatis naturæ ipſi familiarem eſſe, immo etiam in hac noſtra ſententia unicum arbitremur. Accedit mira illa vis magnetica diu, & pariter fruſtra tentata per vortices materiæ magneticæ, cuius præcipua phænomena, qua ratione a nobis explicari poſſint, innuemus inferius.

XLV. Cur autem huius tantum generis vires admittamus in natura, & impulſionem excludamus; cauſa in promptu eſt. Communis iam eſt multorum ſententia, nihil in natura per ſaltum fieri, ſed ut in locis etiam geometricis, & in algebraicis formulis accidit, quidquid augetur, aut minuitur, ita continuo augeri, aut minui, ut ab una quantitate ad aliam motu ſemper continuo per omnes intermedias quantitates tranſeatur. Huius principii nulla experimenta falſitatem evincent: plurima, quantum per ſenſus

licet

licet deprehendere, eo nos manifeſte deducunt. Et quidem in ipſo locali motu nulla ſane alia de cauſa per ſaltum ex uno loco tranſire non licet in alium; niſi continuo motu per intermedia tranſeatur. Sic & per tempus continuum ab uno momento ad aliud diſtans devenimus, ſine interruptione, & ſaltu. Id ipſum autem, & in motuum generatione ita a Leibnitianis potiſſimum admitti ſolet; ut nulla velocitas momento temporis intereat tota, aut oriatur, nec ab uno velocitatis gradu tranſeatur ad alium, niſi per intermedios omnes tranſitus fiat. Hinc dura corpora excludunt a natura, in quorum congreſſu momento temporis generaretur velocitas, vel extingueretur; & omnia corpora vel elaſtica eſſe volunt plerique, vel mollia, vel potius mixta, ita nimirum, ut in congreſſu binorum corporum, dum partes introrſus cedunt, paulatim extinguatur velocitas per decrementum continuum, quæ vel iterum reſtituatur paulatim ad partes contrarias per continuum incrementum, ut in elaſticis, vel prorſus intereat, ut in mollibus.

XLVI. Iam vero ſi id principium verum eſt; verum erit etiam mutationem motuum numquam fieri per impulſionem; quod ex ipſo nobis quidem videtur evidenter conſequi. Fac enim (*Fig. 9*), duo globi elaſtici AB, CD æquales & cum æqualibus celeritatibus delati, quas exprimant rectæ AF, DO ipſi AD perpendiculares, in ſe invicem impingant in E: ipſo momento temporis, quo impingunt in ſe invicem puncta diametrorum C & B, motum omnem neceſſario ſiſtent diametris BA, CD abeuntibus in E*a*, E*d* æquales: at omnes reliquæ particulæ præter illas primas, ut poſtremæ *a* & *d*, adhuc moveri pergent motu retardato ſemper; donec omnis earum celeritas alicubi extinguatur in M, & N mutata iam figura, & diametris contractis: & ſi globi quidem ſint molles; perſeverabunt in eo ſtatu: ſi elaſtici; ſingulæ particulæ per eoſdem gradus retro reflectentur. Si autem erigantur ſemper BG, *a*H, EI, *d*K, CL uſque ad rectam FO; velocitates punctorum A, & D, exprimentur illæ quidem per ordinatas ſemper æquales ad rectam FO uſque ad H, & K; tum per ordinatas perpetuo decreſcentes ad lineas quaſdam HM, KN. At velocitates particularum B, & C, ſi quæ primæ particulæ ſolidæ ſunt, vel ſaltem punctorum, B, & C, vel ſuperficierum circa B, & C, ſi

C, ſi globis ſubſtituantur cylindri, momento temporis extinguentur totæ, & quieſcent ea puncta, vel ſuperficies toto eo continuo tempore, quo *a*, & *d* abeunt in M & N; exponentur igitur primum punctorum B, C velocitates ipſæ per ordinatas ad rectam FO uſque ad I, tum in I abrumpetur omnis expreſſio per ordinatas, & ordinatæ EI ſuccedet punctum. Si igitur nulla velocitas momento temporis extinguitur; non pergunt globi cum uniformi velocitate uſque ad contactum; ſed ubi particulæ B, & C acceſſerint ad quamdam exiguam diſtantiam; vis aliqua repulſiva eas perpetuo repellet ita, ut velocitas paulatim extinguatur ante contactum. Subſtituendo corpora mollia, & elaſtica duris, evitatur quidem ſaltus in velocitatibus particularum A, & D; ſaltus autem in velocitatibus particularum B, & C evitari non poteſt, niſi in minimis diſtantiis eiuſmodi vis repulſiva admittatur.

XLVII. Et vero, quod in motu globorum æqualium, cum velocitatibus contrariis, & æqualibus oſtenſum eſt, idem continget in congreſſu quorumcumque corporum cum inæqualibus velocitatibus. Velocitates primarum ſuperficierum momento temporis reduci debent ad æqualitatem, cum impenetrabilitas non ſinat alterum corpus alterius locum ſubire, & toto eo tempore, quo mutantur figuræ, & ceterarum partium velocitates ad æqualitatem pariter reducuntur, quies illa reſpectiva partium contingentium perſeverabit. Hanc autem vim repulſivam diſtantiis perpetuo imminutis creſcere ultra quoſcumque limites, inde eruitur; quod ſi finita eſſet, globis cum aliqua velocitate delatis, quæ definiri poſſet, punctorum B, & C velocitas in ipſo contactu elidi deſineret; at ea velocitate aucta contactus haberetur, ante deſtructam velocitatem illam totam, & proinde ſaltus. Et multa quidem ſaltuum huiuſmodi afferri poſſent exempla alia, tum preſſionum ſimplicium, tum mutationis momentaneæ loci geometrici, celeritates exprimentis; ſed caſum evidentiſſimum, & facillimum delegimus. Ex analogia, & ſimplicitate naturæ deducitur principium illud expoſitum num. 45; illo principio admiſſo, contactus mathematicus neceſſario excluditur, & vires repulſivæ in minimis diſtantiis creſcentes ultra quoſcumque limites recta ratiocinatione colliguntur.

XLVIII.

XLVIII. Ut autem alius impediatur ſaltus; oportet vires eaſdem, quibus particulæ in minimis diſtantiis ſe invicem repellunt, ad omnes etiam diſtantias in infinitum extendi; licet poſſint in maioribus diſtantiis ita decreſcere, ut ſenſum omnem effugiant, & in attractivas etiam mutentur, ut iam explicabimus. Si enim eiuſmodi vires aliquo intervallo nullæ prorſus eſſent, tum alicubi agere inciperent; novo ibi elemento adveniente, abrumperetur prior geometricus locus exprimens celeritates, & novus ſubſtitui deberet. Sic ſi particulæ A & D motu uniformi delatæ uſque ad *a* & *d*, ibi tantum vires repulſivas ſentire inciperent; velocitates uſque ad *a*, & *d* exprimerentur per ordinatas ad rectas FH, OK, quæ ibi abrumperentur, & iis ſuccederent vel rectæ, vel curvæ quædam HM, KN. Id ne fiat, oportet actionem aliquam fuiſſe in omnibus diſtantiis, & quidem expreſſam per ordinatas ad curvas quaſdam continuas, de quibus mox agemus, ac nullam, ſi ullibi nulla eſt, ſolum in punctis quibuſdam, in quibus eæ curvæ axem ſecant, & repulſio mutatur in attractionem, vel viceverſa; eo enim pacto, velocitates exprimentur per curvam quamdam, quæ ad datam quidem rectam accedere poterit, ſed nuſquam in eam ipſam mutabitur.

XLIX. Directa igitur ratiocinatione ex illo principio deducto per analogiam naturæ devenimus ad vires particularum corporum in minimis diſtantiis repulſivas, & iis imminutis auctas ultra quoſcumque limites, iis auctis variatas ita, ut exprimantur per ordinatas ad curvas quaſdam continuas. Mirum autem, quam ea particularum idea explicandis plurimis corporum phænomenis perquam idonea ſit; mirum quanta inde pulcherrimorum, & difficillimorum problematum ſeges erumpat, quibus & geometria ſublimior, & analyſis exerceatur. Rerum multitudine, & magnitudine obruimur, quæ cum per univerſam late naturam excurrant, intra tam anguſtos unius diſſertatiunculæ fines contineri non poſſunt. Quamobrem delibabimus tantum nonnulla, omiſſis quamplurimis.

L. In corporibus omnibus gravitatem mutuam detexit Newtonus, quam ipſe in particulis omnibus agnovit decreſcentem in ratione reciproca duplicata diſtantiarum: agnoſcimus nos repulſiones has in minimis diſtantiis, quæ di-

ſtantiis imminutis in infinitum excreſcant. Si ad eas ſolas vires in corporum particulis attendendum eſſet; ſic exponi poſſent. Exponant (*Fig.* 10) ſegmenta rectæ AG diſtantias binarum particularum a ſe invicem; ſitque curva quædam MCKIH eius naturæ, ut habeat pro aſymptoto rectam NL perpendicularem axi AG, a qua perpetuo recedat; ſecet axem alicubi in C, a quo recedat uſque ad K, tum reflectatur verſus ipſum, & ab aliquo puncto I habeat pro aſymptoto hyperbolam ſecundi ordinis, cuius factum ſub abſciſſis, & quadrato ordinatarum conſtans ſit, ad quam nimirum hyperbolam arcus in I accedat ultra limitem ſenſibilem, tum perpetuo magis, & diſtantia pariter puncti I a recta NL ſit perquam exigua. Eius curvæ ordinatæ BM, quæ verſus alteram plagam ſpectant, exprimant vim repulſivam; quæ ſpectant oppoſitam plagam, ut DK, EI, FH, mutatæ in negativas, expriment vires attractivas. Utimur autem virium attractivarum, & repulſivarum nomine, non quod aliquam phyſicam actionem ponamus particulæ diſtantis in diſtantem, ſed ut hiſce vocabulis exprimamus determinationem illam, quæ vel ſita eſt in libera Dei lege, vel in natura, & eſſentia particularum corporum, vel in qualitate aliqua, qua particulæ ad ſe invicem conentur accedere, vel a ſe invicem conentur recedere; quæcumque ex iis ſit cauſa phyſica eius conatus. Hæc quidem curva, & gravitati Newtonianæ, & noſtræ vi repulſivæ ſatisfaciet.

LI. In omnibus enim diſtantiis maioribus, quam ſit AE, ut AF, poſita ipſa $AF = x$, & $FH = y$, erit ad ſenſum xxy conſtans, & y ut $\frac{1}{xx}$; ſive attractio in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Creſcet ea attractio imminutis diſtantiis uſque ad AD, tum decreſcet, & in C erit nulla. In minoribus autem diſtantiis, ut AB, mutabitur in repulſivam, quæ, in infinitum imminuta diſtantia, in infinitum augetur.

LII. At ecce tibi ſimul, ex eadem lege per eiuſmodi curvam expreſſa, & impenetrabilitatis ratio patet, & extenſionis, quæ ſemper habitæ ſunt tamquam primariæ quædam corporum affectiones, a ſimpliciori quodam principio non

non pendentes. Profecto ſi imminuta diſtantia AB, vires eiuſmodi repulſivæ in infinitum creſcunt: ſine infinita vi particulæ ad ſe invicem ita admoveri non poterunt; ut eumdem occupent locum. Quamobrem ſolus naturæ auctor infinita potentia pollens eam poterit reſiſtentiam vincere, & corpora compenetrare. Pariter ſi ſe in minimis diſtantiis particulæ ita repellunt; diſponentur profecto ita, ut per locum aliquem diſtribuantur in longum, latum, atque profundum.

LIII. Verum & illud ſtatim ſeſe obiicit oculis, quo nimirum pacto fluidorum particulæ inter ſe adhæreant ita, ut aliæ magis compreſſioni, & dilatationi reſiſtant, aliæ minus. Si enim eorum particulæ ſint in illa diſtantia AC, & ea utcumque parum imminuta, vel aucta ſtatim ordinatæ utrinque plurimum creſcant; vi ad comprimendum adhibita etiam maxima, minimum accedent: quia cito vi comprimenti æqualis invenietur repulſiva: & idem dilatationi accidet. Sic aqua nulla vi adhibita comprimetur ad ſpatium ita minus, ut ſub ſenſus cadat; nec tamen inde erui poterit, eam conſtare globulis ſolidis, ſe contingentibus, quo caſu nullum aliud fluidum continere poſſet duplo plus materiæ, adeoque & ponderis, quam aqua: ſed nec illud, elaſticitate carere aquæ particulas; verum potius ſummam eſſe elaſticitatem, concludetur. Sic etiam ſeparationi reſiſtet, magis, vel minus pro natura rami CK. Contrarium accidet, ubi eæ ordinatæ non ſtatim multum augentur.

LIV. At quoniam aqua maiore vi, ut per ignis actionem, in vapores convertitur, quorum particulæ maxima vi a ſe invicem recedunt, & in exiguis diſtantiis ſibi invicem adhærent vi maiore, quam quæ ex gravitate oritur; iis viribus, ut & aliis chymicis aliorum corpuſculorum effectibus explicandis, arcus curvæ CKI (*Fig.* 10) ita flectendus eſt, ut axem in aliis binis, vel etiam quotcumque punctis ſecet. Mutabitur curva in aliam (*Fig.* 11), in qua in maximis diſtantiis AF ſit vis attractiva proxime in ratione reciproca duplicata diſtantiarum uſque ad AE: uſque ad AD adhuc creſcat, ſed ab ea ratione magis recedat, ut poſſit deinde decreſcere uſque ad AT: tum fiat repulſiva creſcens uſque ad AS, decreſcens uſque ad AQ: ibi iterum vertatur in attractivam creſcentem uſque ad AO, decreſcentem

uſque ad AC, & demum in repulſivam abeat. Si particulæ aquæ habeant diſtantiam AC eam tuebuntur, donec vis aliqua, ſuperata maxima vi attractiva OP, eas ultra AQ removeat: tum enim ſponte a ſe recedent plurimum; & ſi punctum R plurimum recedat ab axe; maximas vires repulſivas acquiret. Vires autem attractivæ verſus O poſſunt eſſe multo maiores, quam quæ a gravitatis expreſſione requirantur.

LV. Harum attractionum uſque ad certos limites, & repulſionum poſt eoſdem exemplum habemus in elaſtris, quæ in certis angulis aperta quieſcunt, magis diſtracta ad ſe invicem conantur accedere, magis compreſſa vim exerunt repulſivam. Et quidem ex eadem theoria, & mollium corporum diſcrimen habebitur ab elaſticis. Si enim intervalla QT, CQ, per quæ vires repulſivæ, vel attractivæ exeruntur, maiora ſint; corpus erit elaſticum: ſi poſt modiciſſima intervalla, repulſivæ vires in attractivas tranſeant; erit molle. In primo caſu poſt multam compreſſionem a T verſus Q, adhuc ſemper vires repulſivæ agent, & ad veteres diſtantias redibitur. In ſecundo caſu ſtatim pervenietur ad Q, poſt quem limitem vi repulſiva in attractivam verſa nullus erit conatus ad regreſſum. Sic & in filis, ac funibus videmus, earum maſſas plus æquo compreſſas, compreſſioni reſiſtere; fiet id per intervallum AC; ſi autem diſtendi incipiant, quo plus diſtenduntur, plus diſtenſioni reſiſtunt; id vero continget per CO. Si ſuperetur maxima vis attractiva OP, multo magis, & citiſſime minores quoque vincuntur uſque ad OQ, & vi attractiva in repulſivam verſa funis diſrumpitur.

LVI. Multo autem plures itus curvæ, & reditus, ad alia complicatiora phænomena explicanda requiruntur, quæ ſingula perſequi, infinitum foret, nec eſt huius loci. Illud notandum, omnes huiuſmodi curvas eſſe de genere earum, quas parabolicas vocant; & quæ exprimuntur per $a + bx^m + cx^n + dx^r$ &c. $= y$; in quibus nimirum data diſtantia x, unica habetur vis y, vel attractiva, vel repulſiva; poteſt autem eadem vis y reſpondere pluribus diſtantiis x. Et quoniam ſolutum iam eſt a Newtono problema: invenire curvam parabolici generis, quæ per data quotcumque puncta tranſeat, poterit ſemper inveniri curva continua, &

regu-

regularis, quæ exprimat vires cuiuſcumque particulæ reſpectu cuiuſcumque alterius, quæ vires ex phænomenis deductæ ſint; & eadem curva poterit ad arcus datos quarumcumque aliarum accedere quantum libuerit, & eos in quotlibuerit, & quam libuerit proximis punctis interſecare; dummodo ii arcus diverſis axis ſegmentis reſpondeant, harum vero curvarum natura, & ea puncta, per quæ tranſeunt, ex phænomenis inveſtiganda ſunt.

LVII. Illud tamen nequaquam omittendum, quo pacto & ſolidorum corporum adhæſio ex iiſdem fontibus repetatur. Si enim (*Fig.* 12) vires particulæ A verſus particulam C per omnem directionem in gyrum circa eas diſtantias, in quibus ſunt poſitæ, ſint ferme æquales; conſtituent corpus fluidum, cuius partes reſiſtent quidem ſeparationi, qua cogantur maiores diſtantias acquirere, ſed, ſervatis diſtantiis iiſdem, libere altera circa alteram movebitur, & excurret, quo excurſu fiet, ut fluidum cedat vi cuicumque illatæ, & cedendo facilè moveatur, ac corpus utcumque parum excedens fluidum in gravitate, ſi totum demergatur, deſcendat lente quidem, ſed tamen ſemper deſcendat, eodem particularum numero ad ſe invicem accedente, qui recedit, & motu circa ſe, ſervatis diſtantiis, nullam habente difficultatem. Unde etiam fiet, ut ſi maſſa fluidi ſeparanda ſit; non magna aliqua ſuperficies ſimul abrumpatur; ſed attenuato fluido in loco ſeparationis per excurſum particularum circa ſe revolutarum, ſucceſſive aliæ poſt alias ſeparentur; quod & in decidentibus aquæ guttis aſpicimus. Et id quidem ſeparationem fluidorum perfectorum faciliimam redderet. At ſi alia curva exponat vires particulæ A, ſecundum directionem Gg, alia ſecundum aliam quamcumque ita, ut ſit axis quidam virium *q*Q, & vires quaquaverſus non exprimantur per curvam aliquam, ſed per ordinatas ad ſuperficiem quandam, & in eadem diſtantia AC per gyrum ſuperficies illa ordinatas habeat iam poſitivas, iam negativas; in eadem pariter diſtantia particulæ ſe mutuo fugabunt, ſi in una aliqua directione ſint, ſe attrahent in alia, & in limitibus attractionis, ac repulſionis conſtitutæ eam poſitionem ſervare poterunt, & ab ea depulſæ verticitatem quamdam acquirere, qua ſe reſtituant, in quo ipſa corporum ſolidorum connexio ſita eſſe poterit, qua non ſolum

ſepa-

ſeparationi reſiſtant, ſed etiam inflexioni. Id autem potiſſimum neceſſario accidet, ſi maior pars ex minoribus conſtet, quæ inter ſe ſint in diſtantiis multo minoribus habentibus validiſſimos connexionis limites; ſed in illis maioribus diſtantiis aliæ attrahant magis, aliæ minus, aut etiam repellant; tum enim neceſſario conſequetur verticitas.

LVIII. In plurimis autem problematis, quæ circa haſce expreſſiones virium, ut ita dicamus, ſuperficiales proponi poſſunt, & circa motus, qui inde conſequuntur, patet quantæ in mechanica utilitatis ſint præclariſſima inventa D. Cleraut circa curvas duplicis curvaturæ, & loca ad ſuperficies. Sed fieri poſſet, ut nec axis ullus haberetur in his viribus, & nullæ binæ rectæ lineæ a particula exeuntes eamdem haberent curvam; quo caſu per ordinatas ad eamdem ſuperficiem eæ vires generaliter exprimi non poſſent; analytice poſſent; ſed ea non ſunt huius loci, & tam multa perſequi non vacat.

LIX. Hæc autem idea nos perducit ad compoſitionem particularum maiorum ex minoribus omnino homogeneis, diſſimillimam tamen. Ponatur, vires minorum particularum tam ſecundum axes quoſdam, quam ſecundum quamcumque aliam directionem habentem reſpectu eius axis poſitionem datam, exprimi iiſdem curvis in omnibus iis particulis, & diverſis curvis ſecundum diverſam poſitionem in ſingulis; ubi autem binæ combinantur in quavis diſtantia ſecundum quamvis directionem, vim mutuam exprimi per ſummam ordinatarum, quæ pertinet ad particulam utramque in iis diſtantiis, & directionibus: & poterunt maiores particulæ componi ex minoribus ita; ut diſſimillimas habeant virium leges, & ex his aliæ maiores gradatim pariter, ut libuerit, diſſimiles. Nam ſi diſtantiæ aſſumantur aliæ aliis ita minores, ut ratio minorum ad proxime maiores ſit inſenſibilis; & circa terminos ſingularum ex iis diſtantiis fiat in receſſu tranſitus a magna vi repulſiva ad magnam attractivam, quæ tamen, antequam ad ſequentem diſtantiam ventum ſit, iterum in magnam repulſivam convertatur, ac deinde varietur utcumque; plures particulæ minores, poſitæ circa eos terminos, coaleſcent validiſſime in unam maiorem particulam, ac in maioribus diſtantiis unitim agent: nec maiores particulæ eiuſdem ordinis ſe mutuo diſſolvent; aut ultra quoſ-

dam

dam limites ad ſe accedent. Quid autem, ſi eodem modo fixæ quoque ſint in limitibus quibuſdam attractionum, & repulſionum omnium, curva nimirum KIH (*Fig.* 11) ut in minimis, ita quoque in maximis ultra omnes planetas diſtantiis plurimum abludente ab ea hyperbola, quæ exprimit gravitatem decreſcentem in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & ſecante axem iterum, ac fortaſſe in aliis punctis quamplurimis? An non diſtantiam ſervarent a ſe invicem proxime eamdem, nec in ſe mutuo irruerent, & mundus totus ita conſtaret ſibi, ut una ex maioribus illis particulis? Quid ni ea potiſſimum de cauſa in tam immenſa diſtantia a nobis, & a ſe invicem collocatæ ſunt? Quid ni cometæ, qui longe ulterius procurrunt, dum in noſtra quidem vicinia ſunt, planetarium ſyſtema ſubeuntes, viribus, quæ ſunt quamproxime in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, deſcribant curvas quamproxime accedentes ad parabolas, vel ellipſes; at mutata in maioribus diſtantiis virium lege, ab iis orbibus plurimum recedant, & redeant illi quidem, at longe alios, longe aliarum orbitarum arcus deſcribant in reditu? An non ſaltem in iis, qui procul recedunt, nullum haberi poterit indicium reditus, licet iidem redeant, mutata fortaſſe etiam athmoſpæræ illius vaſtiſſimæ magnitudine, & forma, ex qua eorum apparens magnitudo æſtimatur, nucleo ipſo ingenti ſemper caligine quadam involuto?

LX. Porro maiorum particularum vires, quæ ex minorum combinatione prodeunt, poterunt eſſe, ut diximus, inter ſe diſſimillimæ: nam ex diverſa axium combinatione, & minorum particularum numero diverſiſſimæ virium leges exurgerent. Qui autem inde elegantiſſimis tam directis, quam inverſis problematis aditus aperitur! ut nimirum, ſi data minorum particularum communi lege, dato numero, & earum poſitione ad ſe invicem, quæratur lex, quæ in maioribus ab iis compoſitis conſequi debeat: vel numerus, & poſitio axium quæratur eiuſmodi, ut in particula maiore ex iis compoſita data aliqua exurgat lex, vel ſaltem datæ aliquæ vires in datis datarum directionum punctis: quæ quidem problemata ſolus ille ſemper omnia unico intuitu penetrat, qui mundum dum conderet, ſi hoc, quo diximus modo ſe res habent, iis eſt uſus.

LXI.

LXI. Quin immo quoniam per illos attractionum, & repulſionum limites tam feliciter explicatur adhæſio partium; quid ni nullæ ſint minimæ particulæ ſolidæ; ſed, ut omnes adhæſiones eiuſdem generis ſint, ultimo reſolvantur corpora in puncta quædam, quæ partes non habeant, ac proinde continuam extenſionem nec habeant, nec componant. Ut puncta mathematica in geometria nec lineam, nec ſuperficiem, nec ſolidum continuum componunt; ſed vel congruunt, vel aliqua linea a ſe invicem diſtant; ſic eiuſmodi puncta phyſica, & realia, iis viribus prædita continuam extenſionem non poſſent componere, ſed vel compenetrari deberent, ad quod ipſum divina infinita vis requireretur, vel a ſe invicem aliquo intervallo diſtare, quod in utriſque ex ipſa indiviſibilitate, & extenſionis carentia conſequitur. Continuum phyſicum eo pacto ſummoveretur e natura. At quoniam in hac hypotheſi phænomena omnia ex earum virium actionibus pendentia eodem modo ſe haberent; continui exiſtentia probari non poteſt. Qui autem de continuo ipſo diu cogitaverit, agnoſcet ſane, in lucro potius ponendum eſſe, ſi id e natura expelli poſſit, atque exturbari. Quid quod ex una parte omne quantitatum genus, quod augeri poteſt in infinitum, poteſt etiam minui, natura utraque ex parte limites omnes reſpuente; ac proinde moles corporis, quæ particulis a ſe invicem diſtractis poteſt augeri in infinitum, videtur illa quidem ex naturæ analogia debere poſſe in infinitum & minui: ex altera vero parte, ſi nullæ ſunt infiniteſimæ partes in ſe determinatæ, ſed infinite parva ſunt indefinite parva, in quibus nos tantum a determinata magnitudine abſtrahimus, ut in ſingulis caſibus demonſtrationem liceat deducere ad abſurdum, & ſi eadem materiæ particula non poteſt iam maiorem, iam minorem locum occupare totum; in nulla alia ſententia moles ultra quoſcumque limites minui poteſt, particulis ſolidis, ubi ad contactum devenerint, omnem ulteriorem compreſſionem omnino reſpuentibus: dum punctorum intervalla utcumque parva, in quacumque data ratione poſſint ſemper dividi, & moles corporis cuiuſcumque, ſi punctis conſtet huiuſmodi, reduci ad aliam in quacumque data ratione minorem? Quid quod ibi ſane multo expeditius illud intelligitur, qui fieri poſſit, ut radii luminis

nis ſecundum omnes directiones liberrime excurrant, nec quidquam ſe invicem turbent. Nimirum numerus punctorum utcumque maximus, ex quo conſtarent, ad ſpatium totum haberet rationem quavis data minorem, ſive nullam; & eadem eſſet ratio numeri caſuum, in quibus ſibi invicem deberent occurrere, ad numerum caſuum, in quibus ſe vitarent. Quid autem, ſi ea potiſſimum de cauſa tanta lumini celeritas, tanta raritas data eſt; ut cum occurſus evitari neceſſario debeant, virium quoque omnium, quas in exiguis diſtantiis in ſe invicem exercerent diverſorum radiorum particulæ, actiones minimæ evadant, & inceptum iter ad ſenſum non mutent? Non hæc ita ſe habere, dicimus: ſed campi huiuſce incredibilem quamdam, & ingeniis exercendis aptiſſimam innuimus ubertatem.

LXII. Demum quod ad magneticos effectus pertinet; potiores ſane ſponte inde fluunt. Nam tres in primis ſunt præcipuæ magnetis affectiones: attractio, ac repulſio iuxta diverſos polos, communicatio virtutis, & directio. Attractio inde pendere poteſt, quod lex virium inter particulas ferri potiſſimum, & magnetis, ad multo maiorem diſtantiam, quam reliquæ, a gravitatis lege plurimum adhuc diſſideat, & ſecundum diverſas directiones vires exerceantur in iis particulis qua repulſivæ, qua attractivæ. Ubi multæ eiuſmodi particulæ coaluerunt ſimul cum axibus attractionum vel congruentibus, vel parallelis, ii enimvero erunt magnetes optimi, qui quidem vires etiam aut acquirere poterunt, aut amittere; prout plures particulæ, quocumque demum artificio, eamdem poſitionem acquirant, vel amittant, vel cum aliis coniungantur, ex quarum coniunctione immutetur lex. Patet autem eos habere etiam poſſe polos attractionis, & repulſionis, & iis confractis, ſingula fruſta ſuos pariter polos habitura. At ſi ferri particulæ quocumque demum pacto eam axium poſitionem acquirant, ferrum ipſum poterit in magnetem abire, & eamdem attractivam, ac repulſivam vim exercere.

LXIII. Hinc communicatio virtutis in eo ſita eſſe poteſt, quod ferri particulæ caſu & ſine ullo ordine diſpoſitæ, ob magnetis vicini actionem obvertant axes ſuos ita, ut in pluribus particulis ii congruant; tum enim ſe prodet magnetica vis in ferro quoque. Et eadem de cauſa filum

ferreum, quod ſuper magnetem ductum virtutem contraxit, poterit virtutem amittere, ſi motu contrario priori ducatur ita, ut axium poſitiones iterum perturbentur. Ferrum autem, quod diu in eodem iacuit ſitu, in magnetem abire poterit, particularum axibus paulatim convergentibus ex actione continua ſubpolarium magnetum, quos ibi in magna eſſe copia infra ſuperficiem telluris patebit ex ipſa directionis explicatione.

LXIV. Directio acus in ſingulos magnetes pendere poteſt ab ipſa attractione, & repulſione iuxta diverſos particularum polos, & axium poſitionem, ex quibus, licet in maiore diſtantia, verticitas pendeat prorſus, ut in num. 57. Directio autem verſus certas terræ plagas polo proximas, & altero tantum polo magnetis eo ſe ſponte obvertente, provenire poteſt ex eo, quod per univerſam quidem tellurem ingentes adſint ſub ipſa ſuperficie maſſæ ferri, & magnetum, ſed multo plures, quam alibi, verſus polos. Quod enim eiuſmodi fodinæ adſint non tantum ſub ipſo polo, id efficiet, ut non verſus polum accurate dirigantur acus, ſed hinc inde aberrent. Quod eiuſmodi fodinæ minores nullo certo ordine diſperſæ ſint per omnem tellurem, id efficiet, ut in declinatione magnetis nullus ſit certus quidam ordo, ſed & linea, in qua nulla eſt declinatio, & reliquæ, in quibus ea eſt certi graduum numeri, ſint admodum irregulares ad ſenſum, & compoſitæ: quæ quidem ex hiſtoria magnetica habemus omnia. Atque eius rei imaginem quamdam expreſſam habere poſſumus; ſi maiorem aliquem magnæ virtutis magnetem ad menſæ caput collocemus; tum alios minores diſpergamus irregulariter. Acus ſe ad magnum illum magnetem potiſſimum diriget; ſed minorum actionibus deflectetur nonnihil. Erit autem linea quædam irregularis, in qua laterales actiones ſe mutuo elidant, & directio fiat verſus magnetem illum maximum: hinc inde ab ea linea declinationes habebuntur contrariæ, & curvæ, in quibus eæ ſint certi graduum numeri, erunt pariter ſatis compoſitæ.

LXV. Hinc autem elegantiſſimis, & difficillimis problematis aperitur iterum aditus: ut ſi datis in plano binis, vel ternis, vel quotcumque maſſis utcumque inæqualibus materiæ attrahentis in quacumque diſtantiarum ratione, opor-

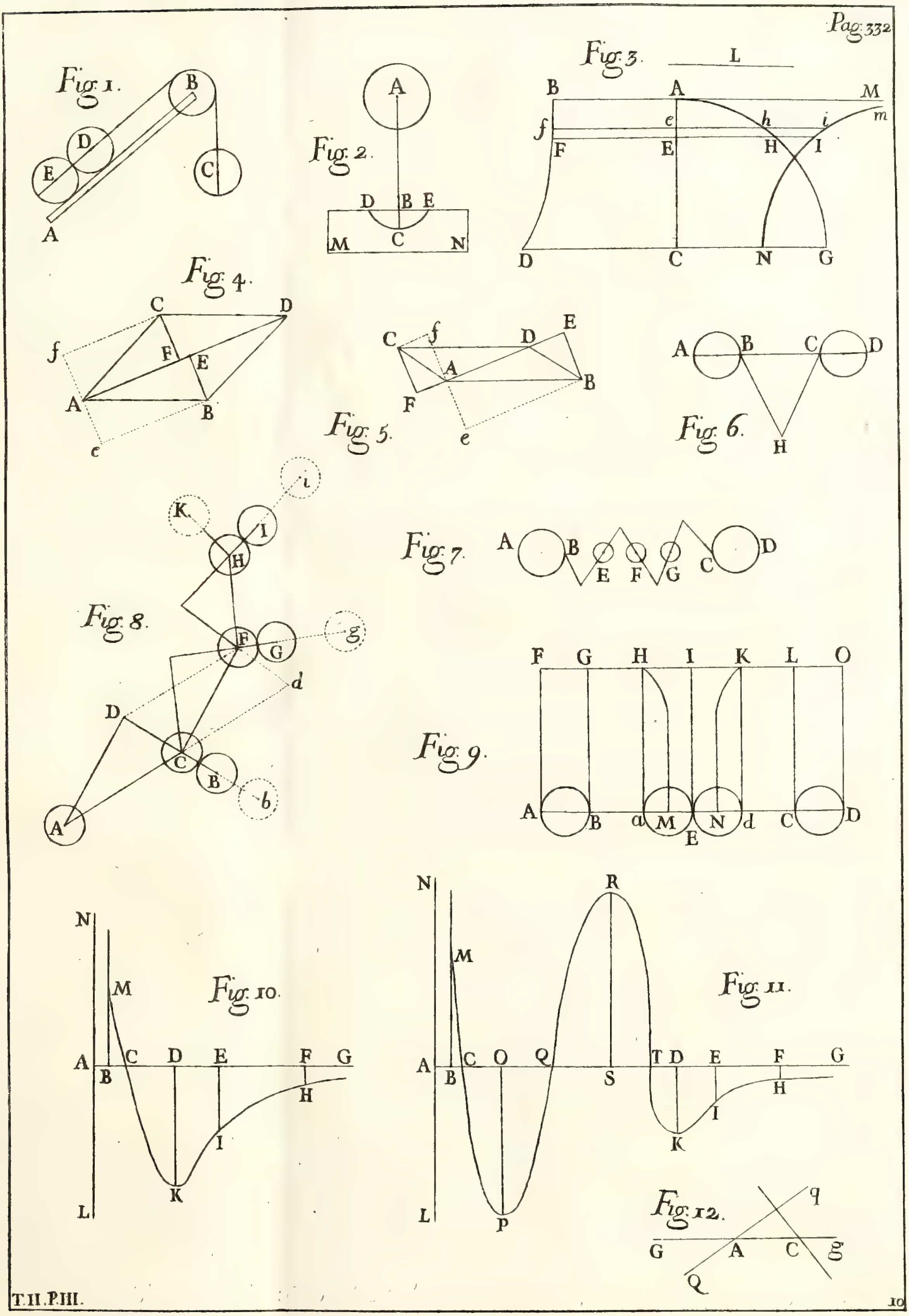
oporteat invenire curvam, in qua corpuſculi attracti directio fiat verſus datum punctum, vel ab eo deflectat per datum angulum. Id autem difficilius, & generalius evadit; ſi eæ maſſæ dentur extra planum utcumque: multo autem magis creſcit difficultas: ſi attractiones exprimantur per curvas quaſcumque datas, vel etiam per ordinatas ad ſuperficiem, vel ita, ut in diverſis quibuſvis directionibus diverſæ curvæ adhibendæ ſint. Quid autem, ſi problemata proponantur inverſa, ut ſi datis attractionis legibus, & datis curvis directiones eaſdem exprimentibus, quæratur numerus, & diſpoſitio eiuſmodi maſſarum? An non eo pacto iniretur via ad determinandam ex obſervationibus fodinarum magneticarum poſitionem, & magnitudinem?

LXVI. Ac ſi ea eſt declinationis, & inclinationis cauſa; quid ni inde fiat, ut quotidie parum admodum mutetur directio; at procedente tempore mutatio fiat multo maior, & alicubi poſt ingentes terræmotus ſtatim haud ita parva depræhenſa ſit? Nimirum fodinæ illæ perpetuas mutationes ſubeunt, novæ alibi generantur, augenturque, alibi minuuntur, & intereunt; quæ mutatio & perpetua eſt, & exiguo quidem tempore exigua, ſi ſummam ſpectes mutationum omnium contrariarum, longiore vero multo maior. At ſi ita res habet; an non inanis eſt cura, variationem declinationis ad certas leges, quas omnino reſpuit, revocandi? Fodinas autem magneticas & ferreas in pluribus locis eſſe maximas, ignorat nemo. Ad hoſce effectus explicandos eæ ſufficiunt; eæ igitur ſunt cauſæ. A phænomenis earum poſitio determinanda, ex quibus, maximam eſſe ſub polo copiam, deducitur. Si quis vero & difficiliora velit problemata; is motum quærat puncti attracti a maſſis diſperſis, quarum attractiones, vel exprimantur per curvas, vel per ordinatas ad ſuperficiem, vel in quavis recta ex ipſis maſſis exeunte, diverſæ ſint; vel ab eiuſmodi motibus quærat vel maſſas datis legibus, vel leges datis maſſis. Quam vaſtus hic geometriæ, & ſublimiori analyſi campus, in quo vires ſuas experiantur, & promoveant analyſim ipſam ſummi etiam geometræ, & analyſtæ!

LXVII. Nos autem nimium ſane evagatos eo regredi neceſſe eſt, unde digreſſi ſumus; ut manum tandem de tabula removeamus. Omnia virium genera per haſce curvas ad

 uni-

unicum, & ſibi ſemper conſtantem agendi modum reducuntur. Corpora dura eliminantur e natura, eliminatur ſaltus omnis, qui etiam in aliis quibuſdam virium legibus haberetur; ut ſupra vidimus num. 38 in puncto a punctis ſuperficiei ſphæricæ attracto in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; ubi attractio in infinitum poteſt excreſcere in acceſſu; quod in noſtris curvis numquam accidit. Phænomena autem motuum eodem, quo ſupra, modo hic explicantur per actiones utrinque æquales virium per curvas explicatas expoſitarum, quæ novas celeritates immediate producant in corporibus tam elaſticis, quam mollibus, ſine ulla uſpiam neceſſitate virium vivarum, ſine ulla neceſſitate impenetrabilitatis agentis per ſaltum in impulſu corporum, & contactu.


Pag. 332
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
T.II.P.III.
10

JOANNIS CHRYSOSTOMI TROMBELLI

AD

FRANCISCUM MARIAM ZANOTTUM.

De acus nauticæ inventore.

I. BAſilicas edictiones atque imperioſas habes (*a*), Zanotte litteratiſſime, dum me nauticæ acus originem, auctoremque ediſſerere iubes. Quod ſi non ſtatim exſequor, ingratum pronuncias, peſſimeque merentem non modo de inclyta ſcientiarum Academia, quæ me nihil plane ea de re cogitantem, in præclariſſimum ſuum cœtum retulit, ſed & de te quoque, qui huius præclariſſimi beneficii, & auctor fortaſſe fuiſti, & certe nuncius. Laborioſam utique provinciam imponis, dum rem ab aliis pertractatam (*b*), & (tua quidem ſententia) nondum plane evolutam explicare me vis: in qua etiam vereor, ut ea inſit novitatis laus, quam philoſophicæ noſtrorum temporum academiæ fere perquirunt. Obſequor tamen, & dubium omne, ac ſcrupulos, quibus angebar, amovet iuſſio tua: neque enim tibi vehementer lucubratiunculam hanc efflagitanti denegari a me poſſe exiſtimo. Dicam ergo quæ ex variis ſcriptoribus didici. Tu porro quiſnam rectius ſentiat, iudicare poteris.

II. Ex inventa acu nautica (ſic enim, uti noſti, tenuem chalybeam lamellam, quæ virtutem, quam habet magnes, ut ſe ſe veluti ſponte convertat ad polum, ex eiuſdem magnetis affrictu, contrahit, appellamus) ex inventa, inquam, acu

(*a*) *Plaut. captiv.* 4. 2. 31.

(*b*) *Ut de reliquis ſileam, argumentum hoc plurima cum eruditionis, tum ingenii laude pertractavit Gregorius Grimaldus, cuius doctiſſimam diſſertationem continent Acta (ſi ita appellare ea volumus) Academiæ hetruſcæ tomo III pag.* 195.

acu nautica gloriam non paucæ nationes ſibi comparare ſtudent, id inventum popularibus ſuis tribuentes.

III. Non defuere (*a*), qui vetuſtos ægyptios egregiam hanc magnetis facultatem noviſſe dicerent; quam quidem variis hieroglyphicis, atque ænigmatum formis occultaverint; ne vulgata ſcilicet lapidis huius præſtantia vileſceret. Favet opinioni huic non levis coniectura. Putant ſiquidem viri doctiſſimi ab ægyptiis manaſſe ſinas. Sinæ porro iam pridem in maritimis itineribus magnete duce utebantur.

IV. Phœnices, tyrioſque maritimis itineribus exercitatiſſimos in iiſdem itineribus curſum ſuum direxiſſe magnetis ope, teſtantur nonnulli (*b*), qui illis traditam fuiſſe aiunt virtutem hanc ab ſapientiſſimo viro aliquo, atque illo quidem contribule ſuo, vel, ſi vis, ægyptio: aut fortaſſe etiam a Salomone, dum, Hiramo imperante, ſociati hebræis phœnices, claſſes ingentes conſtruxere, earumque ope itinera ſuſcepere longiſſima, periculiſque refertiſſima. Neque vero [ſi his credimus] aliter ad tam diſſitas regiones curſum dirigere, neque toto fere terrarum orbe emporia conſtruere, & colonias ſtabilire iidem phœnices potuiſſent, uti re vera & conſtruxerunt, & ſtabilierunt.

Poſtrema hæc opinio, quæ ſcilicet phœnicibus a Salomone traditum vult magnetem, ſeu acum ipſam magneticam ſe ſe convertentem ad polum, viris eximiis plurimum placuit (*c*). Etenim, ſi hos audimus, rex iſte ſapientia & philoſophicarum rerum peritia reliquos homines longe ſuperans, dum claſſem in remotiſſimas regiones ſæpius miſit, acu nautica naulo tradita, eoque de eius virtute edocto, tutiorem reddidit, atque adeo breviorem illius curſum effecit.

V. Nonnulli, quibus perſuaſum eſt, præſtantiam lapidum nullam fuiſſe Ariſtoteli abditam, in eximii huius philoſophi libris verba quædam reperiſſe ſe monent, in quibus deſcribitur magnes, virtutem ſuam, qua ſe vertat ad polum, ferro

(*a*) *Ioannes Federicus Hervartus in libro inſcripto:* Admiranda ethnicæ theologiæ myſteria.

(*b*) *Fullerus lib.* 4 *miſcel. ſac. cap.* 19.

(*c*) *Vide quæ tradit Ioannes Albertus Fabricius biblio. art.* 2 *n.* 12 *pag.* 634, *ubi allegantur Fullerus, Pineda &c.*

ferro tribuens, ideoque apertiſſime traditur egregium illud inſtrumentum, quod *pyxidem nauticam* appellamus; quippe in ea concluſa, obfirmataque tenuis ferri lamella magnetica virtute imbuta ſe veluti ſponte ad polum vertit. En porro, quæ dixi, Ariſtotelis verba deſumpta ex libro, qui *De lapidibus* inſcribi ſolet. *Angulus magnetis cuiuſdam eſt, cuius virtus convertendi ferrum ad zorum* [hoc eſt ſeptentrionem]: *& hoc utuntur nautæ. Angulus vero alius magnetis illi oppoſitus trahit ad Aphron* [ideſt polum meridionalem], *& ſi approximes ferrum ad zorum, & ſi ad oppoſitum angulum approximes, convertit ſe directe ad Aphron.*

VI. Latinis haud ignotam nauticam acum propterea putant alii, quod verſiculos hos in Plauto (*a*) legerint.

Huc ſecundus ventus nunc eſt; cape modo vorſoriam
Hic favonius ſerenu' eſt, iſti, auſter imbricus.
Hic facit tranquillitatem, iſte omnes fluctus conciet.

Et rurſus alibi (*b*) .... *cape vorſoriam.*
Recipe te ad Herum &c.

vorſoriæ nimirum, ſeu *verſoriæ* nomine magneticam acum indicatam contendunt: hac quippe voce a Philoſophis, quorum linguam ſequi Plautus commode potuit, magnetica acus appellatur (*c*).

VII. Vult Goropius Becanus (*d*) a cimbris, ideoque a germanis accepiſſe reliquos europæos tam præclarum inventum, illiſque propterea debere nos eas, quibus nunc afflui-

---

(*a*) *In mercatore actu 5 ſce. 2 v. 34.*

(*b*) *In trinum: actu 4 ſce. 3 v. 19, & 20.*

(*c*) *Vide Muſſchenbroeck, & reliquos fere omnes Philoſophos.*

(*d*) *In Hiſpanicis lib. 3 pag. 29 edit. Plantini 1580.* = *Qui nauticam anemographiam delineant in pendula pyxidis tabula, magnetis vi perpetuo ad omnes mundi plagas directa, triginta duos ventos diſtinguunt, ſingulis quadrantibus octo ventos applicantes; quorum nomina omnia cimbrica ſunt, ſive linguæ teutonicæ, nobis inter ſcallim & moſam vernaculæ, propria: qua de re liquet cuias fuerit primus pyxidis, ad cuius normam clavus ferretur, inventor. Quotquot enim ſunt, qui triginta duo ventorum diſcrimina diſtinguunt, noſtratibus vocibus utuntur, ſive hiſpani ſint, ſive galli, ſive alterius nationis naucleri.*

fluimus, americæ, atque africæ, aſiæque opes, & pharmaca. Innititur vero [quod diſcimus (*a*) ex Pineda] iis ventorum, qui in pyxide deſcribuntur, nominibus: quippe cimbrica lingua ea eſt, qua notantur. Ii quoque germanis laudem hanc tribuunt, qui ab Alberto Magno omnium primo detectam hanc magnetis virtutem, & Ariſtotelis auctoritate firmatam, litteris etiam traditam fuiſſe aiunt.

VIII. Galli laudem hanc ſibi adſciſcunt. Ac primum quidem verba illa Ditmari proferunt (*b*): *Magdeburgi horologium fecit* [Gilbertus monachus, natione gallus, qui deinde Silveſter II Pontifex fuit] *illud recte conſtituens, conſiderata per fiſtulam quamdam ſtella nautarum duce.* Etenim ſic verba illa accipiunt, (*c*) ut horologium ſolare Gilbertus conſtruxerit, lineam meridionalem perquirens magnetico inſtrumento polum ſpectante.

Tum verſiculos hos adducunt, quos edidit Guiotus Provinæus [quem alii XII, alii XIII ſeculo vixiſſe aiunt] Poeta, ut ea ferebant tempora, præclarus.

Icelle etoile ne ſe muet,
Un art font qui mentir ne puet,
Par vertu de la Marinette,
Une pierre laide, & noirette,
Où li fer volontiers ſe joint &c.

In his nimirum verſiculis plane explicatur acus nauticæ vis, & niſus, conatuſque in polum. Quid? quod Ricciolus (*d*) nobilis aſtronomus, idemque italus, veritate ipſa compellente, docet, imperante Ludovico nono, gallos nautas ita acu nautica fuiſſe uſos, ut eam exiguo vaſe aqua ſemipleno veluti innatantem continerent: duabus vero fiſtulis, quibus innitebatur, caviſſe ne mergi poſſet. Atque hanc nau-

ticæ

(*a*) *De rebus Salom. lib.* 4 *cap.* 15 §. 4 *pag.* 203.

(*b*) *Lib. VI Chron.*

(*c*) *Maiol. coll.* 18 *de lapidibus pag.* 312 *editionis Moguntinæ anni* 1615. = *Sed & annos ab hinc ſexcentos Gilbertus vir gallus, qui poſtea in pontificatu romano Silveſtri ſecundi nomen conſequutus eſt, comperto, magnetis virtute, ſeptentrione, atque axe, apud Merſuxpum, horologium egregium inſtituerat.*

(*d*) *Geograph. & hydrograph. lib.* 10 *cap.* 18.

ticæ acus formam, valde quidem [uti res ipſa declarat] ab hodierna nobilitate, ac præſtantia deficientem, a gallis ait tranſiiſſe ad italos. An non etiam eam laudem gallis tribuit Cabeus, dum Petrum Peregrinum gallum ante trecentos, & amplius annos de acu nautica primum omnium ſcripſiſſe docet? (*a*)

Ad hæc: nauticæ acus auctores, inventoreſque gallos indicat ipſa eiuſdem acus vetuſta ſtructura; quippe priſca conſuetudo ita eam efformari iubebat, ut cuſpide, qua ſeptentrionem polumque monſtrat, lilium referret; ideoque gallici auctoris certam notam. Præterea vox ipſa *calamita*, quæ non modo ad magnetem ipſum, verum etiam ad ferrum, quod virtutem, qua ſe convertat ad polum, ex magnetis affrictu contraxit, denotandum ſæpe adhibetur, vox, inquam, *calamita* illam ipſam, quam nuper diximus, huiuſce inſtrumenti oſtendit originem. Etenim vox hæc *calamita* gallica lingua, ex qua procul dubio derivata eſt, *ranam* ſignificat *natantem*, ideoque & formam illam indicat, quam habebat nautica acus, antequam ſtylo in medio confixo ſiſteretur, & etymologia ipſa auctores innuit gallos. Miraris, Zanotte mi, tam ſubtilem, &, ſi ſuperis placet, ingenioſiſſimam probationem? At ſcito non modo gallos eam propoſuiſſe; (*b*) verum, quod magis miraberis, dudum ab italo ſcriptore fuiſſe traditam. Ille ipſe nempe Ricciolus, quem nuper allegavi, recitatis Guyoti Provinei [ut ipſe putat] notiſſimis verſiculis = *Icelle*

(*a*) *Primus, quod ſciam, Petrus quidam Peregrinus Gallus id poſteritati tradidit in quodam libello, ſeu potius epiſtola: ſic enim maluit eam auctor appellare &c. lib. I cap. VI pag. 23 Philoſophiæ magneticæ.*

(*b*) *Clariſſ. Menag. in orig. ital. ad vocem* calamita. *Più veriſimile è quella [derivazione] del P. Forniero Geſuita, il quale nell' undecimo della ſua Idrografia al capo primo ſcriſſe, che queſto vocabolo fu così detto dal franceſe* calamite, *ſignificante propriamente una ſpecie di ranocchio verde; perciocchè avanti che foſſe trovato il modo di ſoſpendere, e bilanciare nella buſſola l' ago toccato dalla calamita, ponevaſi con due picciole feſtuche in un' ampolla piena d' acqua, dove galleggiava, ovvero nuotava a guiſa d' un ranocchio.*

eſtoile ne ſe muet &c. ſcriptis hæc prodidit. *Quibus indicat, ad polum, & meridiani ſitum diſcernendum adhibitum fuiſſe vel ipſum magnetem, vel verſorium magneticum, cum roſa ventorum verſicolore,* Marinette *dicta, quæ cum aquæ innataret, videbatur rana quædam,* [gallice Grenouille verte] *quæ antiquitus gallis dicebatur* calamite, *unde nomen hoc ad italos manavit pro ipſo lapide magnete ſignificando.* (*a*) Denique ipſa ventorum nomina, quæ denotata habet pyxis in ora, ex gallica lingua originem habent. Quis enim gallicas neget voces has *nord, ſud, eſt, oueſt?*

IX. Ne hac ipſa laude fraudarentur luſitani, effecit gallici ſcriptoris diligens cura, Regnaultii ſcilicet, (*b*) philoſophi valde laudabilis; quippe nauticam pyxidem aut inventam, aut certe ita a luſitanis excultam, auctamque fuiſſe ait, ut hos merito auctores illius facias.

X. Italos eximiam hanc magnetis virtutem europæos reliquos edocuiſſe, ii tradunt, qui Marcum Polum venetum diu apud aſiæ populos incolam, eam, quam prædicamus magnetis facultatem, a ſinis edidiciſſe, eiuſque uſum in europam induxiſſe aiunt; ii quoque, qui a venetis mercatoribus, qui per ea tempora ad indos uſque, atque adeo per erithræum ad ſinas ipſos pervenire conſueverant, in italiam delatam putant nauticam pyxidem; quamobrem inventionis laudem Sinis quidem hi facile tribuunt, at virtutis huius, ut ita appellem, manifeſtationem, & apud noſtrates uſum, venetis adſciſcunt.

Italis pariter gloriam hanc tribuunt ii, qui acum nauticam aut primo obſervatam, aut certe elaboratam perfectamque fuiſſe aiunt a Gira, ſeu Gioia patria amalphitano, quem Flavium plerique, Ioannem alii appellant: hinc notiſſimus ille verſiculus,

Prima dedit nautis uſum magnetis amalphis,

cui affinis eſt alius æque notus.

Inven-

(*a*) *Ricciol. Geogr. lib. x cap.* 18 *pag.* 455.

(*b*) *Tratten. xvi pag.* 209 *tom.* 1. *Queſto fenomeno, Eudoſſo, richiama al mio ſpirito l' obbligazione, che ha tutto il mondo a' Portugheſi, i quai l' Indie ſcoprir volendo, trovarono, o perfezionarono almeno una coſa più ſtimabile delle ſteſſe ricchezze dell' Indie, voglio dire la buſſola.*

Inventrix præclara fuit magnetis amalphis.

XI. Angli tamen præripere nationibus reliquis laudem hanc ſtudent, fatentes ſcilicet primordia huiuſce præclariſſimi inſtrumenti, quod italice *buſſola* appellant, apud populos alios fortaſſe exſtitiſſe [eſt quippe, ſi Anglos audis, eorum ſententia valde probabilis, qui Rugerio Baconio anglo inventum hoc tribuunt] (*a*): at ſe provexiſſe, atque adeo perfeciſſe aſſeverant, quod rude, impolitumque ab aliis acceperant: quod niſi peregiſſent, leviſſimum fuiſſet ex detecta hac magnetis virtute, & ex inventa acu nautica emolumentum. Propterea itaque ſe illius auctores vocant, quod polierint, promoverint, auxerint, perfecerint denique id, quod ante eorum laborem, & ſtudium, aut neglectum fortaſſe erat, aut certe non multum habens utilitatis. Illud ergo inſtrumentum, quod *buſſola* vulgo dicimus, aut *nautarum circulum* [*cerchio, o compaſſo de' marinari, o ſia cerchio fatto a compaſſo*] a contribulibus ſuis profectum angli volunt: quod palam indicatum aiunt nominibus iis ipſis, quibus huiuſmodi inſtrumentum appellamus: *Boxel* quippe, & *mariner s' compaſs* anglicæ linguæ voces ſunt, quas reliqui populi retinentes, ſanceque ſervantes [licet, ut linguarum genio aliquatenus indulgerent, non nihil immutarint] manifeſto declarant, a quibus rem ipſam acceperint.

XII. At adhuc quidam ſunt, qui a tanta opinionum diverſitate, ac multitudine territi vel ancipites hærent, nullumque ſe inveniſſe aiunt, quem tam nobilis inventi auctorem pronuncient, vel, ut in aliis inventis ſane non paucis, ita & in detegenda hac magnetis facultate, elaborandaque magnetica acu, ſenſim profeciſſe aiunt homines, adeo ut dividi in plurimos ea laus debeat.

XIII. Habes, præclariſſime Zanotte, nobiliores hoc de argumento ſententias; ſed quoniam a me, quod ſentio, proferri vis, ſtatim profero, ea tamen conditione [quod ab initio dixi] ut tu, ſi quid minus probabis, candide

Vu 2 reii.

(*a*) *Derham in demonſtr.* eſſentiæ & attributorum Dei *lib. V cap. I pag.* 278 *edit. Florent. Fabricius quoque cap. XXI Bibliogr. n.* 12 *pag.* 635 *hæc ſcriptis mandavit:* Gilbertus Peregrinum e Rogeri Baconi ſcriptum ſuffuratum teſtatur &c.

reiicias, & apertiſſime; neque enim audacter, & animoſe hac in controverſia quicquam certi ſtatuere audeo, ſed ea tantum tibi veluti amico, atque adeo iudici propono, quæ veriſimiliora arbitror, & veritati propiora.

XIV. Pauci porro, ut puto, erunt, qui ægyptiis affirment, eam, de qua agimus, magnetis, acuſve nauticæ præſtantiam fuiſſe notam. An non ea fuiſſet deinceps nota phœnicibus, & græcis, qui pleraſque artes, & ſcientias ab ægyptiis didicerunt, eaſque deinceps edocuerunt latinos, & nationes romanis ſubditas? Phœnicibus tamen, ac græcis quoque, & latinis, atque occidentalibus nationibus omnibus fuiſſe eam abditam, ex eo maxime aſſequimur, quod nemo veterum huiuſce magnetis virtutis meminit, tametſi non pauci varias magnetis vires, facultateſque deſcripſerint, & ea retulerint, quorum ope nautæ ſuos dirigerent curſus: quod deinceps apertius oſtendam.

XV. At, a quibus, inquis, hanc magnetis præſtantiam edidicere ſinæ, ſi ab ægyptiis, a quibus derivantur, non didicere?

Multa ad ſolvendum valde difficilia brevis hæc interrogatio proponit, quæ ſi velim ſingula fuſe, accurateque perſequi, vereor ne epiſtolæ modum ac rationem excedam. Complectar tamen, ut potero, paucis ea, quæ ad præſens inſtitutum neceſſaria eſſe arbitrabor.

XVI. Sinas ab ægyptiis derivatos fuiſſe cenſent nonnulli, inter quos doctiſſimus Huetius (*a*) eminet, hiſce rationum momentis permoti. Iidem fere ſunt utriuſque nationis mores, & ritus. Si duplici litterarum genere utebantur ægyptii, ſacro uno, itemque abdito, profano altero, & vulgato; id & præſtant ſinæ. Lingua, qua nunc utuntur ſinæ, affinis valde illi eſt, qua utebantur ægyptii. Quin ſi vacca ab ægyptiis colebatur, a ſinis pariter colitur. Metempſicoſis errore utraque natio ducitur. Exteros quoque utraque natio averſatur maxime (*b*).

At

(*a*) *Commerc. antiqu. cap.* 10.

(*b*) *Olim ægyptios exteris maxime fuiſſe infenſos, tradit Strabo lib.* 17. *En illius verba latine expreſſa.* Enimvero primi ægyptiorum reges ſuis contenti opibus, nec importata aliunde magnopere deſiderantes, omnibus exteris navigantibus eo

At non propterea tanti hæc facio, ut ſinas ægyptiorum progeniem cenſeam. Simillimum veri eſt, orientales multos, atque eos præſertim, qui cultiores, & litteratiores reliquis erant, duplici litterarum genere fuiſſe uſos, ſacro uno, profano altero. Hoc de argumento copioſe diſputat Bochartus (*a*), quem, opto, conſulas. Bocharto Tavernerium iunge de ſacra Braminum lingua ſcribentem (*b*). Quis tamen nationes iſtas inter ægyptiorum nepotes, & ſobolem recenſeat? Ceterum valde diſtat forma characterum illorum, quibus ſinæ utuntur, ab forma illorum, quos ab ægyptiis adhibitos novimus (*c*). Hinc ſi ex characterum formis originem coniicere vis, plane diverſos utriuſque nationis parentes, atavoſque fateberis. Animoſa porro perſuaſio ea fuit, qua ſe duci permiſit vir eruditiſſimus, dum affinem tradidit utriuſque nationis linguam. Plane noſcat, oportet, & funditus utramque linguam, qui de huiuſmodi affinitate iudicare ſapienter velit. An vero plane callebat Huetius ſinenſem, & vetuſtiſſimam ægyptiorum linguam; iis nempe temporibus uſitatam, quibus ab ægypto evulſa eſt portio civium aliqua, ut ſinas incoleret?

In vaccarum cultum ſinas [ſi generatim loqui volumus] eſſe propenſos, nemo, quem legerim, tradit, tametſi varios evolverim, qui de eorum moribus, ac ritibus agunt. Metempſicoſi quoque addictos eſſe (ſi generatim hic quoque loqui volumus) minime ii docent, quos nuper allegavi ſcriptores,

---

infenſi erant, maxime græcis, qui ob ſoli penuriam populari, atque appetere aliena ſolebant: *pag. 792 edit. Pariſ. 1620. Id de ſinis quoque teſtantur hiſtorici omnes, veluti Torſellinus in Vita S. Franciſci Xaverii lib. V &c.*

(*a*) *In geographia ſacra lib. 2 Chanaam cap. 17.*

(*b*) *Parte 2 itinerar. pag. 171.*

(*c*) *Sinenſes vero neque literis utuntur, neque facile concipiunt, quomodo fieri poſſit, ut tam exiguo numero characterum, quorum ſinguli nihil ſignificant, exprimere, atque ſcripto conſignare poſſimus tot, tamque diverſas animi noſtri conceptiones; & quæcumque ore eloqui valemus . . . . . . Quomodo ſinenſium characteres differant ab hieroglyphicis ægyptiorum, diſquirit Kircherus tomo 3 Oedipi. Hactenus Fabricius cap. 21 bibliogr. pag. 630.*

ptores, quos tamen diligentes ac peritos agnovimus. Ceterum ſi ex hoc argumento, ac nota ſeros ægyptiorum nepotes dignoſcere vis, pleroſque aſiæ populos ab ægyptiis derivatos fuiſſe docebis: vaccas enim colunt, & animas ex una animante, dum moritur, in alterius corpus pertranſire contendunt (*a*).

Sinas olim a portubus ſuis, ac regionibus omnibus exteros expuliſſe, ultro fateor; ſed neque hæc ægyptiis per ætates omnes indita barbaries fuit, ac fera conſuetudo: (*b*) neque hic ægyptiorum tantummodò, ſinarumque mos fuit, adeo ut eo indicio utriuſque populi originem dignoſcere certo poſſis. Quin plane novimus ad noſtra uſque tempora moſchos adeo infenſos fuiſſe exteris, ut neminem paterentur ſine capitis periculo ditionis ſuæ fines ingredi. Eæ ſcilicet nationes, quæ aut penu ſua ſe vivere poſſe putant, aut inſidias ab exteris metuunt, aut etiam verentur, ne opibus patrii regni ditentur advenæ, principumque favore, dignitatibus augeantur, eoſdem exteros, ſi poſſunt, arcent, & a finibus ſuis eiiciunt. Atque id ſane experimento ſuo comprobavit Huetius ipſe, cuius verba hic deſcriberem, niſi & multa eſſent, & a præſenti inſtituto alieniſſima (*c*). Coniecturam porro multo graviorem attuliſſet clariſſimus Huetius, ſi circumciſionis ritum a ſinis obſervatum oſtendiſſet: illi enim tenaciſſime adhæſere ægyptii, atque adeo orientales populi ſane non pauci (*d*), a quibus proinde, ſi manaſſent ſinæ, avitum hunc morem retinuiſſent. Si itaque eum minime ſervant, ille, ut puto, minime errabit, qui priſcos ſinarum parentes ab ægyptiis valde diverſos affirmabit.

Sed

(*a*) *Vide quæ tradit le Gendre* de l' opinion *tom.* 1 *lib.* 3 *cap.* 1 *n.* 4 *pag.* 219, *&* *rurſus cap.* 4 *n.* 18 *pag.* 300. Les Brachmanes des Indes &c. *Vide etiam quæ tradit Iovat to.* 2 *pag.* 152, *&* 194 *editionis italicæ.*

(*b*) *Conſule quæ Strabo lib.* 1 *de Menelao ab ægyptiis, & æthiopibus regali hoſpitio excepto, & muneribus donato docet pag.* 38, 39, *&* 40 *editionis pariſienſis* 1620.

(*c*) *Eius verba in commentario* De rebus ad ſe pertinentibus, *legat obſecro lector lib.* 2 *pag.* 46.

(*d*) *Calmet in peculiari diſſertatione.*

Sed demus, quod libet, ſinaſque ab ægyptiis profluxiſſe fateamur. Demus quoque ſinas iam dudum magnete, acuque magnetica curſus ſuos mari provectos direxiſſe. An non eam potuerunt ſubſequentibus ſeculis aut invenire ipſi, aut ab aliis addiſcere? Id utique, ſi ſapis, fateberis. Quot enim aut invenimus parentibus noſtris, aviſque abdita, aut ab aliis aſſequimur, quæ deinceps excolimus & perficimus?

XVII. At tu, Zanotte doctiſſime, a me expoſcis, quid tandem de ſinis iudicem, quos quidem nautici inſtrumenti inventores fuiſſe plerique aſſerunt, obſiſtentibus tamen aliis, quorum auctoritas ſumma eſt. Me oratio deficiet, ſi eos omnes recenſere ſtudebo, qui acum nauticam apud ſinas iam dudum in uſu fuiſſe aiunt. Nonnullos indicabo (*a*), quos tu, ſi vis, conſule. Horum porro, ac præſertim Patris Societi, & Huetii auctoritas, (prior enim diligenter conſuluit ſcripta, ac vetera monumenta ſinarum, alter vero ea narrat, quæ conſtans fama falſa eſſe non ſinit) horum, inquam, auctoritas obiicienda eſt auctoritati Kircheri, aliorumque paucorum, qui ſinis laudem hanc demunt, propterea quia *fabuloſa videntur eſſe, quæ de adhibita ſinis multis ab hinc ſeculis magnetica pyxide narrantur; & nullus ſcriptorum ſinarum, quos hi conſuluerunt, eorum inventæ acus magneticæ meminit; nullus quoque qui ex ſinico imperio ad noſtras regiones devecti ſunt, quos pariter hi conſuluerunt, noverit magnetica acu in maritimis uti nunc ſinas.*

Noſtra ſane non intereſt hic ſedulo perquirere, num anti-

(*a*) *Fournier hydrogr. lib. xi cap.* 1.
Menagius orig. ling. ital. *ad vocem* calamita.
Societ obſerv. mathem. aſtronom. &c. deductæ ex libris ſinenſibus.
Le Gendre de l'opinion *tom.* 2 *lib.* 4 *cap. ix n.* 56 *pag.* 83.
Huetius de commerc. cap. 10 *pag.* 24 *editionis italicæ.*
Auctor librorum illorum, qui ſpectaculum naturæ *inſcribuntur, tom.* 8 *edit. italicæ.*
Iſaacus Voſſius variar. obſerv. cap. 14. *Quibus, ſi vis, adde quæ ex probatis auctoribus didicit, ſcriptiſque prodidit Fabricius:* (*Biblioth. cap.* 21 *n.* 12 *pag.* 635) *videlicet* Vaſcum Gamam, qui primus detexit promontorium bonæ ſpei, incidiſſe in naves barbarorum, quibus acus magneticæ uſus foret.

antiquiſſimus, plurimaque numerans ſecula ſit apud ſinas magneticæ pyxidis uſus. Probabilis ſane eorum opinio eſt, qui ante Chriſtum natum adhibitam magneticam pyxidem a ſinis aiunt, ſed fac multo recentiorem fuiſſe apud illos. Mihi ſatis eſt ſi dederis (quod tamen multorum, eorumque valde diligentium ſcriptorum teſtimonio compertiſſimum videtur fieri) diu ante europæos magnetica acu uſos fuiſſe ſinas. Tunc porro ſtatim diluis cetera. Ignoraverint, ut libet, ii, quos conſuluit Kircherus, [de cuius auctoritate vide, obſecro, quæ tradit Huetius (*a*)] aliique, ſi qui ſunt, qui laudem hanc ſinis invident, ignoraverint, inquam, ſinas ſcriptores, qui hæc litterarum monumentis conſignaverint. An propterea deneganda fides iis eſt, qui hæc enarrarunt? Minime vero: multa enim, ut quiſque novit, a probatis etiam ſcriptoribus omittuntur, quæ alii tamen tradidere. Illud certo conſtat, uti nunc etiam ſinas, utpote veterum morum retinentiſſimos, acu nautica non fixa obfirmataque, ſed natante & fluxa, ad eum modum, quo traditum eſt, uſos fuiſſe eos, qui ex aſia præſtans hoc inſtrumentum deduxere in europam (*b*).

XVIII. Dicant porro quod libet, qui phœniciis & tyriis notam fuiſſe contendunt eam, de qua agimus, magnetis vim. Ego ſane multo aliter ſentio, ſentiamque iugiter, donec ſcilicet non levibus coniecturis, ſed validis, firmiſque argumentis oſtendant phœniciorum, tyriorumque fautores, ea itinera ab iiſdem phœniciis & tyriis fuiſſe ſuſcepta, quæ ſine tam egregio inſtrumento ſuſcipi non potuiſſent, & in his itineribus eo re ipſa fuiſſe uſos. At qui eorum itinera deſcribunt, ita deſcribunt, ut facile aſſequaris, potuiſſe ea peragi ſine magnetis, & nauticæ acus commodo; & eos conſuetam veteribus reliquis navigandi rationem fuiſſe ſecutos: ita ſcilicet, ut diu ſe alto non fiderent, ſed littori plerumque adhærerent, portumque ſæpiſſime tenerent. Certo quoque novimus ſtellas tantum conſuluiſſe, dum navigarent, & præ

(*a*) *De rebus ad eum pertinentibus pag.* 65.

(*b*) *Furnerius*, *&* *Menagius locis nuper allegatis*. *Rurſus auctor* Spectaculi naturæ *loco nuper allegato*. Altri vogliono dar queſt' onore ai Cineſi &c. *Vide quæ numero* XXV. *afferentur*.

& præ ceteris minorem urſam. Aratus, & ex eo Cicero (*a*)

Hac fidunt duce nocturna phœnices in alto.

Ovidius quoque (*b*)

Magna minorque feræ, quarum regis altera graias,
Altera ſidonias, utraque ſicca, rates.

Non me latet Levinum Lemnium, alioſque præclaros viros, quos ſequitur doctiſſimus Pineda (*c*), veterum teſtimonia allegare, quibus ſignificetur & ultra fretum gaditanum phœnices navigaſſe, inſulas quoque magnas inveniſſe, atque incoluiſſe; & horum quidem exemplo non littoribus tantum adhæſiſſe deinceps nautas, ſed alto ſe commiſiſſe. An id [inquiunt] auſi fuiſſent, ſi nautica pyxide caruiſſent?

Sed non propterea a ſententia recedo. Quæcumque de phœnicum remotiſſimis navigationibus tradidere Strabo (*d*), Arrianus, aliique vetuſti ſcriptores, veluti veriſſima excipio: quamvis noverim in dubio ea poni a recentioribus non paucis. Quid tum denique? niſi ut fatear potuiſſe phœnices, alioſque phœnicum exempla ſecutos populos, audere aliquid, quod noſtri fortaſſe, niſi acu magnetica iuvarentur, non auderent. Inſulas, quas extra fretum gaditanum navigantes repererunt, ſi quis dicat eas fuiſſe, quas nunc *azorides*, aut *canarias* vocamus, rem valde veriſimilem dicet. Fac tamen remotiorem aliquam, immo, ſi vis, americæ portionem aliquam minus ab hiſpaniis remotam eos inveniſſe; quid aliud obtines, niſi, quod facile dabo, veteres aliquando, ſeu caſu, ſeu procellarum, ventorumque vi, ſeu, temeritate etiam aliqua, eo fuiſſe deductos, quo alii ferri non potuere?

Ii porro, qui alto ſe commiſere, non acum nauticam itineris, audaciæque ſuæ ducem habuere, ſed ventos definito aliquo anni tempore conſtanter ſpirantes. Arrianus ſane (*e*) hæc de Hippalo tradit. *Primus Hippalus gubernator animadverſo emporiorum ſitu, ac maris figura, invenit navigationem per altum mare eo tempore, quo ſpirant ex oceano apud nos eteſiæ, in indico vero mari libonotus.*

(*a*) *Parte x operum pag.* 617.
(*b*) *Triſtium lib.* 4 *initio elegiæ* 3.
(*c*) *De rebus Salom. lib.* 4 *cap.* 15 §. 5 *pag.* 202, *& ſeq.*
(*d*) *Lib.* 1. (*e*) *In Peripl. mar. eryth.*

Quamquam ii ipſi, qui alto ſe committebant, non ita videntur ſe alto commiſiſſe, uti nunc ſe committunt, qui gaditano freto egreſſi, in occidentales, aut orientales indias navigant, ſed ita, ut paulo audaciores eſſent iis, qui littoribus iugiter adhærebant, & portus ſæpiſſime capiebant. Ceterum hi quoque portus crebro petebant, nec multorum menſium in alto ſuſtinebant navigationem. Hoc modo Æneas, qui paulo ante hæc dixerat (*a*),

feror exſul in altum
Cum ſociis, natoque, penatibus, & magnis dîs.

& deinceps (*b*)

Dant maria, & lenis crepitans vocat auſter in altum.
Deducunt ſocii naves, & littora complent:

proxime poſt hæc ſubdit (*c*).

Huc feror, hæc feſſos tuto placidiſſima portu
Excipit: egreſſi veneramur Apollinis urbem.

nec aliter accipiendi ſunt eiuſdem Virgilii notiſſimi verſus (*d*)

Vix e conſpectu ſiculæ telluris in altum
Vela dabant læti
.... medium Æneas iam claſſe tenebat
Certus iter (*e*).

Quid? quod minime latere potuiſſet reliquos populos tam præſtans magnetis virtus, ſi eam noviſſent phœnicii gubernatores, & nautæ. Tamen nullus plane veterum de ea meminit, ſed vel avium volatum (*f*), vel ſtellas tantummodo comminiſcun-

---

(*a*) *Æneid.* 3 *v.* 11. (*b*) *ibid. v.* 70. (*c*) *v.* 78.
(*d*) *Æneid.* 1 *v.* 34. (*e*) *Æneid.* 5 *v.* 1.
(*f*) *Martian. Capell. lib. VI ſub titulo de* India.
Pineda de rebus Salomon. lib. 4 *cap.* 15 §. 5, *ubi allegat Plinium libro VI cap.* 22, *& Solinum cap.* 56, *quos conſule.*
Alia hic non affero, quippe, ſi cuncta referre vellem hanc in rem apta teſtimonia, infinitus propemodum eſſem. Si quis tamen alia adhuc optat, ecce tibi *Virgilium* 5 *Æneid. verſ.* 852.

.... clavumque affixus, & hærens
Nuſquam amittebat, oculoſque ſub aſtra tenebat.

Rurſus lib. 3 v. 204.

Erramus Pelago: totidem ſine ſidere noctes.

& in Georg. lib. 1 v. 137

ſcuntur, quæ iidem nautæ conſulerent. Hinc Virgilius de Palinuro. (*a*)

Qui lybico nuper curſu, dum ſidera ſervat,
Exciderat puppi mediis effuſus in undis.

An omiſiſſent commodum illud, quod in maritimis itineribus ex magnete, acuque magnetica percipitur, ſi illud noviſſent, quando quidem toties inculcant ſtellas huiuſmodi curſuum duces?

At ſaltem non omiſiſſent præclaram hanc magnetis præſtantiam, quum diligenter de eodem magnete diſſererent, illiuſque facultates adducerent. Omiſerunt tamen, dum præſertim vim illius ferri attractricem deſcriberent. Hanc profecto veteribus græcis fuiſſe notam, ea declarant, quæ magnus vir Gaſſendus illorum teſtimoniis aut adductis, aut certe indicatis, ſcripſit (*b*). An vero latinis notam dicere quis audebit, poſtquam Lucretium copioſiſſime de magnete diſſerentem audierit, (*c*) eximiam hanc tamen magnetis facultatem ſilentio prementem?

Ne tamen videar unius Lucretii ſilentio fidere. En tibi Plinium (*d*): *Quid lapidis rigore pigrius? ecce ſenſus, manuſque tribuit illi. Quid ferri duritia pugnacius? ſed cedit, & patitur moras: trahitur namque a magnete lapide, domitrixque illa rerum omnium materia ad inane neſcio quid currit: atque ut propius venit, aſſiſtit, tenetur que, & complexu hæret.*

Nec minus eleganter ac feſtive, ornateque de magnete Claudianus (*e*)

Ex ferro meruit vitam, ferrique rigore
Veſcitur, has dulces epulas; hæc pabula novit.

— — — — — — — — — — —

Xx 2 Pro-

Navita tum ſtellis numeros, & nomina fecit.

Tibullus porro lib. 1 eleg. 9 v. 10.

Ducunt inſtabiles ſidera certa rates.

Etiam Petronius Arbiter Satyric. pag. 361 edit. Amſte. 1669.

Gubernator, qui pervigil nocte ſiderum quoque motus cuſtodit &c.

(*a*) *Lib. 6 Æneid.* v. 358.

(*b*) *Philoſoph. Epicur. tom. I pag.* 192, & 193, & *tom. II oper. pag.* 122 &c.

(*c*) *Libro VI v.* 979.

(*d*) *Lib.* 36 *cap.* 16.

(*e*) *In epigramm.*

Pronuba ſit natura deis: ferrumque maritat
Aura tenax: ſubitis ſociantur numina furtis.
Quis calor infundit geminis alterna metallis
Fœdera? quæ duras iungit concordia mentes?
Flagrat anhela ſilex: & amicam ſaucia ſentit
Materiem: placidoſque chalybs cognoſcit amores.

At quis veterum, amores eos comminiſcitur, quibus ardeat magnes polum iugiter ſpectans, & ad eum veluti anhelans?

XIX. Quod de Salomone comminiſcuntur, vocat nos ad celebrem illam diſquiſitionem, quæ viros doctiſſimos diu exercuit, exercebitque fortaſſe etiam impoſterum: quænam ſcilicet ſint eæ regiones, quas *tharſis & ophir* ſacra Scriptura appellat. In hoc argumento libentiſſime verſarer, ſi præſens inſtitutum, atque epiſtolæ modus ferret. Conſule, ne cuncta indicem, quæ hac ſuper re ſcripſit laudatiſſimus Huetius (*a*): atque ex iis [niſi multum fallor] aſſequeris, errare eos, qui remotiſſimas inſulas, ad quas Salomonis & Hirami claſſes tenderent, fuiſſe cenſent. Quod ſi paucis perſtringere me vis, quod eo de argumento ſentiam; ſtatim habe. Ophir & tharſis ea procul dubio ſunt loca, ad quæ Salomonis claſſes ferebantur. De ophir quidem hæc tradit ſacer auctor (*b*) *claſſem quoque fecit rex Salomon in aſiongaber, quæ eſt iuxta ailath in litore maris rubri in terra idumææ. Miſitque Hiram in claſſe illa ſervos ſuos, viros nauticos gnaros maris cum ſervis Salomonis. Qui cum veniſſent in ophir, ſumtum inde aurum quadringentorum viginti talentorum detulerunt ad regem Salomonem.* Hoc idem narrans ſcriptor Paralipomenon (*c*) Salomonem, ait, Aſiongaberem & Ailathum adiiſſe, claſſis huius viſendæ cauſa; tum hæc ſubiicit; *miſit autem ei Hiram per manus ſervorum ſuorum naves & nautas gnaros maris, & abierunt cum ſervis Salomonis in ophir.* Et hæc quidem ad iter in regionem ophir ſuſceptum pertinent. Aliud iter in tharſis inſtitutum, reditumque navium Salomonis ex ea regione declarant ſubſequentia (*d*), *claſſis regis per mare cum claſſe Hiram ſemel per tres*

(*a*) *In peculiari libello, quem* De navigationibus Salomonis *inſcripſit.* (*b*) *3 Reg. 9, 26, & ſeq.*
(*c*) *2 Paralip. 8, 16, & ſeq.* (*d*) *3 Reg. 10, 22.*

tres annos ibat in tharſis. = (*a*) *Naves regis ibant in tharſis cum ſervis Hiram ſemel in annis tribus: & deferebant inde aurum &c.* Atque ex his quidem verbis aſſequeris, tribus annis completum tandem fuiſſe iter claſſis illius, quæ dirigebatur in tharſis, longe vero breviori ſpatio [unius ſcilicet anni] iter claſſis illius, quæ pergebat in ophir.

Porro ſi Danieli Huetio, quem omnes ingenioſiſſimum, eumdemque doctiſſimum norunt, fidem habes, multo propiores regiones hæ Iudææ erant, quam vulgus ferat, ideoque minime indigebant novi illius inventi, quod Salomoni ſcriptores nonnulli tribuunt. Et ſane pyxide nautica non eguit ea claſſis, quæ ſingulis annis eo reſtituebatur, unde diſceſſerat: romanæ enim & græcæ claſſes itinera hæc, & multo longiora conficiebant ſine magnetica pyxide. At neque ea eguit, quæ poſt tres tantum annos ſe iterum pelago committebat: erat quippe per id tempus ea navigandi ratio, ut nec multum a littore abeſſent naves, nec alto fiderent, ſed ſæpiſſime portus appellerent, in quibus menſes integros, atque adeo tota hyeme permanerent. Porro maritima itinera hoc inſtituto ſuſcepta, peractaque, etiam ſi viginti annis complerentur, nautica pyxide minime indigent. Quamquam niſi nos Huetii auctoritas, & probabilis coniectura decipit, duobus annis revera perficiebatur iter ſuſceptum in tharſis: tertius vero annus tribuebatur reficiendis, onerandiſque navibus, tyriis ad patrios lares remittendis, atque inde revocandis, & ad novum iter præparandis, aliiſque huius generis, quæ integrum ſane annum expoſcunt (*b*).

Quod ſi Scripturæ verba penitius inſpiciamus, ac diligen-

(*a*) 2 *Paralip.* 9, 21.

(*b*) Huetii verba utpote valde apta omittere nolui: quia tamen multa, in paginæ calce collocanda ea duxi. *Iter autem illud ſic puto temporibus dividendum, ut annus unus poneretur in abitu, alter in reditu, tertius reficiendis poſt reditum navibus, inſtruendis, onerandis; inſtitorum & nautarum quieti, mercibus diſtrahendis, phœnicibus tyrum remittendis, atque inde revocandis, & ad novum iter comparandis. Valde autem falletur, ſi quis veterum navigationes, & nauticæ artis notitiam ex noſtra ætate æſtimet. Magneticæ pyxidis uſus homines noſtros &*

gentius, manifeſto perſpicies claſſem Hiram, & iam pridem hiſce itineribus fuiſſe aſſuetam (*a*), & magiſtros veluti fuiſſe claſſiarios Hirami claſſiariorum Salomonis (*b*): & hinc fortaſſe aliquando *ſimpliciter claſſis Hirami* vocatur ea ipſa claſſis, quæ iunctos habebat, & ſocios hebræos ſubditos Salomonis (*c*). Iuſſerat ſcilicet Salomon ſubditos ſuos, utpote imperitos, parere ſubditis Hirami, viris iam pridem mari aſſuetis, & in nautica facultate dudum exercitatis; item fere ut propterea, quia in cædendis lignis ſidonios Hirami ſubditos peritiſſimos noverat, (*d*) iuſſerat hebræos ſuæ ditioni ſub-

audentiores, & peritiores effecit. Navigare audent noctu, in tenebris, nubilo cælo; olim adventante nocte ancoras iaciebant. Obliquos excipiunt ventos, ac fere adverſantibus auris iter peragunt; olim rectis tantum, ac puppim ferentibus. Navigiorum mole, & nautarum induſtria tempeſtates domant, quibus olim fere deprimebantur. Vaſta tranſmittunt æquora, ignotas ſcrutantur terras; nullus locus, nulla gens audaciæ ipſorum inacceſſa eſt; vix e conſpectu telluris abſcedebant olim, ac vix ullam iis aditam regionem reperias, quam quæ terris iam inventis coniuncta erat. Unde omnes litorum receſſus, ſinus omnes neceſſe erat emetiri. Aperte enim tradit auctor peripli erythræi, non aliter olim in indiam navigaſſe ægyptios, quam ſinus & litora exiguis navigiis circumeundo. Quod & ad reliquas itidem navigationes pertinere cenſendum eſt. De navigation. Salom. cap. 8 n. 3.

(*a*) *Sed & claſſis Hirami, quæ portabat aurum de ophir, attulit ex ophir ligna thyina multa nimis.* 3 Reg. 10, 11, 14 — *Quia claſſis Tharſis regi erat in mari cum claſſe Hiram.* 1 Reg. 10, 22. *Claſſis regis per mare cum claſſe Hiram ſemel per tres annos ibat in Tharſis.* 3 Reg. 10, 22.

(*b*) *Miſitque Hiram in claſſe illa ſervos ſuos viros nauticos gnaros maris cum ſervis Salomonis, qui cum veniſſent in ophir, ſumptum inde aurum quadringentorum viginti talentorum detulerunt ad regem Salomonem.* 3 Reg. 9, 25 &c.

(*c*) *Sed & claſſis Hiram, quæ portabat aurum de ophir &c.* 3 Reg. 10, 11, 22.

(*d*) *Præcipe igitur, ut præcidant mihi ſervi tui cedros de libano, & ſervi mei ſint cum ſervis tuis ..... ſcis enim, quomodo non eſt in populo meo vir, qui noverit ligna cædere ſicut ſidonii.* 3 Reg. 5, 6.

ſubiectos ſidoniorum regimini, & directioni ſubeſſe, & obſequi.

Quamvis itaque, ſi vis, ſciverit Salomon, & plane noverit eam, de qua agimus, magnetis virtutem [quo de argumento hic ſi diſputavero, rem agam ab inſtituto meo alieniſſimam: & iam pridem monuere ſcripturarum interpretes dubitari merito poſſe, num plane omnes noverit Salomon, penitioreſque lapidum, herbarumque virtutes, cum Scriptura non raro hyperbole utatur, quæ fortaſſe etiam latet in verbis his: *neque erat verbum, quod latere poſſet regem*] quamvis, inquam, ſi vis, eam de qua agimus, magnetis virtutem ſciverit Salomon, indubitata tamen res eſt, ea minime in his navigationibus fuiſſe uſum, neque eam edocuiſſe ſive hebræos, ſive ſidonios. An ſi eam docuiſſet hebræos, neglexiſſent ii navigationem, quam Salomone rege experti fuerant ſibi utiliſſimam, & quam commodiſſimam comprobaſſent, ſi magnetis, acuſque nauticæ facultatem plane noviſſent? Tamen Salomone defuncto neglexerunt plane navigationem, neque ea de re diu cogitarunt; donec ſcilicet rex Ioſaphatus eorum emolumentorum memor, quæ hebræi, Salomone imperante, ex claſſe conſtructa perceperant, claſſem alteram apparavit, eamque in ophir dirigere in animo habuit, aurumque ex ea regione deducere; quod tamen perficere minime potuiſſe accepimus ex ſacro ſcriptore (*a*).

XX. Venio ad Ariſtotelis locum. Num liber ille, qui *de lapidibus* inſcribitur, & a quibuſdam non contemnendis viris Ariſtoteli tribuitur, reipſa Ariſtotelem auctorem habeat, an non, diſſidium non leve eſt. Plerique Ariſtoteli abiudicant. Neque illos obiecta Alberti Magni auctoritas movet: temere enim, inquiunt, Alberto Magno tribuitur liber ille, qui *de mineralibus* inſcribitur, ex quo verba iam allegata deſumpta ſunt; cum putidiſſima contineat, atque arabum, immo aſtrologorum, & necromantum ſtudiis mirum in modum faventia (*b*). Hinc ab ea operum Ariſtotelis editio-

(*a*) *Ioſaphatus fecit naves tharſis, ut irent in ophir auri gratia: & non ivit, quia confractæ ſunt in aſiongaber.* 3 Reg. 22, 49.

(*b*) Videantur præ ceteris, quæ traduntur tractatu 3 cap.

tione, quam lugduni apparavit Ioannes Frellonius, abeſt liber ille, de quo diſputamus. At le Gendre, aliique viri clariſſimi minime curantes, num iure, an iniuria Alberto Magno tribuatur liber ille, qui *de mineralibus* inſcribitur, quod ad Ariſtotelis librum attinet, Laertii auctoritate innixi, minime dubitant ita rem componere, ut inſcriptum *de lapidibus* librum, pronuncient re vera fuiſſe ab Ariſtotele compoſitum, & ab arabibus inventum, nonnullis acceſſionibus fuiſſe auctum, ſeu potius deformatum. In harum porro numero id collocant, quod de magnete polum reſpiciente narratur. Solutio hæc, cui plurimum favet Cabeus [*a*], valde probabilis ab iis reputabitur, qui probe norunt, quam multa adiuncta veterum libris ſint ab iis præſertim, qui operæ pretium ſe facere exiſtimabant, ſi nova evulgantes, vetuſtis ſcriptoribus ea adſcriberent, ut ab iis auctoritas nuper inventis conciliaretur.

Num vero ad demendum Ariſtoteli librum hunc, aut eam certe partem, quæ ab Alberto Magno [ſi Albertus Magnus is eſt] allegatur, vim habeant argumenta, quæ hanc in rem allata vidi, alienum iudicium eſto. Tu tamen, Zanotte mi, eadem argumenta paucis comprehenſa habe. Poſtquam iam allata de magnetis polum reſpicientis virtute retulit Albertus, quædam de magnetum generibus, & viribus enarrat, quæ uti deridicula, ita plane adverſantia ſunt veritati: veluti quoddam magnetum genus eſſe, quod aurum, alterum quod argentum, alterum denique quod carnes ipſas attrahat, & alia his affinia. An putamus Ariſtotelem acutum ſane, & valde ſolertem philoſophum nugis his aurem, fidemque præſtitiſſe, eaſque litteris conſignaſſe? Albertus tamen nugarum iſtarum vadem facit Ariſtotelem (*b*). Alterum porro argumentum hoc eſt. Vincentius Bel-

3, 4, & 5 in cuius fine hæc leguntur: *Non poſſunt hæc ex principiis phyſicis probari, ſed oportet ad hoc ſcire aſtronomiam, & magiam, & necromanticas ſcientias, de quibus in aliis conſiderandum eſt*. An Albertus Magnus vir magnopere doctus, & pius hæc protuliſſet?

(*a*) *Philoſophiæ magneticæ cap. 6.*

(*b*) *De miner.* lib. 2 tract. 3 cap. *6* pag. 423. *Item dicit Ariſtoteles, quod ſpecies magnetis ſunt valde diverſæ: quædam*

Bellovacenſis Alberti Magni propemodum æqualis (*a*), eadem fere de magnete ad polum ſe vertente, atque adeo ferro eamdem virtutem communicante, referens, quæ tradiderat Albertus Magnus (*b*), nullam Ariſtotelis mentionem facit. An contempſiſſet tam eximii ſcriptoris teſtimonio, atque auctoritate dicta ſua comprobare Vincentius, ſi ab Ariſtotele prodiiſſe putaſſet, quæ Ariſtoteli adſcripſerat Albertus Magnus, ipſe vero Vincentius veluti vera crediderat, ſcriptiſque conſignarat?

XXI. Iam vero nos expectant duo illa Plauti loca, quibus ſe oſtendiſſe arbitrantur vetuſtis romanis notam fuiſſe eam, de qua agimus, magnetis, acuſque nauticæ utilitatem. Atque hæc quidem loca varie accipiunt interpretes. Mihi ſane plurimum placet ea explicatio, pro qua citatum vidi Salmaſium (*c*), & Turnebum (*d*), quibus addas opto Cabeum (*e*): ut ſcilicet vox hæc *vorſoria*, ſeu *verſoria* ſignificet pedem veli, ſeu funem, quo velum dirigitur, eoque regitur, & flectitur, quo gubernatori libuerit, navis. Scilicet in eo, qui ex Mercatore adducitur loco, Eutychus Carinum alio temere properantem, in patria detinere volens, allegorico ſermone illi pollicetur, ſi in patriis ædibus conſiſtat, & ſanius conſilium capiat, aſſecuturum illum quæcumque optat. Hic igitur verborum illorum eſt ſenſus.

 Favent

enim trahit aurum: & alia diverſa ab ea trahit argentum, & quædam ſtamnum, quædam ferrum, quædam plumbum...... & quædam trahit carnes humanas, & dicitur ridere homo, cum a tali trahitur magnete, & manere apud ipſum, donec moritur, ſi valde magnus eſt lapis: & quædam pilos, & alia aquas, & alia piſces. Quod porro hic de carnibus a magnete tractis edocet, antea etiam tradiderat. Scilicet tractat. 2 cap. XI pag. 233 hæc ſcripſerat: *Ariſtoteles dicit, quod eſt quoddam genus aliud magnetis, quod trahit carnes hominis.*

(*a*) *Vide quæ tradit Oudin tom. 3 pag.* 451.

(*b*) *Speculi maioris lib.* 8 *cap.* 19.

(*c*) *In Plauto edito lugduni batavorum, & roterodami* cum notis [*uti appellant*] variorum *anno 1669.*

(*d*) *Ibi pag.* 1135 *tomi II. Eumdem Turnebum allegavit Pineda de* rebus Salomonis *lib.* 4 *cap.* 15 §. 4.

(*e*) *Magneticæ Philoſophiæ cap. 6.*

Favent hic cuncta, ſi conſilio meo obſequens regas, & contineas te: item ut navem verſoria [ideſt fune velum moderante] regit, ac continet gubernator. En ipſos Plauti verſiculos, quibus quidem lectis, in meam, ut puto, Zanotte diſertiſſime, ſententiam venies.

Eut. *Si huc item properes, ut iſtuc properas, facias rectius.*
Huc ſecundus ventus nunc eſt; cape modo vorſoriam:
Hic favonius ſerenu' eſt, iſtic auſter imbricus:
Hic facit tranquillitatem, iſte omnes fluctus conciet.
Recipe te ad terram, Charine, huc. Nonne ex advorſo vides?
Nubis ater, imberque inſtat. Aſpice nunc ad ſiniſtram,
Cælum ut eſt ſplendore plenum, ex advorſo vides &c.
Ch. *Religionem illic obiecit: recipiam me illuc.* Eut. *Sapis,*
O Charine, contra pariter fer gradum, & confer pedem,
Porrige brachium, prehende. iam tenes? Ch. *teneo.*
Eut. *Tene.*

Alter quoque Plauti locus eamdem plane retinet vocis huius *verſoria* ſignificationem. Audi num vera eloquar. Charmides multis antea hortatus fuerat Staſimum, ut ad herum iret.

Staſime, fac te propere celerem, recipe te ad dominum domum:
Ne ſubito metus exoriatur ſcapulis ſtultitia tua.
Adde gradum: appropera. iamdudum factum 'ſt, cum abiit domo.

Tum vero cunctantem adhuc his compellat verbis.

— — — — — — — — *cape vorſoriam.*
Recipe te ad herum &c.

Conſule, obſecro, locum ipſum Plauti, videbiſque me hic quoque vera tradere. Alieniſſimus vero erit a Plauti meta, & plane inficetus ſenſus, ſi verſoriam pro nautica pyxide accipias. Quid eſt enim nauticæ pyxidi cum conſilio, quod Staſimo præbet Charmides? An pyxis navem retrahit?

Imprudenter autem ad coniecturam, quam refutavimus, confirmandam, affertur recentiorum philoſophorum *verſorii* nomine magneticam pyxidem appellantium auctoritas. Hi ſicut poterant ad novum inventum denotandum novum fingere vocabulum, maluerunt priſca uti voce, aliam tamen illi ſignificationem adiungentes; quod non raro videmus factum,

ctum, & procul dubio in vocibus *femoralia*, *pileus*, *calceus*, *petaſus*, *mitra*, & affinibus aliis: quippe vocabulis his nos utentes, multo diverſam a vetuſta ſignificationem illis imponimus.

Quod attinet ad Germanos, mirum utique non eſt, ſi tam excellentis inventi auctores Germanos faciat Goropius, cum plurimam operam impenderit ille, ut cuncta fere commoda, ac bona a germania deducat. Si coniecturas alias adiunxiſſet illi, quam ex ventorum, qui in nautica pyxide deſcribuntur, vocabulis deducit, valde veriſimilem opinionem ſuam feciſſet; at cum potiſſimum hiſce nominibus innitatur, reſponderi facile poteſt, hoc tantum erui [quod non inviti concedimus] eos, qui huius modi inſtrumentum hac ex parte perfecerunt, ventorumque nomina pyxidi addiderunt, germanos fuiſſe, patriamque ſuam ea ratione indicaſſe. At non eorum, quæ deinceps addita ſunt inſtrumento, ſed inſtrumenti ipſius inventorem quærimus: neque vero hunc germanum, aut cimbricum fuiſſe prodit ea vox, qua nauticam pyxidem appellamus. Quis enim theutonica, aut cimbrica dicat vocabula *boſſola*, *buſſola*, *boxel*, & affinia alia, quibus inſtrumentum hoc vocare conſuevimus?

Quod vero adducitur ex Alberto Magno, valde commodam explicationem fortaſſe iam habuit. Vide numerum XX. Sed tamen, ſi vis, Alberto Magno librum eum tribuo. Tum vero Alberto Magno innotuiſſe eam, quam celebramus, magnetis præſtantiam, candide fatebor: at non continuo probas eamdem præſtantiam Alberto omnium primo innotuiſſe: quin potius aſſequor Alberti tempore [hoc eſt anno fere 1240] notiſſimam fuiſſe, & omnium ore vulgatam eam, quam extollimus, magnetis vim: neque enim adſcribi Ariſtoteli potuiſſent ea, quæ adduximus verba, niſi perſpectum fuiſſet doctis, ſponte ſua ſe ad polum magnetem vertere. Illud porro commodi ex eo teſtimonio eruimus, ut diſcamus apud orientales, & niſi fallimur, expreſſe apud arabas, celebrem fuiſſe eam, quam prædicamus, magnetis virtutem. Ex orientali quippe lingua proveniunt voces *zoron*, & *caphon*, quibus utitur Albertus Magnus, cui proinde hanc tribuimus laudem, quod rem miram, tametſi vulgatam, & celebrem, latinorum philoſophorum primus ſcriptis prodiderit ſuis. Dixi *latinorum philoſo-*

phorum: etenim Furnerius (*a*), quem ſequi videtur Ricciolus (*b*), multum ante Alberti Magni tempora *obſcuram mentionem huius inſtrumenti reperiri*, ait, *in geographia nubiana ſcripta tempore Rogerii Siciliæ regis*, *ſeu circa annum* 1151. Cabeus quoque (*c*), aliique viri clariſſimi ea de nautica pyxide docent, quibus indicant uſum illius apud europæos ad vetuſtiora etiam tempora eſſe referendum. Qua de re alienum iudicium eſto.

XXIII. Iam vero convertendus eſt ſermo ad Gallos, quorum induſtria effecit, ut putaretur a multis, illorum ſtudio, & labore detectam fuiſſe eam, de qua diſputamus, magnetis excellentiam. Examinemus nunc ſingula. Quod ex Ditmaro proferunt hanc habere fortaſſe poteſt commodam explicationem. Horologii nomine niſi vis intelligere machinam aliquam nobis ignotam, qualis ea eſſe videtur, quæ *horologium nocturnum* aliquando appellata eſt (*d*), & ea ipſa fortaſſe eſt, quam *horoſcopum* Papias nuncupat: tu dic vocem *horologium* valde uſitatam ſubſtituiſſe librarios, aut potius eos, qui primo Ditmarum typis evulgaverunt, voci *horoſcopum*, qua quidem [quod ex Ducange Papiam allegante diſcimus] denotatur *inſtrumentum quoddam rotundum, vel quadrum habens circumquaque multas diviſiones, & mediclinium in medio, in quo ſunt foramina, per quæ omnes horæ & ſtellæ cognoſcuntur; unde Aſtrolabius dicitur*. Sed nolo de voce, atque adeo de opificio voce illa ſignificato litigemus. Fac ſolare fuiſſe horologium illud quod magdeburgi confecit Gilbertus. Quid tandem conſequeris? Nihil omnino, quod cauſæ tuæ faveat. An negabis meridianam perquiri potuiſſe a Gilberto, dum per fiſtulam ſtellam polarem noctu intuebatur: atque ea tandem perſpecta horologium ab eo fuiſſe confectum? Potuit etiam ea diligentia Gilbertus poli altitudinem perquirere, quam niſi notam habeas, perperam ſolare horologium perficere te poſſe ſperas.

Cete-

(*a*) *Lib.* II *hydrograph. cap.* I.

(*b*) *Geogr.*, *& hydrogr. lib. x cap.* 18.

(*c*) *Lib. I cap. 6 pag.* 23.

(*d*) *Vide Ughelli tomum V pag.* 600. *Ibi quippe hæc de Pacifico veronenſi archidiacono traduntur:* horologium nocturnum nullus ante viderat, en invenit argumentum &c.

Ceterum ſi velint galli illud magnetis inſtitutum, quo polum ſponte reſpicit, minime delituiſſe Gilbertum monachum, & nihil amplius, facile connivebo: dummodo fateantur id, quod me docuit auctor præſtantium illorum librorum, qui *Spectaculi naturæ* nomen præferunt: nimirum ea notitia, ſi qua tum erat, ad maritima itinera minime fuiſſe uſos per ea ſecula homines (*a*). At multo maior vis in

(*a*) *In ogni tempo ſi è conoſciuta la proprietà della calamita di tirar il ferro. Talete, a cui un effetto sì coſtante aveva fatto gagliarda impreſſione, è venuto a penſare, che queſta pietra aveſſe un anima. Platone, Ariſtotile, e Plinio hanno fatto parola della medeſima attrazione: ma ne eſſi, ne altri fino all' undecimo, o anche fino al principio del duodecimo ſecolo, conoſciuto hanno, che la calamita ſoſpeſa, o nuotante ſull' acqua per mezzo d' un ſovero, volti ſempre uno de' ſuoi lati, e ſempre il lato ſteſſo verſo il nord. Quegli eziandio, che fece tale oſſervazione non andò più innanzi, e non compreſe l' importanza, nè l' uſo dell' ammirabile ſcoperta. Conoſciute queſte due proprietà di tirare il ferro, e di guardare il nord, alcuni curioſi reiterarono l' eſperienza, e facendo nuotare in un vaſo pieno d' acqua un pezzo di ferro, ed una calamita ſoſtenuti dal ſoghero per laſciarli operare ſenza oſtacolo l' un verſo l' altro, oſſervarono, che quando il pezzo di ferro era ſtato fregato dalla calamita, queſto ferro medeſimo aveva pure la virtù di voltarſi verſo il nord, e di tirare, come la calamita, aghi, e ramenti di ferro. Di eſperienza in eſperienza vennero fino a mettere un ago calamitato ſopra due bricciole di paglia poſte ſull' acqua, e ad oſſervare, che queſto ago voltava invariabilmente la ſua punta verſo il nord. S' incamminavano così alla grande ſcoperta; ma fin quì ciò, che chiamaſi la buſſola, non era trovato ancora. Il primo uſo, che i curioſi fecero di queſta ſcoperta fu d' ingannare i ſemplici con delle apparenze di magìa. Per eſempio, un piccolo cigno di ſmalto incavato, nuotando per queſto mezzo ſopra l' acqua d' un vaſo, e portando col ſuo roſtro una lucertola, o un ſerpentello di ferro, non mancava di correr dietro a un pezzo di pane, che ſe gli preſentava ſu la cima d' un coltello; egli ſeguitava fedelmente i moti del coltello, e levava in ammirazione tutti gli ſpettatori, i quali ignoravano, che il coltello aveſſe acquiſtata la proprietà di tirare il ferro, mercè*

in iis verſiculis, quos iam citavi, ineſſe putatur. Scilicet ſi Guyotus Provineus, qui illorum auctor dicitur, XII, aut certe XIII Eccleſiæ ſeculo floruit, plane fatendum eſt, gallis innotuiſſe eam, de qua dicimus, magnetis facultatem, multo ante quam itali ab aſiaticis eam ſe didiciſſe narrant. At audi, Zanotte doctiſſime, quid ex duobus gallis ſcriptoribus didicerim. Menagius prior eſt, Stephanum Paſquerium allegans (*a*), Gilbertus Carolus le Gendre alter (*b*). Utrumque porro accuratiſſimum, atque eruditiſſimum fatebitur quisquis libros ab iis editos pervolverit. Verſiculi hi Hugoni Bertio (*c*) Cluniacenſi monacho tribuendi ſunt, quem S. Ludovico imperante vixiſſe aiunt. Optavit ſcilicet Poeta ille ſane non malus, optavit, inquam, [ſi clariſſimo le Gendre credimus] ut Romani Pontificis vita, ac conſuetudo ea eſſet, ut in eam veluti fulgidam polarem ſtellam reſpicere, illiuſque lumine duci univerſi chriſtiani poſſent. En integrum, ſi loqui ita volumus, ex laudatis ſcriptoribus Hugonis epigramma.

Un art font qui mentir ne puet.
Par vertu de la Marinette
Une pierre laide, & noirette
Où le fer volontiers ſe joint;
Et ſi regarde le droit point,
Puis que l' eguille l' a touchée;
Et à un feſtu l' ont fichée.
En l' iau le mettent ſans plus;
Et li feſtus li tient deſſus.
Puis ſe tourne la pointe toute
Contre l' étoille; ſi ſans doute

Que

del tocco della calamita. Il preteſo mago finiva di convincere l' aſſemblea della ſua poſſanza, comandando a un ago corcato a fior d' acqua, che ſvolgeſſe la ſua punta dall' oriente, o dal mezzodì, e la dirizzaſſe verſo il tal punto del cielo, verſo la ſtella polare: lo che veniva immantinenti eſeguito. Finalmente trovaronſi degl' ingegni più ſerj, che applicarono queſta eſperienza ai biſogni della navigazione nel duodecimo ſecolo.

(*a*) *Origin. ling. ital.* ad vocem *calamita*.

(*b*) De l' opinion *lib.* 4 *tom.* 1 *pag.* 83.

(*c*) *Hugues de Berci*.

Que japer rien ne fauſſera,
Ne mariniers n' en doutera.
Contre l' étoille và la pointe,
Par ce ſont le mariniers cointe
De la droite voye tenir:
C' eſt un art qui ne puet mentir,
La prennent la forme, & le molle
Que cette étoille belle & claire;
Tal deveroit étre le ſaint Pêre;
Clere deveroit étre & eſtable.

Quibus poſitis, plane intelligis adductos verſiculos labente iam fere ſeculo XIII fuiſſe compoſitos, ideoque ea ipſa ætate, qua alii innotuiſſe italis hanc ipſam magnetis virtutem aiunt: ſic ut lis adhuc perſtet, num gallis, an potius italis ea tribuenda laus ſit, quæ percipitur ex acu nautica.

Neque te moveat, quod de Peregrino gallo narrat Cabeus, quem ſequuntur Fabricius, aliique viri doctiſſimi. Eamdem quippe explicationem fere excipit, atque excipiunt Alberti Magni, quæ iam expoſuimus N. XX verba. Nimirum dubitatur primum a viris doctis, num a Peregrino illo gallo, cui Garzonii teſtimonio innixus favet Cabeus, an vero a Ioanne Taiſnero prodierit opuſculum illud, in quo ea, quam dicimus, magnetis virtus celebratur. Quod ſi revera auctorem habet Peregrinum, non aliud tamen ex ea re obtines, niſi quod facile dabimus: ſcilicet diu antequam Gioia amalphitanus nauticam pyxidem perficeret, illius rudimenta [ſi loqui ita licet] apud orientales uſitata, fuiſſe nota gallis ſcriptoribus.

Quod deinde commemorant: ita ſcilicet fuiſſe olim magneticam acum conformatam, ut lilium cuſpide exprimeret, ideoque gallici auctoris certam præferret notam, ſolutionem hanc habet. Id apud nautas omnes in uſu fuiſſe pernegant angli, batavi quoque, & fortaſſe etiam negabunt itali. At demus quod optant galli. Quid tandem ex ea re conſequuntur? Gallicos nautas potiſſimum uſos fuiſſe in maritimis itineribus nautica acu; quam quidem ita efformare conſueverint, ut cuſpide lilium referret. Potuere porro nautæ alii, vel ut obſequerentur gallis, vel quia quamdam ornatus, venuſtatiſque ſpeciem habere videbatur nauticæ acus cuſpis lilii formam habens, eam retinere,

uſur-

uſurpareque. Oſtendant [obſecro] primum quidem, atque ab ipſis, ut ita appellem, acus nauticæ primordiis formam eam, non aliam quamlibet, fuiſſe ſervatam. Oſtendant quoque eos errare, qui aiunt, propterea lilii formam in magneticæ acus cuſpide fuiſſe expreſſam, quod illius inventor, aut certe promotor, & artifex eximius Gioia, eo argumento indicare voluerit ſibi, ſuiſque contribulibus imperare regem, qui ex galliis duxiſſet originem (*a*). An ignoramus neapolitano regno per ea tempora præfuiſſe principes endegavenſes?

Difficultatem porro, quam poſtremo loco commemorant, eam nempe, quam [ſi gallorum patronis credimus] nobis facit etymologia vocis huius *calamita*, ii evitant, qui negant a gallis hoc nomine fuiſſe appellatum magnetem, acumque magneticam (*b*). At hi, monente Menagio (*c*), multum errant; etenim revera *calamite* dicitur a gallis, item ut ab italis *calamita*. Aliud itaque conſilium capiamus oportet, ut difficultatem hanc diſſolvamus. Petrus Franciſcus Iambullarius (*d*) ex remotiſſima regione vocem hanc derivat: putat quippe origine aramæam eſſe, ſeu potius hebræam; quippe חַלָּמִישׁ challamiſch, ſeu *calamis* lapidem hebræorum lingua ſignificat. Potuit autem magnes *antonomaſtice* lapis dici: eſt quippe lapidum præſtantiſſimus: & græci ſane λίθον magnetem vocant, quamquam vox hæc lapidem generatim ſignificat. Etymologiam hanc minime approbat Menagius (*e*); quippe vox hæc communis eſt italis, hiſpanis, gallis, atque adeo græco-romanis, quorum linguæ ab hebræa minime derivantur. Perperam itaque ab hebraica lingua, Menagio iudice, eam deducimus. Hoc tamen incommodum, ſi quod eſt, facile evitas, ſi dixeris non hebraicam tantum eſſe vocem hanc *calamita*, ſed apud alios

---

(*a*) *Recens lexici Morerii editio.* (*b*) *Ferrarius.*

(*c*) *S' inganna di certo il Sig. Ferrari nel dire, che i franceſi* aimant *la chiamino, e non* calamite .... *Che la voce* calamite *ſia voce franceſe, ſenza pigliare altra briga, lo rimettiamo ai Vocabolari franceſi.*

(*d*) *In dialogo, quem appellavit* il Gello, *in quo de Florentinæ linguæ origine diſputat.*

(*e*) *In origin. linguæ italicæ, ad vocem* calamita.

alios orientis incolas uſitatam, ideoque a perſis, meſopotamis, arabibus etiam. Tum porro quis vetat ne ab oriente, atque ab hebraica ipſa lingua orientalium multarum linguarum matre vocem hanc deducamus, quando quidem [niſi plane fallimur] ab oriente pyxidem ipſam magneticam europæi, atque adeo ipſi græco-romani acceperunt? An non, dum nova inventa ab exteris nationibus accipimus, ea ipſa vocabula retinemus, quibus eadem inventa apud eos appellantur, a quibus accipimus? Hanc ſane etymologiam non modo Iambullarius, quem parvi videtur Menagius facere, ſed & Marcus Marinus vir præclariſſimus iam dudum propoſuit, & approbavit (*a*). Atque huius ſane egregii ſcriptoris cum ſumma fuerit orientalium linguarum peritia, eum minime deceptum puto.

At age. Neque ab hebræis, neque ab arabibus, neque ab aliis remotiſſimis orientis regionibus vocem hanc deriva: eam etiam etymologiam ſperne, quam propoſuit (*b*) Covarruvias

(*a*) חַלָּמִישׁ *Nomen formæ maſculinæ, & in regimine* חַלְמִישׁ *ſine plurali; quod quinque vicibus tantum legitur in Bibliis, & dubitatur, quid proprie ſignificet. Ego non levi coniectura adducor, ut arbitrer magnetem eſſe, conſentiente nomine, quo vulgo utimur, ſed ratio dictionis ignoratur.* [Calamita]. *Alii duritiem, fortitudinem interpretati ſunt. Eſt autem magnes inter lapides ſiccitate quadam refertus, ut aquam ex eo elicere non minimam ſit res mira. Expende locos omnes accuratius.*

חַלָּמִישׁ לְמַעְיְנוֹ־מָיִם׃ *Vertere magnetem fonti* [*in fontem*] *aquarum*. Pſ. 114, 8.

הַמּוֹצִיא לְךָ מַיִם מִצּוּר הַחַלָּמִישׁ׃ *Educere aquam de petra magnetis* [*duritiei*]. Deut. 8, 15.

וְשֶׁמֶן מֵחַלְמִישׁ צוּר׃ *Sugere facere oleum de magnete* [*duritie*] *lapidis*. Deut. 32, 13.

עַל כֵּן שַׂמְתִּי פָנַי כַּחַלָּמִישׁ׃ *Ponere vultum ſicut magnetem*. Iſa. 50, 7.

בַּחַלָּמִישׁ שָׁלַח יָדוֹ׃ *Mittere manum in magnetem*. Iob. 28, 9.

(*b*) *Il Covarruvias è d' opinione, che venga dalla voce greca*

ruvias [quamvis me quidem iudice veriſimilitudinem aliquam habeat: putabatur enim XIV ſeculo, uti alia multa, item etiam calamos, ſeu ſtipulas trahere magnes]; alias quoque huic affines eiuſdem vocis origines contemne. Commode eam a græcis deſumere, ſi vis, potes. Non ne apud græcos καλαμίς *acuminatam arundinis feſtucam* ſignificat (*a*)? En porro etymologia vocis huius *calamita*. Potuit ſcilicet ita appellari, propterea quia tenuiſſimi inſtar fruſtuli, ſeu feſtucæ arundineæ acuminatæ inſtar, acus nautica eſt. Et hanc quidem originem, quam Ferrarius indicat, valde probabilem agnovit clariſſimus Menagius, qui, ut puto, iis minime obſiſteret, qui vocem hanc ex eo derivarent, quod primum acus nautica tenuibus ligni fruſtulis, ſeu paleis (quas calamos interdum dicimus) innixa, natanſque ſervaretur in pyxide. Potuit etiam, ſi vis, (vide, quæſo, quam comis ſim) potuit, inquam, calamita dici, ex eo quia veluti rana nataret in aquis.

Sed cur me cogis vocis huius originem ex gallica lingua trahere, quando quidem ex latina, aut potius ex græca eam deducere aptiſſime poſſum? Audi quid tradat Plinius opinionis meæ locupletiſſimus teſtis (*b*). *Ea rana, quam græci calamitem vocant, quoniam inter arundines, fruticeſque vivat, minima omnium, & viridiſſima*. Tum porro perſtat adhuc quæſtio: potuere enim a latinis tam itali, quam galli vocabulum hoc accipere: potuere item accipere a græcis, iis præſertim, quos *græco-romanos* per ea tempora appellabant, quibus cum ſcilicet ſæpiſſime degebant tum galli, tum itali.

Leviſſimum porro id eſt, quod ex ventorum nominibus eruunt. Pauci profecto erunt (ſi qui tamen noſtris temporibus erunt), qui voces has *nord*, *ſud*, *eſt*, *oueſt* a gallica lingua deducant, cum compertiſſimum ſit, theutonicas potius, ſeu cimbricas, aut celticas has eſſe voces, non gallicas. At fac eſſe gallicas. Quid tandem ex eo obtines, niſi quod

καλάμη *ſignificante ſtreppola ..... Quod ſtipulas trahat: eſſendo falſo, che la calamita tiri le ſtreppole a ſe, e falſa parimente quella derivazione*. Menagio.

(*a*) *Lexicon Græco-latinum Iacobi Tuſani*.

(*b*) *lib*. 32 *cap*. 20.

quod facile daturus ſum? nempe a multis iam ſeculis ventos gallicis vocabulis eſſe a nautis appellatos. An non ultro laudem hanc gallis tribuo, ut fatear eos iam dudum maritimis itineribus ſe exercuiſſe, ideoque ventis ea indidiſſe nomina, quibus nunc utimur, quæque diu poſtquam ſe in iiſdem itineribus ſe exercere conſueverant galli, in nauticæ pyxidis ora deſignaverunt nautæ? Ceterum pauci, ut arbitror, erunt, qui pyxidem nauticam inventam a gallis putent, poſtquam noverint Cardinalem de Vitriaco ſcriptorem gallum, eumdemque & vetuſtiſſimum, & contribulium ſuorum laudatorem eximium, eiuſdem quidem pyxidis mentionem feciſſe, ſed non propterea eam gallis inventoribus tribuiſſe. Verba huiuſce ſcriptoris mox afferemus. Et de gallis hactenus.

XXIV. Atque ii porro multo meliorem cauſam habuiſſe videntur præ luſitanis, quibus [ſi Regnaultium excipias] nullus eorum, quos conſului, hanc laudem tribuit. Perquiſivi ſane in Maffæi libris, quem Regnaultius in rem ſuam allegat, perquiſivi, inquam, quænam tandem Maffæius pro luſitanis adduceret, nihilque plane inveni, quo Regnaultii ſententia firmari poſſit. Etenim minime ad id evincendum apta reor verba hæc, quæ in ipſo fere hiſtoriarum indicarum limine occurrunt: *Navigandi vero ante centeſimum annum vel apud heſperios populos tanta fuit inſcitia, maritimo videlicet uſu aſtrolabii nondum excogitato, ut ab ora diſcedere, & alto oceano ſe committere nequaquam auderent: ſed littora caute legentes, ubi ad æſtus maris, aut brevia periculoſa pervenerant, quaſi repagulis quibuſdam a natura, ſeu numine obiectis, reciperent illico ſe ſe, & longius tendere quodam modo nefas arbitrarentur.* Cum hæc ſane doceant, luſitanos ne aſtrolabio quidem ullo in navigationibus ante annos centum [quo quidem tempore iam diu nautica pyxis in uſu apud nos erat] fuiſſe uſos; ac multo minus oſtendant eos, aut pyxidis nauticæ inventores fuiſſe, aut ita excultum, provectumque per luſitanos inventum hoc, ut maiorem, quam reliquæ nationes, laudem propterea fuerint aſſecuti.

XXV. Iam devenimus ad italos, ideoque ad eos, quibus plerique, aut inventæ, aut certe in europam deductæ, expolitæque, multoque melius, quam antea, elaboratæ nauti-

cæ pyxidis laudem tribuunt. Quidquid ſecus nonnulli ſentiant, valde probabilis eorum ſententia eſt, qui italum aliquem, [quem plerique venetum civem in oriente mercaturam facientem fuiſſe aiunt] qui italum, inquam, cenſent deduxiſſe ab aſia in europam celeberrimum hoc inventum. Quid enim veriſimilius cenſeri poterit, quam italum aliquem [itali enim orientis maria, ac provincias decimo ipſo: quid quod etiam octavo, & ſeptimo ſeculo frequentare conſueverant], atque illum fortaſſe venetum civem ex eorum numero, qui mercaturam ampliſſimam per ea tempora in omnibus orientis partibus faciebant, inſtrumentum illud, quod valde commodum in maritimis itineribus agnoverat, deduxiſſe in europam, quo popularibus ſuis expeditius, certiuſque pararet iter? An aſiatici populi magnetica acu per ea tempora caruerint? Tu certe non putas, Zanotte doctiſſime, quem non latet, quid ea de re ſcripſerint & Cardinalis de Vitriaco (*a*), & hi-

(*a*) *Adamas in India reperitur..... ferrum occulta quadam natura ad ſe trahit. Acus ferrea poſtquam adamantem contigerit, ad ſtellam ſeptentrionalem, quæ velut axis firmamenti, aliis vergentibus, non movetur, ſemper convertitur: unde valde neceſſarius eſt navigantibus in mari.* Iacobus de Vitriac. hiſtor. Hieroſol. cap. 89. Quamvis porro, ſi vis, in eo erret hic ſcriptor, quod putet virtutem, qua ſe ferrum convertit ad polum, ab illo acquiri per contactum adamantis, cum re vera per contactum, affrictumque magnetis acquiratur: atque id quidem oſtendat occidentalibus non admodum fuiſſe notam hanc, de qua agimus, magnetis præſtantiam, eam, niſi probabilis coniectura nos fallit, occultantibus orientalibus, & indico adamanti per ea tempora in noſtris regionibus admodum raro, tribuentibus: haud obſcure tamen ſignificat iis, quæ allegavimus, verbis, non ignotam fuiſſe eo, quo is vixit ſæculo, ideoque XIII, acus nauticæ vim, & ſummam utilitatem. [*Unde valde neceſſarius eſt navigantibus in mari &c.*] *Vide Oudin pag.* 46 *tomi III: in quo quidem loco eum floruiſſe ait anno* 1220, *& ſeqq.* Dixi *ſi vis:* etenim affinitatem aliquam magnetem inter, & adamantem ſe inveniſſe putant philoſophi. *Vide, quæ tradunt eruditi Lipſienſes in Actis* 1693 *pag.* 187, *& eximius Beccarius noſter tom.* 2 *Actor. Acad. Bonon. pag.* 295.

& hiſtorici alii nobiliſſimi. An non etiam ſimillimum veri eſt, quoniam per ea tempora novimus deductam in europam magneticam pyxidem (*a*), per eos fuiſſe deductam, qui præ ceteris cum aſiaticis mercaturam exercebant, & in eorum regionibus diu verſabantur? Porro nemo vertere in dubium poteſt, num præ ceteris nationibus omnibus per eam ætatem ſe in mercatura cum aſiaticis exercerent itali, ac præ ceteris veneti, quos etiam novimus eiuſdem mercaturæ exercendæ cauſa, ſæpe, diuque in ægypto, in perſide, atque adeo ultra gangem duxiſſe moram, firmamque poſuiſſe ſedem. Et ſane acceptam ab orientalibus, &, niſi fallimur, proxime a ſaracenis, quibus [ut probabilis fert coniectura] tradiderant nauticam pyxidem, aut ſinæ ipſi, aut alii, qui a ſinis acceperant, indicat nauticæ conſtituendæ pyxidis conſuetudo apud ſinas: ita enim hi [ſi viris probatiſſimis credimus] eam etiamnum efformant, uti veteres europæi efformabant, ſcilicet ut natantem, & ſubere innixam in pyxide magneticam acum teneant (*b*). Quod ſcilicet palam indicat, a quonam tam præſtans, atque utile inſtrumentum acceperint europæi, qui illud perficientes, multo amplius emolumentum ex eo aſſequuntur, quam habeant ſinæ, qui ne videantur per europæos profeciſſe, in veteri inſtituto, & [ſi ita loqui liceat] in ipſa navigationis infantia

(*a*) *Per ea tempora in uſu fuiſſe apud europæos magneticam pyxidem, ea facile oſtendunt, quæ antea retuli, quibus addere ea etiam potes, quæ clariſſimus van Muſſchenbroeck docet* Phyſic. experim. pag. 150: *ideſt prodere Thevenottum in itinerario* epiſtolam *ſe vidiſſe anno 1269 a* Petro Adſigerio *conſcriptam*, in qua declinare acus a vero ſeptentrione quinque gradibus commemoratur. *Id porro ſine explorata, uſitataque acu nautica fieri omnino non poterat.*

(*b*) *Audi quid præ ceteris doceat Cabeus de epiſtola Petri Peregrini galli, quem idem Cabeus ante alios de egregia hac magnetis virtute ſcripſiſſe putat; quid, inquam, Cabeus de Petri Peregrini epiſtola doceat.* In hac ergo epiſtola de motu magnetis in polos fit mentio: cuius eſt illa ratio hoc experiendi, dum in ligneo vaſe, quaſi in cymbula, aquis imponitur. *Affinia tradunt* Ricciolus Geogr. & hydrograph. lib. 10 cap. 18, *Menagius, aliique viri clariſſimi.*

tia adhuc permanent (*a*). Hæc ſane eſt præclariſſimi ſcriptoris galli ſententia, probabilis profecto, niſi nos a partium ſtudio ſinamus decipi.

Idque ſi tenebimus, illa argumenta omnia effugiemus, quibus illorum opinio improbatur, qui Marcum Polum ex ſinis nauticam pyxidem adduxiſſe aiunt; propterea quia tum ex aliis quidem haud contemnendis teſtibus; tum vero maxime ex Iacobo de Vitriaco conſtat, antequam Marcus Polus ſe ſe italiæ reſtitueret [id autem anno 1260 contigiſſe aiunt] occidentalibus cognitam fuiſſe nauticam pyxidem. Fac enim id ita eſſe. Potuit ſane is, quem diximus, venetus mercator nauticam pyxidem deferre, antequam Marcus Polus patrias ſedes remearet, novoque nobiliſſimo invento europam ornaret. An non novimus [quod ſæpe dixi] diu, antequam Polus ſe arduo itineri committeret, italos alios, ac præſertim venetos mercaturæ cauſa orientis regiones penetraſſe, ibique diu moratos eſſe? Quod ſi fateris, fatearis etiam oportet orientalium mores, opificia, inventa, ideoque etiam nauticam pyxidem addiſcere eos potuiſſe, deducereque in italiam.

XXVI. At cur, inquies, homo tam præclare de italia, vel potius de univerſo humano genere meritus, nomen ſuum reticere voluit, dum tam præclarum opus italiæ dedit?

Ignoras ſane quiſquis hæc obiicis, mercatorum mores, atque inſtituta? hi quippe laudes, gloriamque minime perquirunt, ſed divitias, & opes, quas unice diligunt. Ceterum in hanc, quæcumque ea tandem ſit, difficultatem incides, etiamſi gallos, aut alterius cuiuſpiam nationis homines inventores nauticæ pyxidis facias: latet enim procul dubio tam benefici adverſus europam, atque uti dixi, univerſum huma-

(*a*) *Altri vogliono darne l' onore ai Cineſi; ma come che ancora in oggi l' ago calamitato non s' adopra nella Cina, ſe non facendolo galleggiare ſopra un ſoſtegno di ſovero, come facevaſi un tempo in europa; è credibile, che Marco Polo, od altri veneziani, che andavano all' Indie, ed alla China per lo mar roſſo, abbiano fatto conoſcere ſin dal decimo terzo ſecolo nel più interno dell' aſia coteſta importante eſperienza, della quale diverſi Piloti hanno poſcia perfezionato l' uſo fra noi.* Spettacolo della natura.

humanum genus viri nomen. Eam porro difficultatem evitas, ſi dixeris, non ab uno advectam ex oriente nauticam pyxidem, ſed a pluribus eodem fortaſſe navigio vectis, qui cum laudem partiri in multos deberent, de ea minime fuere ſolliciti.

XXVII. Ceterum dum hæc trado, non eorum reiicio opinionem, qui ab amalphitano cive, anno fere 1300, primum elaboratam nauticam pyxidem volunt: quibus quidem favet innumera hiſtoricorum phalanx (*a*). Scilicet utramque ſententiam pulchre concilias, ſi dixeris, devectam quidem a veneto mercatore in europam nauticam pyxidem, at tam ruditer elaboratam, ut ad nauticos uſus haud multum haberet utilitatis. Perfecit itaque illam civis amalphitanus, quiſquis is eſt, aut certe in ea elaboranda profecit adeo, ſive ſtylo in media acu infixo, ſive aliis in eam collatis commodis, ut multo utiliorem in longiſſimis itineribus ducem nautæ haberent.

XXVIII. Dixi *quiſquis is eſt*: neque enim eorum ſententiam reprobo, qui inter duos amalphitanos cives laudem hanc partiuntur, quorum primus [Ioannes Gioia fortaſſe is eſt: potuit autem Marci Poli eſſe æqualis, aut eo etiam antiquior] inceperit, quod alter [Flavius Gira, niſi fallimur, appellatus] multo plus auxit, &, pene dixerim, perfecit. Etenim id indicat ipſa, quæ circa horum & nomen, & cognomen vertitur lis; cum pyxidis nauticæ inventorem alii Ioannem, Flavium alii appellent: cognomine vero Giram nonnulli, Gioiam alii: quod valde commode expli-

(*a*) *Apud Morery* (*ad verbum* Gioia Flavio) *allegantur Parthenius Giannetaſius*, *Hortellius*, *Blondus*, *Ferrarius*, *Philander*, *Guillelmus Laurus*, *Baudran*, *Brietius*, *Rey*, *Alphonſus Laſor a Varea*, *Thomas Bozius*, *Gyraldus*, *Gerardus*, *& Ioannes Voſſius*, *Leander Albertus*, *aliique etiam*, *quibus iungas volo clariſſ. viros Hyacinthum Gimma*, *& Gregorium Grimaldum*, *quorum poſtremus*, (*nam laudatiſſimam Gimmæ elucubrationem nondum videre potui*) *quorum*, *inquam*, *poſtremus hoc ſuper argumento doctiſſimam*, *uti iam dixi*, *edidit Diſſertationem*, *eamque* (*quod pariter dixi*) *Hetruſcæ academiæ Actis inſeruit* (tom. 3 pag. 195, & ſequentibus) *in qua quidem alios adhuc allegat*.

explicas, ſi duos agnoſcas, cives ambos amalphitanos, & de pyxide nautica præclare meritos: quorum Ioannes unus, Flavius fuerit alter, unus Giræ, Gioiæ alter cognomine. Favet quoque ſuſpicioni huic noſtræ virorum præclariſſimorum auctoritas, e quibus Ricciolium & Brietium ſeligo, eruditos perinde atque accuratos ſcriptores. Etenim hæc tradit Brietius (*a*). *Hoc anno inventa eſt pyxis nautica a Flavio quodam amalphitano. Non deſunt tamen, qui antea excogitatam tradant a Ioanne Gioia item amalphitano, cuius beneficio novum orbem detectum habemus, & veterem accuratius &c.* Ricciolus vero ſcripta hæc reliquit (*b*). *Fieri poteſt, ut Ioannes Gioias inchoarit, & Flavius perfecerit pyxidem, diſtribuens ventos in 16, & poſtea in 36, eorumque roſam chartæ rotundæ inſcriptam ſuperadaptarit chalybi magnetico.*

XXIX. Neque vero te eorum auctoritas terreat, qui italis laudem hanc eripiunt, ut anglis tribuant. Dum italis, & litterati, & vulgus ipſum laudem hanc adſcribunt, quis anglorum rationibus adduci poſſit, ut eos italis hac in re præferat? Vocem hanc *buſſola* italicam eſſe contendo. Hinc capſulam, quam cæci deferunt, ut in eam chriſtianorum pietas obulos, quibus alantur, coniiciat, plane italica, itemque vetuſtiſſima, & uſitatiſſima voce *buſſolo* appellamus. Potuit itaque acus, & pyxis nautica *buſſola*, ſeu *buxula* appellari; propterea quia ad eum ferme modum conficeretur capſula magnetem, ſeu acum nauticam continens, quo *buxulos*, ſeu pyxides ſuas itali efformabant: ſeu, ſi vis, propterea quia vetuſtis temporibus ex *buxo* ea capſula conficeretur (*c*).

Neque vero hæc temere dico: id enim fatebitur quiſquis linguam noſtram, eiuſque origines, atque etymologias callet. Audi ab extero quidem, ſed linguæ noſtræ peritiſſimo ſcriptore, num vera eloquar. Menagius is eſt, qui de italicæ linguæ originibus diſſerens in rem præſentem hæc tra-

(*a*) *Ad annum* 1302.

(*b*) *Geogr. & hydrogr. lib.* 10. *cap.* 8.

(*c*) *Ex ligno capſulam, quæ magnetem maritimi itineris ducem contineret, fuiſſe confectam, declarant ea, quæ ex epiſtola Petri Peregrini galli eruit Cabeus antea allegatus:* dum in ligneo vaſe, quaſi in cymbula, *aquis imponitur.*

tradit. „Boſſolo. Vaſetto, *comunemente di legno: da boſſo; co-*
„ *me* πυξὶς *da* πύξος; *perchè per lo più di boſſo ſi facevano i*
„ *boſſoli*. Quintilian. VIII, 6. Eo magis neceſſaria κατάχρησις,
„ quam recte dicimus abuſionem, quæ de non habentibus no-
„ men ſuum accommodant, quod in proximo eſt. Sic: equum
„ divina Palladis arte ædificant.... Seneca de beneficiis (*a*).
„ Quædam etiam ſi vera non ſint, propter ſimilitudinem eo-
„ dem vocabulo comprehenſa ſunt. Sic *pyxidem* & argen-
„ team, & auream dicimus. Boſſolo *pure ſi dice quel vaſo de'*
„ *ciechi fatto ad uſo di ricever le limoſine, ancorchè per lo più*
„ *ſia di ſtagno. Boſſoli chiamano anche i toſcani certi vaſi d'ot-*
„ *tone, co' quali ne' magiſtrati, e nelle adunanze ſi raccolgono i*
„ *partiti. E perchè le boſſole de' naviganti furono da principio*
„ *fatte a maniera di boſſoli, ebbero altresì tal nome; e da' mo-*
„ *derni furono in latino chiamate* pyxides; *ne cangiano il nome,*
„ *perchè adeſſo ſi faccian anche di altre materie*.„ Reliquæ vero voces; ideſt *mariner s' compaſs* tam anglicæ ſunt, quam italicæ: nos enim noſtra ipſa lingua commode dicimus *compaſſo, o ſia circolo de' marinari, o pure marinareſco*. Hinc ſi his tantum fidas, anceps hærebis, num ab italia provenerint, an ab anglia voces iſtæ, ideoque pyxis hiſce vocibus ſignificata.

XXX. Hæc tamen dum profero, non eam demo anglis laudem, quam plerique illis iure, meritoque tribuunt, monentes ſcilicet nonnulla valde utilia antiquo invento fuiſſe ab illis addita: neque enim in ea ſum ſententia, ut putem extremam manum nauticæ pyxidi impoſitam fuiſſe ab amalphitano Gioia: quin immo aio, contendoque præſtantiſſimum hoc, atque utiliſſimum inſtrumentum, ſicut melius profecit, cum ab aſia in italiam deductum fuit, ſic deinceps augmenta alia, & ſi loqui ita volumus, quoſdam perfectionis gradus obtinuiſſe a nationibus illis, quæ ſe plurimum in navigationibus exercent; in quarum quidem numero anglica pleraſque antecellit. Quamquam quis hæc præſtiterit, etiam num in abdito eſt (*b*).

XXXI. Prioribus inventis noſtra hac ipſa ætate addita non-

(*a*) *Lib. V*, 13.
(*b*) *Spectac. natur. tom. VIII pag.* 114 *edition. italicæ*. Ma lo ſteſſo è di queſta invenzione &c.

nonnulla ſunt, profecto non contemnenda. Sic clariſſ. Reaumur novam rationem edocuit, qua ferrum, & chalybs magneticam virtutem imbiberent, ideoque polum reſpicerent, tametſi magnetem ipſum minime tangerent (*a*). Novam conſtruendæ nauticæ pyxidis rationem tradidit egregius Burche (*b*). Alia eodem de argumento repererunt tum Pariſienſi, tum aliis etiam Academiis adſcripti viri docti. Neque omiſſum, ut puto, id fuiſſet a noſtris, niſi illos mercaturæ exercendæ in remotiſſimis oris difficultas a maritimis itineribus prope iam alienaſſet; huc adde noſtros minus eſſe avidos.

XXXII. Habes, Zanotte doctiſſime, quid ego hoc ſuper argumento ex variis, eiſque probatis auctoribus didicerim. Enitere tu, ut academici alii, qui me longe ingenio, atque exercitatione præſtant, id exequantur, quod hoc ſuper argumento adhuc diſcendum ſupereſt; neque ſolum de inventore quærant, ſed etiam rei naturam, ſi fieri poteſt, explicent: cur ſcilicet magnes, ſeu acus nautica polum reſpiciat, & ad eum veluti feratur. Cur etiam in hoc reſpectu, ſeu (ſi appellare ita volumus) in hac *tendentia*, non æque conſtans ſit, ſed quaſdam veluti patiatur viciſſitudines, & inconſtantiam præferat. Plurima hac in diſputatione ingenioſe inventa ſunt, & litterarum monumentis tradita. Nondum tamen, ut pulchre noſti, litteratorum aviditas expleta eſt. Conqueruntur nimirum quod adhuc multa deliteſcant, quæ in lucem, philoſophorum diligentia, & diuturnum ſtudium proferre tandem poſſit.

XXXIII. Cum hæc ad te ſcriberem, Zanotte mi, vicem aliquam beneficii mihi conlati tibi referre ſtudui, & rependere nonnullam pro optimo nuntio gratiam. Sed quas tandem academiæ ipſi aut referam, aut rependam? Viginti ab hinc & amplius annis, philoſophicis ſtudiis poſtremum vale dixi; neque iis nunc dare operam vel levem poſſum, qui curis, ab optimis ſtudiis prorſus remotis, ut noſti, diſtineor, & pene opprimor. Ne tamen ingratus appaream, id academiæ dono dare in animo habeo, quod illi, niſi fallor, acceptum erit, & gratum. Inter multa vetuſta

---

(*a*) *Vide Acta academiæ pariſienſis ſcientiarum ſtudiis addictæ anno* 1723 *pag.* 1.

(*b*) *Vide Acta* 1733 *eiuſdem academiæ*.

tuſta inventa, quæ noſtris temporibus funditus periiſſe viſa ſunt, illud etiam iure recenſetur, quo nobili, & vividiſſimo auro tenui lamella ducto, & coloribus præſtantiſſimis veteres ornare codices a ſe conſcriptos conſueverant. Aut prorſus periere artes hæ, aut ita labefactatæ ſunt, ut fere deſperent, qui libros nunc affabre excribunt, eos huiuſmodi decorare ornamentis. Ego vero in vetuſto codice inveni, quomodo deperdita inventa iterum in lucem edam. In eo quippe multa, & varia artificia proponuntur, quæ ſi ſequamur, ſperandum eſt, ut egregiis lamellis aureis ornemus codices, & colores efformemus vividiſſimos, & conſtantiſſimos, quibus quidem aqua gummi dilutis, quas volumus formas, figuraſque in iis exprimamus. Auctoramentum, & veluti pignus eventus promiſſioni plane reſpondentis in experimento iam ſumpto habeo. Petronius quippe a Vulpe optimi Lælii, egregii typographi, filius, idemque optimus adoleſcens a me exoratus, partem aliquam executus eorum eſt, quæ præſcribuntur in meo codice, iamque lamellam auream hædinæ pelli ad ſcribendum præparatæ affabre appinxit, & cæruleum colorem ex æris rubigine haud difficili conatu expreſſit. Hæc duo tantum pertentavit. Alia plurima codex, quem dixi, continet, commoda illa quidem, & non minus venuſtatis, quam utilitatis habentia. Codicem ipſum, ſi iubes, ad te mittam. Tu inter academicos, quibus ea, quæ deſcribuntur, placuerint, laborem partire, laudemque (niſi me fallit animus) non modicam conſequentur. Utinam ego quoque huiuſmodi laborum particeps eſſe poſſem. Eniterer ſane, ut noſtra ætas, ac civitas antiquioribus ſeculis, & Germanis civitatibus (a quibus fortaſſe maior horum inventorum pars derivata eſt) minime invideret; ſed vetat, quod iam dixi, & tu probe noſti, impoſita nobis dura, graviſque provincia, qua iubeor alieno commodo, ſtudiiſque haud ſuavibus inſervire. Tu qui litterario otio frueris, eo utere, noviſque lucubrationibus, ac conatibus nomen tuum iam illuſtre ſatis & celebre, atque adeo academiæ, ac civitatis noſtræ, ornare, atque amplificare adhuc perge. Vale.

ABUNDII COLLINÆ

De acus nauticæ inventore.

IN penetrabilitatem lucis, de qua ſuperiore anno, plura congeſſeram, quæ veſtro iudicio, Sodales lectiſſimi, atque ornatiſſimi, ex condicto ſubiicerem, cum Ioannis Chryſoſtomi Abbatis Trombelli, viri doctiſſimi, atque humaniſſimi diſſertatio de nauticæ pyxidis inventione, multiplici, iuſtoque omnium plauſu perlecta eſt. Neque profecto aliter ab hoc cœtu veſtro, omnium, quæ literis continentur, æquiſſimo æſtimatore, excipi debuit oratio, quam & dicentis auctoritas, & doctrinæ, atque eruditionis præſtantia, & argumenti gravitas, atque iucunditas maximopere collaudabant. Utinam vero tum temporis invidentia, tum incuria ſcriptorum, tum etiam hominum ambitione, argumentum hoc idem non illa caligine offunderetur, quam hactenus vincere, ac penetrare cuilibet, perſpicaciſſimo licet, oculo non conceditur; ingenti enim lite compoſita, diſſertationem Trombellus certe dediſſet numeris omnibus abſolutam. At quoniam quæcumque hac de re dici poſſunt in opinione ſunt poſita, licet probabiliſſima a quopiam in partem alterutram afferantur, videbitur ſemper alteri in ſententiam contrariam adduci poſſe probabiliora. Hinc factum eſt, ut licet leviſſimum quid ſolummodo obiecerim de Salomonis ophiræ loco (ne ſcilicet academicorum exſpectationi omnino deeſſem) intimo tamen ſenſu, tum circa inventionis tempus, tum circa modum, quo nauticæ pyxidis uſus in europam invectus a viro clariſſimo dicebatur, utique diſſentirem. Cum vero me officii cauſſa Trombellus, ad urbanitatem videlicet natus homo, inviſiſſet; cumque de iſta opinionum diſcordia ſermo inter nos amiciſſimus haberetur, ipſe rem ſibi gratam facturum me dixit, ſi quod de hac ipſa quæſtione ſentiebam, ſcripto committerem. Parui quam libenter, meamque lucubrationem, qualiſcumque ea demum

ſit, vobiſcum communicare decrevi, pro veſtra benignitate futurum ſperans, ut argumentum a vobis alias cumulatiſſima laude receptum, ab indiſerto nunc homine, longe minori doctrinæ apparatu tractari rurſus patiamini; nam quamvis phyſicam ſcientiam non illuſtret, tamen ad phyſicæ hiſtoriam maxime pertinet. Perinde autem dicam, ac ſi Trombelli diſſertationem minime audierim, ut eius nutibus obſequi potius videar, quam opinionibus adverſari.

Eratoſtheni ſuccenſet acriter Strabo, (*a*) quod *vetuſtiſſimos, aut piraticam, aut mercaturam exercentes, non egreſſos in pelagus, ſed Iaſonis modo præter littora permeaſſe* putaverit, affirmatque *veteres ipſos maritima itinera longius emenſos, quam poſteriores*. Bacchum, Herculem, Theſeum, Ulyſſem, alioſque, quos ipſe memorat, omittamus, quorum navigationes tum nimia caligine temporum circumfuſæ, tum poetarum figmentis obtectæ ſunt. Phœnices certe *extra columnas herculeas egreſſi*, ut idem Strabo (*b*) auctor eſt, *condidere urbes ad maritimam oram aphricæ, & in mediterraneis, paullo poſt troiana tempora*. In britanniam præterea, in galliam, quin & in thulem ipſam colonias deduxiſſe probabiliſſimum eſt; ſed hanc in quæſtionem Cambdenum legas, & Samuelem Bochartum; nec enim quidquam, quod non uſquequaque exploratum ſit, conſectari volo. Profecto dubitatione illud caret, quod habet laudatus Strabo, a caſſiteridum nempe inſularum incolis ſtannum phœnices mercari ſolitos (*c*), *eoſque ſolos a Gadibus miſſos hanc negotiandi viam aggreſſos; cum interim curſum iſtum cunctos mortales ipſi celarent*. Sive autem poſt artabrum promontorium fuerint caſſiterides, ubi eas collocant idem Strabo, Solinus, & Plinius; ſive inter hyberniam, atque britanniam, ut ex Cambdeno mavult Cellarius, (*d*) inſignem ſemper navigationis curſum deſignant. Quid demum quod Nicaonis primi ægyptiorum regis imperio, e mari rubro ſolventes, aphrica tota circumluſtrata, phœnices ipſi per fretum herculeum traductis navibus, in ægyptum regreſſi ſunt; quod Herodotus lib. quarto diſerte docet (*e*), aphricam ipſam animadvertens tunc primum innotuiſſe?

Con-

(*a*) *Lib.* 1 *edit. Baſil. p. m.* 38. (*b*) *ibid.* (*c*) *Ad calc. lib.* 3 *p. m.* 122. (*d*) *lib.* 2 *cap.* 4 *n.* 83. (*e*) *Herod. lib.* 4 *cap.* 42.

Contigit iſta totius aphricæ circuitio trecenteſimo ſexto decimo circiter anno ante Chriſtum humani generis ſervatorem; verumtamen multo ante tranſvecto erythræo longe, lateque per orientalem oceanum vagabantur. Nam Salomonis ævo phœnicum peritia nautica in tantum celebrabatur, ut ipſe tyriis naucleris in ophiritica expeditione uſus fuerit, eidem navigationi iam ante aſſuetis (*a*). Ophiram videlicet in aurea cherſoneſo ſola, & in circumſtantibus inſulis inveniendam exiſtimo, tum quod merces omnes ad Salomonem allatæ hac una in regione inveniantur; tum quod ophir, aliique Iectani filii loca orientalia occuparint (*b*) [ex Ophir enim Ophira, ſicuti ex Edom Edumæa, ex Chanaan Cananæa, atque Illiricum ex Illirico Cadmi filio] tum demum quod phiſon, ſeu ganges, omnem terram evilath, *ubi naſcitur aurum*, circuire dicatur in ſacris literis (*c*), Evila vero fuerit frater Ophir. Hæc autem obiter; cum evincere id tantum nitar antiquos ad valde longinqua loca navigia impuliſſe, quod luculentius imo appareret, ſi cum pleriſque vel in america, vel in hiſpania ophiram requirerem (*d*). Ceterum ophiritica hæc navigatio per Salomonis poſteros culta fuit; nam ita legimus tertio Regum (*e*): *Ioſaphat fecerat claſſes in mari, quæ navigarent in ophir propter aurum, & ire non potuerunt, quia confractæ ſunt in aſiongaber.* Hinc interceptæ eiuſcemodi navigationes; nec propter bella, tum domeſtica, tum externa, ſubſecutaſque hebræorum captivitates impoſterum revocatæ.

Sed de navalibus phœnicum, atque hebræorum expeditionibus ſatis multa. Complures alias ſubiicerem ab aliis gentibus factas; verum ne multis vos morer, omitto; legi enim poſſunt apud (*f*) Ramuſium, (*g*) Furnerium, (*h*) atque Ricciolium. Attingam tamen nonnulla, quæ magis probent antiquos impellere in medium oceanum naves conſueviſſe. Cum Hanno cartaginenſium dux, cuius celebratiſſimam naviga-

viga-

(*a*) *V. Ricciol. Geog. Ref. lib.* 3 *cap.* 20 *n.* 3.
(*b*) *Gen.* 10, 30. (*c*) *ibid.* 2, 11.
(*d*) *V. Mart. Lipen. de ophirit. Salom. navig. cap. 6.*
(*e*) *cap.* 22 *n.* 49. (*f*) *Ramuſ. t.* 1.
(*g*) *Fournier. hydrogr. lib.* 5.
(*h*) *Ricciol. geogr. ref. lib.* 3 *cap.* 20.

vigationem italicam fecit Ramuſius (*a*), occidentalia aphricæ littora claſſe luſtraret, calore nimio perterritus vela dedit, atque navigia in profundum mare per integros dies quatuor invexit. Cartaginenſes iterum aphricanas eaſdem oras cum legerent, tradit Diodorus (*b*) tempeſtate actos ad athlantici oceani inſulam deveniſſe, multorum dierum itinere a lybia diſtantem, ex qua cum in patriam, conſulto utique, ac data opera rediiſſent, ne propter amænitatem loci cartaginenſes, patria relicta, eo convolarent, rem occultarunt. Inſulam iſtam ex facili americam dixeris; & ad eam reſpexiſſe etiam Senecam in Medea (*c*), ubi oceano vincula rerum laxante, tellurem ingentem dixit poſt multa ſecula apparituram, detegendoſque orbes novos. Terras videlicet ævo illo paucorum navigationibus notas, vulgari aliquando, atque contrito curſu adeundas prudenter exiſtimavit, & poetarum more conjecturam hanc ſuam tamquam oraculum venditavit. Sed innotuerint ne romanis occidentales indiæ, vel non innotuerint, parum refert; cum eoſdem romanos & caſſiterides adiiſſe, & britanniam claſſe circumnavigaſſe exploratiſſimum ſit; orientales vero indias in tantum illis innotuiſſe, ut ad eaſdem iter noſtra hac ætate vix ſit luſitanis, ac batavis uſitatius. Teſtatur Strabo (*d*) naves centum viginti Aelio gallo ægypti præfecto *ex muris portu ad indiæ tractus enavigaſſe*; hanc vero totam romanæ claſſis navigationem, incredibili reipublicæ quæſtu quotannis factam, ita deſcribit Plinius (*e*), ut naves ipſas compendii cauſſa longius a maris ora, atque in profundum actas oſtendat. Quid plura? Cum de navigationibus verba faciunt hiſtorici veteres, & poetæ, iam tum altum pelagus homines tenuiſſe aperte declarant. Ita Troiani, ut cetera omittam, cum exciſo ilio in italiam venirent, (*f*)

.... E conſpectu ſiculæ telluris in altum
Vela dabant læti.

Atque

(*a*) *T.* 1 *pag. m.* 114. *V. etiam Plin. lib.* 11 *cap.* 67.
(*b*) *Diod. lib.* 5. (*c*) *Act.* 2 *extrem.*
(*d*) *Strabo lib.* 3 *p. m.* 122. *Tacit. Agric. cap.* 10. *V. Ramuſ. T.* 1 *pag. m.* 371. *Strabo lib.* 2 *p. m.* 83.
(*e*) *Plin. lib.* 6 *cap.* 23.
(*f*) *Virgil. Æneid. lib.* 1.

Atque Didonem fugiens (*a*)

..... medium Æneas iam claſſe tenebat
Certus iter, fluctuſque atros aquilone ſecabat.

Fuerunt igitur & longiſſimæ, & minime litorales antiquorum navigationes, quæ, ſi quid iudico, neque volatu emiſſarum avium ad terras cognitas remeantium, nec ſimplici ſolis, & reliquarum ſtellarum obſervatione, nec denique ſcientia ſola ventorum, ſtatis temporibus ad certas aliquas plagas ſpirantium perficerentur. Validiore ſubſidio opus erat; quod unde repeti poſſet, ſi vim directivam magnetis excipias, plane non video. Neque profecto veteres nautas ſubſidio huiuſcemodi deſtitutos recte quis dixerit, eo quod antiquorum ſcripta, cum attractivam mirifici iſtius lapidis facultatem commemorent, directivam prorſus omittant. Cum enim poſterior hæc vis potiſſimum ad rem nauticam referatur, græcorum, quod ſciam, nemo, inter latinos vero unus Plinius nonnihil de nautica facultate tractavit. Hinc cum vel ipſam græcarum, ac romanarum navium ſtructuram pænitus ignoremus (non enim poſſumus quid biremes, triremes, quadriremes &c. hepteres, hocteres fuerint intelligere) nihil profecto mirum, ſi quam tenerent in ipſis navibus gubernandis, ac dirigendis ratio nos latet. Sed neque compertum eſt mentionem magnetis ad uſus nauticos in veterum ſcriptis omnino deſiderari; nam [Plauti verſoria relicta, quam, ut antiquis notitiam omnem, atque uſum pyxidis nauticæ abripiant, complures nimium fortaſſe detorquent] Vincentius bellovacenſis, & Albertus magnus in quodam opuſculo de lapidibus, quod Ariſtoteli tribuunt, hæc ſe legiſſe teſtantur (*b*): *Angulus magnetis cuiuſdam eſt, cuius virtus convertendi ferrum eſt ad zoron, hoc eſt ſeptentrionem, & hoc utuntur nautæ; angulus vero alius magnetis illi oppoſitus trahit ad aphron, ideſt polum meridionalem &c.* Aſt Ariſtoteli opuſculum hoc de lapidibus falſo tribuitur: eſto. Aſt verba illa zoron, & aphron ſunt penitus inaudita; hoc quoque dabo; dummodo librum hunc ipſum quocumque auctore, ac qualibet lingua conſcriptum antiquitatis fuiſſe tantæ non neges, quanta requirebatur, ut Ariſtoteli a ſcripto-

---

(*a*) *Ibid. lib. 5 init.* (*b*) *Vinc. Bellov. ſpec. t. 1 lib. 8 cap. 19 Alb. M. de mineralibus tract. 2 cap. 6.*

ptoribus minime contemnendis, qui ad tertii decimi ſeculi medietatem florebant, prudenter tribueretur, & ſimul (quod primum eſt) fatearis non tamquam novi alicuius inventi, ſed tamquam iam tum vulgatæ cuiuſdam rei magnetis mentionem ad uſus nauticos illic haberi. Si libet, in peius etiam ruamus; &, quod mentis integer nemo dixerit, concedamus hunc de lapidibus librum aut recens conſcriptum, aut funditus ementitum. Vigebat igitur apud navium gubernatores magneticæ acus uſus tempore ſaltem Vincentii bellovacenſis, quod accuratius animadvertere debuiſſent, qui circa annum milleſimum trecenteſimum ſecundum nauticæ pyxidis inventorem faciunt Ioannem Gioiam amalphitanum.

Re tamen vera magnetis vim directivam multo ante Vincentium bellovacenſem fuiſſe cognitam tum ex eo patet, quod Sidonius Apollinaris ſeculi quinti ſcriptor (*a*) illam commemoraverit, tum vero maxime ex eo, quod valde antiquiora fuerint horologia ſciotherica horizontalia, quæ, ut recte horas indicent, per acum magneticam diſponuntur. Refert (*b*) Ditmarus Gerebertum, qui poſtea Silveſter ſecundus fuit, Othonem imperatorem adiiſſe, & cum eo diu converſatum, in Magdeburgo horologium feciſſe, *illud recte conſtituens, conſiderata per fiſtulam quadam ſtella nautarum duce*, quo loco prorſus ab re fuiſſe Furnerius (*c*) animadvertit polarem ſtellam conſpicere, niſi illius ad meridianum appulſus cognoſceretur, ad quod ſimplex tubus minime conducebat, optime vero pyxidula acu magnetica inſtructa. Præterea Kircherus (*d*) apud Salomonem cretenſem in horis monſtrandis ferream uſurpatam lanceolam ſe reperiſſe teſtatur. In geographia item nubienſi, Rogerii primi ſiciliæ regis ætate conſcripta, hoc eſt circa annum centeſimum quinquageſimum ſupra mille, nauticæ pyxidis veluti quædam veſtigia exhibentur; poſt annos vero circiter quinquaginta, Satyricus ille *Guyot de Provins* (*e*) in poemate ſuo lapidis huius vim directivam clariſſime deſignavit, atque Hu-

(*a*) *ex Fourner. lib.* 11 *cap.* 9.
(*b*) *Chronic. cap.* 6 *ex Ciaconio in Silv. II.*
(*c*) *Hydrog. lib.* 11 *cap.* 9.
(*d*) *Ars Magn. lib.* 1 *cap.* 6.
(*e*) *ex Furn. & Ricciol. loc. cit.*

go Bertius, ad ea ferme tempora, refert naucleros magnetem vitreo vaſe aquæ innatantem continuiſſe, ut noctu polum cognoſcerent. Nonnullorum quidem ex recenſitis auctoribus obſcura videri loca minime inficior; ſed quoniam nemo ætate illa nauticæ artis præcepta ex profeſſo conſcripſit, id ipſum, quod nunc in ſcriptoribus, obiter id attingentibus, videantur obſcura, rem, de qua agimus, vulgatiſſimam tunc fuiſſe fortaſſis probat; eſt enim in omnium more ea, quæ notiſſima ſunt, verbo unico, & quam poteſt leviter deſignare.

Ceterum nauticæ pyxidis recordatio ſi nulla propemodum in ſcriptoribus ævi medii, vel infimi inveniretur, nihil mirarer. Nam, romanorum imperio ad perniciem vergente, ex ſeptentrione in europam reliquam pæne univerſam egreſſæ immaniſſimæ gentes, & clariſſimas urbes plurimas devaſtarunt; & divina, ac humana omnia in diſcrimen deterrimum adduxerunt. Obrutæ tunc ſqualore, luctuque artes omnes, literæ profligatæ, ſublata commercia, navigationes omiſſæ; cumque per annos integros quadringentos deteſtabilis peſtis hæc perduraſſet, ſubſequentia totidem ſecula proſtratas res, atque perditas ad ſtatum priſtinum revocare non potuerunt. Evaneſcentibus tandem paullatim tenebris, novamque in faciem compoſita europa, dimiſſas cum orientalibus indiis navigationes italia repetiit, & exoticas merces per ſinas, atque arabes ad mare rubrum delatas, venetis maxime, ac ianuenſibus navigiis excipiens, in omnes alias europæ partes diſtribuebat.

Tam longo tamen temporis intervallo nauticam pyxidem non omnino delituiſſe confirmant præter allata nuperrime teſtimonia, longiſſimæ nonnullorum navigationes, quas vel in illa calamitate temporum factas ex planiſpherio Camaldulenſi coniicio. Planiſpherium autem camaldulenſe tabulam voco univerſam veteris orbis faciem repræſentantem, tertiodecimo ſeculo factam, atque venetiis in monaſterio noſtro Sancti Michaelis maxima cura adſervatam. De celeberrimi iſtius planiſpherii aut auctore, aut origine cum apud plures (*a*) varia legiſſem, eaque pugnantia inter ſe, a D. An-

(*a*) *V. Ramuſ. T.* 2 *in præf. ad itin. M. P. V.*; *Fortunium. Hiſt. Camald. part.* 2 *lib.* 4 *cap.* 23; *Vital. Terraroſſa Riſleſ. Geog. cap.* 2.

D. Angelo Calogerà ordinis mei monacho valde erudito, & opuſculorum collectione notiſſimo, venetiis degente, quid tandem hac de re eſſet, per literas ſciſcitatus ſum. Reſcripſit hic falſa omnia quæcumque de planiſpherio hoc tradebantur. Auctorem tabulæ camaldulenſis familiæ hominem nomine Maurum fuiſſe. In tabula ipſa totius aphricæ littora deſignari, quodque poſt annos ſaltem ducentos a Vaſco Gama detectum, & *bonæ ſpei promontorium* vocatum fuit, illic *Capo de Diab* nominari. Hauſiſſe Maurum quæcumque pinxerat ab extraneis hominibus venetias tunc temporis undique convolantibus, cuſumque in honorem eius numiſma, cum hac epigraphe: *F. Maurus S. Michaelis Morianenſis de venetiis, ordinis Camaldulenſis Coſmographus incomparabilis*. Hæc quidem ille. Quod ſi tunc temporis erant, qui toti aphricæ circumfuſa littora aut verbis, aut graphide exponerent, ut non incondite omnino, imo etiam hercle, ratione temporum habita, & eleganter, & ſatis appoſite ab alio in geographicas mappas traducerentur, navigationibus temporibus proxime ſuperioribus inſtitutis, erit id utique tribuendum; quæ cum eiuſmodi ſint, ut pyxidis uſum omnino requirere videantur, cur, quæſo, inſtrumenti huiuſce pulcherrimi inventum ad poſteriora tempora referemus? Sane qui Marci Pauli veneti itinera attente perlegerit, a quo vel confectum, vel ex ſinarum imperio venetias allatum communiter putant planiſpherium hoc ipſum, aut eius autographum, quique primus europæorum iaponias inſulas adiit (*a*), atque in oceano indico eſt quam latiſſime pervagatus, ultro fatebitur eius navigationes vix abſque pyxide, ac ne vix quidem perfici potuiſſe.

Hinc porro affirmandi anſam complures arripuerunt nauticam pyxidem a ſinis acceptam per Marcum hunc venetum in europam primo delatam. Pro certo namque illis erat magnetis uſum in nautica re apud ſinas a multis iam ſeculis viguiſſe. Refert Martinius ſinicæ hiſtoriæ auctor (*b*) Cheveunghum ſinarum imperatorem cochinchinenſi legato machinam dono dediſſe, quæ ſua ſponte reſpiciens auſtrum monſtrabat iter, ſive terra illud, ſive mari facientibus.

 Eam

(*a*) *Itin. lib.* 3 *apud Ramuſ. t.* 2.
(*b*) *Hiſt. Sinic. lib.* 4.

Eam *chinan* appellari, qua voce nunc etiam ſinæ magneticam acum deſignant, *argumento haud dubio eius uſum illo iam tempore* (ſeculis ſcilicet amplius, quam undecim ante Domini adventum) *apud ſinas inventum, ad alias inde nationes tranſiviſſe. Hanc machinam ducem ſequuti cochinchinenſes, unius anni ſpatio domum rediere.* Martinio Iſaac Voſſius, ut alios taceam, conſentit, qui præter modum ingenium, atque doctrinam ſinarum extollens, acutus alias, ac ſollers vir, ita ſcribere non eſt veritus (*a*): *Si quis omnium, quæ ſunt, aut olim fuere gentium præclara ſimul conferat inventa, tanta tamen, & talia non erunt, quin longe inveniantur plura, & meliora, quæ a ſolis reperta fuere ſeribus.* De ſcientiis, inventiſque ſinarum reliquis conſulatur Anonymi diſſertatio (*b*) ultima in duorum arabum ad ſinas itinera, ſeculo octavo inſtituta, quo loco gentis iſtius ſcientiæ, ac inventa longe iuſtiori trutina perpenduntur. De re vero nautica, & pyxidis uſu cum antiquiſſimæ ſinarum expeditiones ad orientalem aphricæ oram, & ad S. Laurentii inſulam infirmo admodum fundamento, conſuetudinum nempe quarumdam, morumque apparenti conformitate, nitantur; illorum vero ad perſicum uſque ſinum navigationes [quod aperte deducitur ex modo laudatis arabum itineribus] (*c*) littorales fuerint, idcirco, ut antiquitus illos nautica pyxide inſtructos credam, minime adducor. Maritimum certe ſinarum iter ad indias, ut nimis longum ab europæis reiectum eſt; licet autem in Marco Paulo veneto (*d*) inveniam ſinenſes nautas moluccas adire, monet is tamen propter itineris magnitudinem, atque difficultatem admodum raro expeditionem hanc fieri, annoque toto ſolum compleri. Præterea ſi penes ſinas pyxidem nauticam ipſe primo inveniſſet, rem tantam diligens, atque ſincerus homo nequaquam reticuiſſet. Cuiuſmodi vero machina illa fuit a Cheveungho cochinchinenſi legato donata, qua fretus, ut in finitimam cochinchinam rediret, integrum annum inſumpſit? Sed rem conficiat Kirckerus (*e*): *Non deſunt*, inquit, *qui*

(*a*) *De magnit. Sin. Urb. cap.* 14.
(*b*) *Pariſ. apud Coignard.* 1718.
(*c*) *Apud Anon. cit. pag.* 142. (*d*) *Lib.* 3 *pag.* 4.
(*e*) *Ars magn. lib.* 1 *cap.* 6.

qui velint ex china per Paulum Marcum venetum verticitatem magnetis anno milleſimo ducenteſimo ſexageſimo europæ primum innotuiſſe. At quamvis ego ſingulari diligentia rem exquiſierim, ex iis tamen, qui in china fuerunt, quique annales chinenſium optime norunt, nihil de rei veritate certi cognoſcere potui.

Cur vero inſtrumentum tam utile, imo tam neceſſarium a ſinis arabes non accepiſſent, cum quibus a ſeculis iam fere decem arabes ipſi negotiationis nexum iniere? Profecto autem non acceperunt; quandoquidem nullas ab ipſis detectas terras, provincias nullas maritima expeditione devictas, nullam navigationem ex iis, quas vulgo vocant *di lungo corſo* ſuſceptam oſtendes, quo iure aliquo ante inſtitutam cum europæis conſuetudinem quicumque illis uſus magneticæ pyxidis vindicetur. Hiſce potiſſimum argumentis Bergeronium antiquam directivæ magnetis vis cognitionem arabibus tribuentem, ſtrenue, copioſeque confutat Anonymus, de quo ſupra (*a*), ſubiiciens turcas, arabes, perſas pyxidem nauticam originali nullo vocabulo, ſed italico *bußola* diu nuncupaſſe; argumento minime dubio nationes has omnes, italis utique, venetis autem ſignanter, ac ianuenſibus, commercii cauſſa ægyptum, ac ſyriam navigatione multa adeuntibus, pyxidem ipſam acceptam referre, ut ab ipſis etiam & hydrographicas tabulas, & longioris navigationis præcepta acceperunt. Nec enimvero pyxidis uſus in nautarum indici oceani vulgus illico exivit; nam Nicolaus de Comitibus (*b*), qui ante ſeculi quintidecimi medietatem in eodem oceano verſabatur, hæc habet: *I naviganti dell' India ſi governano con le ſtelle del polo antartico.... perchè rare volte veggono la noſtra tramontana, e non navigano col boſſolo, ma ſi reggono ſecondo che trovano le dette ſtelle o alte, o baſſe.* Eodem labente ſeculo Vaſcus Gama bonæ ſpei promontorium prætergreſſus, dicitur quidem in orientali aphricæ littore naucleros vidiſſe europæorum more pyxide utentes; at florentinus quidam patricius, qui ab eadem expeditione redeuntem Gamam comitabatur, ſuæ navigationis hiſtoriam conſcribens, teſtatur (*c*) mauros ſeptentrionem non

(*a*) *Diſſert. de l' entrée des Mahom. dans la Chine.*
(*b*) *Apud Ramuſ. t.* 1 *pag. m.* 343 *verſa.*
(*c*) *Ex eod. t.* 1 *pag. m.* 120 *verſa.*

non obſervare, ſed ligneorum quorumdam quadrantum ope, naves dirigere; poſt pauca vero veluti rem clarius explicans (*a*) Nauclerum quemdam hebræum alexandrinum inducit ipſiſſima hæc verba dicentem: *Navigano in quelli mari ſenza buſſolo, ma con certi quadranti di legno, che pare difficil coſa, e maſſime quando fa nuvolo, che non poſſono veder le ſtelle.* Porro Nauclerum hunc a rege Melindæ acceperat Vaſcus Gama (*b*) itineris ducem in indico oceano; italicam autem linguam dicitur calluiſſe, ut ipſum cum italis diu converſatum, pyxidis cognitionem, atque uſum, inter aſiaticos, aphricanoſque nautas nondum vulgatum, ab iiſdem italis accepiſſe cognoſcas. Denique Ludovicus Barthema concivis noſter, qui decimo ſexto ineunte ſeculo ægyptum, ſyriam, arabiam, perſidem, indiamque univerſam diligentiſſime perluſtravit, ac reliquis omnibus, teſte Ramuſio (*c*), accuratius deſcripſit, veluti peculiare quiddam animadvertit, quod dum ad inſulam iavam contenderet [*d*], *il padrone della nave portava la buſſola ad uſanza noſtra, & aveva una charta, la quale era tutta rigata per lungo, e per traverſo.* Quo bononienſis ſcriptoris teſtimonio diſſertationem hanc meam libens concludo, quòd intelligitis urbem hanc noſtram, quæ viris in optimo quolibet rerum genere ſpectatiſſimis abundavit, prænobilis etiam viatoris laude minime caruiſſe.

HERA.

(*a*) *pag.* 121. (*b*) *ibid. pag.* 119.
(*c*) *Præfat. in Lud. Barth. t.* 1 *p. m.* 47.
(*d*) *Itin. Lud. Bart. lib.* 7 *cap.* 27 *ap. Ram. t.* 1.

HERACLITI MANFREDII

De viribus ex elaſtrorum pulſu ortis.

NOn ignoratis profecto, Sodales clariſſimi, quæ mihi perſona in illo dialogo impoſita fuerit, qui in prima parte ſecundi tomi commentariorum veſtrorum de vi corporum viva eſt editus; non enim dubito, quin veſtrum quiſque eum ſæpius legerit, vel propter rei, de qua agitur, gravitatem, vel propter ſummam, qua ſcriptus eſt, urbanitatem, atque elegantiam. Inductus ego in eo ſum, quaſi carteſianæ opinionis circa vim vivam deffenſor; & ea ſane mihi tribuuntur, quæ vel ſi numquam dixiſſem, tamen dixiſſe vellem, cum tam ſuaviter, urbaneque dicantur.

Sunt autem, qui me, quaſi ille ipſe Heraclitus ſim, qui in dialogo illo diſputat, interdum rogent, quærantque, cur, cum ibi tamquam certiſſimum aliquid poſuerim: *elaſtrum idem, ſive eamdem elaſtrorum ſeriem, ſi duo corpora inæqualium maſſarum pellat, velocitates iis tribuere, maſſis ipſis reciproce proportionales:* cur, inquam, cum id poſuerim, non idem etiam demonſtraverim. Quid enim, inquiunt illi, ſi id negetur? Et ſane negatur a nonnullis.

Quoniam ergo pro illo Heraclito accipior, conabor pro illo reſpondere; eaſque rationes adducere, quas ipſe, quantum coniicere poſſum, adduceret, ſi tueri ſe vellet. Contenderet autem, ut credo, illud ipſum theorema, cuius demonſtratio quæritur, ex Bernulliana ratione ſtatim & neceſſario conſequi; neque propterea demonſtrandum in eo ſermone fuiſſe, qui totus eſſet Bernullianorum cauſa ſuſceptus. Id paucis exponam, rem totam ab initio repetens.

Sed ante illud dabitis, ut de vi corporum viva breviter diſſeram, demonſtrationem proferens, quæ ad probandam Carteſianorum ſententiam, mutatis pauciſſimis ex Bernullio

ipſo

ipſo ſumi poteſt. Id cum fecero, ad rem ipſam propius accedam, oſtendamque primum, ſeriei cuiuslibet velocitatem ex Bernullianorum opinione eamdem eſſe debere; deinde propoſitum theorema expediam pauciſſimis. Hæc exſecutus finem faciam.

Exordiar ab eo, quod primo loco propoſui, Sodales præclariſſimi, de vi corporum viva. Sint duæ elaſtrorum ſeries inæquales, altera verbigratia ex tribus, altera ex duodecim elaſtris conſtans. Utraque ex una parte in fulcrum immobile nitatur, ex altera libera ſit. Utraque, ſive ob adiectum retinaculum immota maneat, ſive retinaculo ſublato accipiat motum & reſiliat, perpetuo æqualiter aperta conſideretur, itaut tum in prima tum in ſingulis ſucceſſivis apertiunculis elaſtra cuncta, tum huius, tum illius ſeriei, æqualem in utraque angulum cruribus ſuis faciant. Demum ambæ, dum ſe ſe aperiunt, protrudant una unum mobile, altera alterum, ſed æqualia. Preſſiones illas, quas ambæ hæ ſeries faciunt, cum elaſtra unius ad eumdem angulum dilatata ſunt, ad quem dilatata ſunt elaſtra alterius, voco preſſiones homologas.

Dico itaque, preſſionem, qua ſeries una explicando ſeſe urget ſuum mobile, eſſe ad preſſionem homologam, qua ſeries altera urget ſuum, uti eſt directe numerus elaſtrorum ad numerum elaſtrorum, nempe ut tria ad duodecim; ſiquidem ſeriem unam elaſtrorum trium poſuimus, alteram elaſtrorum duodecim.

Quod ſi cui minus arridet, videbimus infra, an res ita ſe habeat. Nunc, quando rem ita ſe habere ſupponimus, dico vires, quas mobile accipit a ternis elaſtris, ubique eſſe ad vires, quas mobile aliud æquale accipit a duodenis, in ratione ſimplicium velocitatum homologis preſſionibus reſpondentium, non in ratione quadratorum earumdem velocitatum.

Placet hoc theorema demonſtrare ea ſupputatione, quam Carteſiani a Bernullio ipſo mutuantur, quamque Bernullius propoſuit in præclaro opere de legibus communicationis motus capite ſeptimo. Nam quamvis Bernullius ibi contrarium probet, Carteſiani tamen unam litterulam uno in loco de ſuo addentes, id quod iure ſe facere poſſe putant, demonſtrationem illam, ſupputationemque totam fecerunt ſuam. Diſputant ergo ad hunc modum.

Re-

Repræſentet linea AC (*Fig.* 1) cuiuslibet ſeriei longitudinem, linea vero BD alterius cuiuslibet ſeriei longitudinem a priore diverſam. Protrudat porro ſeries AC extremo uno C, iuxta directionem CF, mobile quodpiam cuiuſvis figuræ, verbi gratia globum. Altera item ſeries BD extremo D protrudat, iuxta directionem DI, globum alium priori æqualem. Duæ curvæ CML, DNK ordinatis ſuis GM, HN repræſentent velocitates ab æqualibus globis acceptas in punctis G, & H. Sit BD $= a$; abſciſſa DH $= x$; huius differentiale HP, ſive NT $= dx$; ordinata HN $= u$; huius differentiale TO $= du$.

Sumamus nunc abſciſſas, quæ pertinent ad curvam CML, ideſt abſciſſas CG, CE eius magnitudinis, ut habeant ad abſciſſas DH, DP, quæ pertinent ad curvam DNK, eam rationem, quæ eſt inter ſerierum AC, BD longitudines; id enim eſt omnino conſentaneum aſſumptæ hypotheſi de elaſtris, ſive quieſcentibus, ſive reſilientibus, æquali in utraque ſerie angulo dilatatis: & faciamus AC $= na$, ſeu, quod perinde eſt, faciamus, eſſe unitatem (1) ad numerum quemvis (n), uti eſt longitudo BD $= a$ ad longitudinem AC $= na$. Quo caſu factum erit etiam, ut ſint in eadem ratione 1 ad n, tum numeri elaſtrorum utriuſque ſeriei, tum harum ſerierum vis abſoluta, tum vis, quam tranſmittunt in ſuum mobile modo hæc, modo illa ſeries; ſunt enim hæc tria, omnium conſenſu, ſemper proportionalia. His ſic poſitis, erit etiam abſciſſa CG $= nx$; huius differentiale GE $= ndx$. Sit quoque GM $= z$.

Igitur cum ſit AC : CG : : BD : DH, quandocumque ſerierum reſilientium extrema, & globi ab iiſdem extremis pulſi pervenerint ad puncta G & H, omnia elaſtra ſeriei utriuſque erunt æque dilatata: ergo in horum unoquoque erit abſumpta pars æqua elaſticitatis, itemque ſupererit in unoquoque alia pars æqua. Preſſio igitur uniuſcuiuſque elaſtri in globum erit adhuc æqualis. Si ergo ſumma preſſionum, quæ fiunt a ſerie BD in globum delatum ad punctum quodvis H, ideſt ſi preſſio illa, qua urgetur globus tranſiens per punctum H, ſit $= p$; preſſio homologa, ideſt illa, qua globus tranſiens per punctum G, urgetur a ſerie AC, erit $= np$.

Modo incrementum velocitatis globi exiſtentis in H,

ideſt differentiale TO [du], docentibus ipſis leibnitianis, habet rationem compoſitam vis motricis, ideſt preſſionis p, & tempuſculi, quo durante conficitur a globo ſpatiolum HP [dx]. Porro huiuſmodi tempuſculum eſt in ratione directa eiuſdem ſpatioli HP [dx], itemque inverſa velocitatis HN [u], ideſt eius velocitatis, qua idem ſpatiolum [dx] a globo percurritur. Exprimitur ergo analytice dictum tempuſculum per $\frac{dx}{u}$. Quare ducto hoc valore in p, habebitur incrementum velocitatis globi exiſtentis in H, ideſt differentiale TO $= du = \frac{pdx}{u}$. Quod, cum det, $udu = pdx$, integrando dabit etiam $\frac{uu}{2} = \int pdx$.

Ob eamdem ratiocinationem, cum incrementum velocitatis globi exiſtentis in G, ideſt differentiale VD [dz] habeat rationem compoſitam vis motricis, ſeu preſſionis [np] agentis in puncto G, & tempuſculi, quo conficitur a globo ſpatiolum GE, quod tempuſculum ſimiliter analytice exprimitur per $\frac{ndx}{z}$, patet dictum incrementum velocitatis globi exiſtentis in G, ideſt differentiale VD [dz] fore pariter exprimendum ſic, $dz = \frac{nnpdx}{z}$. Quod cum det, $zdz = nnpdx$, integrando dabit, $\frac{zz}{2} = nn\int pdx$.

Ex harum æquationum integralium comparatione colligitur ſequens analogia, $uu : zz :: \int pdx : nn\int pdx$. Quæ analogia, diviſo utroque termino ultimæ rationis per $\int pdx$, tum facta radicum extractione, vertitur in eam, quæ ſequitur, videlicet, $u : z :: 1 : n$, quæ ſane oſtendit, velocitatem [u] globi protruſi a ſerie BD, eſſe ad velocitatem [z] æqualis globi protruſi a ſerie AC, uti 1 ad n; nempe uti vis, quam globus unus accipit a ſerie BD, ad vim, quam globus alter accipit a ſerie AC, quæ ipſa eſt carteſianorum ſententia.

Ana-

Analyſis hactenus propoſita, qua carteſiani ſuam de viribus motricibus ſententiam probant, eadem ipſiſſima eſt, qua ſummus geometra Ioannes Bernoullius probat aliam carteſianis prorſus contrariam ſententiam, ideſt leibnitianam. Idque ſtatim apparebit, ſi hæc ipſa analyſis cum illa conferatur, quam vir celeberrimus eo loco, quem ſupra indicavimus, propoſuit. Unum tantum intereſt inter leibnitianos, carteſianoſque in hac analyſi uſurpanda; quod leibnitiani utriuſque ſeriei BD, & AC preſſiones homologas, quibus duo æquales globi in punctis H, & G ſollicitantur, utrobique exprimunt eodem ſymbolo p, quippe quia cenſent, has preſſiones in ſingulis ſimilibus ſerierum dilatationibus eſſe inter ſe æquales; carteſiani vero preſſiones haſce homologas non utrobique exprimunt eodem ſymbolo p; ſed in altera ſerie, puta in ſerie BD, preſſionem exprimunt ſymbolo quidem p, in altera vero ſerie AC preſſionem exprimunt ſymbolo np; quippe cum exiſtiment, dictas preſſiones eſſe, uti ſunt numeri elaſtrorum, ſcilicet uti 1 ad n. Ceterum calculus utriſque auctoribus favet pariter, quippe cum, ſi is inſtituatur aſſumpta leibnitiana preſſionum expreſſione, tandem colligatur, eſſe $uu : zz :: 1 : n$., videlicet, vires corporum æqualium eſſe, uti quadrata velocitatum; aſſumpta vero expreſſione carteſiana, colligatur eſſe, $u : z :: 1 : n$; nempe uti ſupra a carteſianis ipſis demonſtratum eſt, eaſdem vires eſſe in ratione ſimplicium velocitatum.

Igitur quandocumque conveniat inter utroſque auctores de huiuſce analyticæ demonſtrationis firmitudine, iam res tota eo tandem deducta videtur, ut ad componendam inter leibnitianos, carteſianoſque de viribus motricibus controverſiam, id dumtaxat decernendum ſit, utra de duabus analyticis expreſſionibus ad veritatem propius accedat, an ea, quæ preſſionum, de quibus agitur, æqualitate a leibnitianis admiſſa, fundatur, an contra quæ earumdem preſſionum inæqualitate iuxta carteſianorum ſententiam innixa eſt. Omnino decernendum eſt, utrum preſſio unius ſeriei ſit ad preſsionem homologam alterius, uti numerus elaſtrorum ad numerum elaſtrorum, ſive ut 1 ad n. Ego vero neque is ſane ſum, qui tantorum virorum rationes expendere, deque earum vi iudicium ferre me poſſe exiſtimem; neque ſi

is eſſem, qui poſſem, vellem tamen id in præſens ſuſcipere. Eas tantum rationes proponere nunc eſt animus; porro de iiſdem iudicium aliorum eſto.

Notum eſt, leibnitianos dictarum preſsionum æqualitatem ſumere ex eo theoremate, quod eiuſdem bernulliani operis capite ſexto proponitur, quodque ita ſe habet. Si fuerint duæ elaſtrorum ſeries inæquales, altera exempli gratia trium, altera duodecim, eodem in utraque angulo apertorum; tum ſi ambæ immotæ maneant, appoſito hinc fulcro, illinc obice quopiam, verbi gratia manu impediente, quo minus ultra aperiantur, idem erit niſus, quo manus altera a tribus, ac quo altera a duodecim elaſtris premetur. De hoc theoremate, quod, ut eſt perſpicuum, circa elaſtra quieſcentia totum verſatur, nullus carteſianorum hactenus dubitavit. Ex eo igitur, quod preſsiones ab elaſtris adhuc immotis exercitæ in utraque ſerie æquales ſint, colligunt leibnitiani, eas fore itidem æquales in ſingulis earumdem ſerierum infinite parvis dilatationibus, quas toto exploſionis curriculo ſeries ipſæ acquirunt. Nam cum quælibet infinite parva dilatatio coniunctum habeat motum adeo exiguum, ut huius differentia a quiete aſsignari nequeat, & proinde nulla cenſeatur, ſeries ambæ in illis ſingulis apertionibus ſpectari poterunt, tamquam quieſcentes, atque adeo earum preſsiones in obiectos globos ſumi poterunt utrobique æquales.

Quod vero ad carteſianos ſpectat, hi ut probent dictarum preſsionum inæqualitatem, primum ratiocinantur ſic. Eæ vires, quæ motum adiunctum habent, etiamſi infinite parvum, ſunt generis omnino diverſi ab iis, quæ ſine motu agunt. Igitur æqualitas preſsionum, quas duæ ſeries ſine ullo motu, & omnino quieſcentes, exercent, non valet ad probandam æqualitatem preſsionum, quæ ab iiſdem ſeriebus exercentur, etiam ubi eædem motum acceperint. Moveri & non moveri, ſeu motus & quies ſunt duo corporum ſtatus ex eorum genere, inter quæ nihil tertium inveniri poteſt. Igitur velocitas, quantulacumque ea tandem ſit, debet ad alterutrum ex his corporis ſtatibus revocari, minime vero ad neutrum. Et ſane cum infinitæ exiguæ velocitates coniunctim ſumptæ efficiant tandem velocitatem aliquam finitam, & aſsignabilem, quietem contra nunquam

efficiant,

efficiant, manifeſtum eſſe videtur, velocitatem infinite parvam eſſe quid toto genere diverſum a quiete, atque adeo a preſsione, quæ ſine motu fit. Et hac quidem ratione carteſiani primum in dubium revocant preſsionum, de quibus nunc quæſtio eſt, æqualitatem. Ad adſtruendam vero earumdem inæqualitatem, ita ut ſint in ea ratione, quam ſupra indicavimus, vim faciunt in altero argumento, quod ſequitur.

Immota manente elaſtrorum ſerie quantumvis longa, non alia exercetur preſsio, quam quæ ab uno elaſtro ſeorſim a ceteris exerceretur; propterea quia preſsiones ceterorum omnium æquali actione, atque reactione ſe ſe mutuo elidunt. Porro autem ſublato æquilibrio, & reſiliente iam ſerie, elaſtra ſingula, ex quibus ipſa conſtat, debent omnia ſimul uno tempuſculo æqualiter aperiri, uſquedum peractis infinitis huiuſmodi apertiunculis, in unoquoque elaſtro æqualibus & contemporaneis, omnia ſimul poſtremam dilatationem adepta fuerint. Erunt ergo elaſtra ſingula ſemper æqualiter aperta, imo quoniam nulla ſufficiens ratio eſt, ne illo tempuſculo, quo fit prima infiniteſima apertio ternorum elaſtrorum ſeriei verbi gratia BD, (*vide Fig.* 1), ne, inquam, eodem tempuſculo fiat pariter prima apertio duodenorum in ſerie AC, imo millenorum, pluriumve, ſi quæ inſint in alia quavis excogitabili ſerie; hinc propoſitarum ſerierum BD, & AC dilatatio tum in ſingulis apertiunculis, tum in omnibus coniunctim erit contemporanea. Quod cum accidere nequeat, niſi uterque globus, ideſt tum qui a ternis elaſtris ſeriei BD, tum qui a duodenis ſeriei AC truditur, eodem tempore totidem æqualia ſpatiola percurrat, quot inſunt elaſtra in ſerie illum ſollicitante, ſequitur globum unum ſingulis inſtantibus accepturum a ſerie BD tres preſsiones infinite parvas æquales tum inter ſe, tum ſingulis illis duodecim, quas globus alter accipit a ſerie AC. Ex quo proclive eſt colligere, etiam preſsiones earumdem ſerierum fore inter ſe, uti ſunt numeri elaſtrorum, ideſt uti 1 ad n, proindeque eſſe exprimendas duobus diverſis ſymbolis, videlicet p, & np, uti volunt carteſiani, qui expanſionum velocitates in utraque ſerie merito inæquales ponunt, cum preſſiones ponant inæquales.

At non video, cur qui preſſiones æquales ponunt, ut

ber-

bernulliani faciunt, non etiam velocitates ponant æquales. Quæ res declaranda mihi eſt paulo fuſius, nam omnis oratio mea huc fere ſpectat. Sunt autem qui velint, velocitates, quibus ſeries expanduntur, minime æquales eſſe, quamvis preſsiones ſint æquales; iique hac potiſsimum ratione inniti videntur; quod ſcilicet breviorem ſeriem breviori tempore expandi putant, longiorem vero longiori. Ex hac enim temporum inæqualitate cenſent evenire debere, ut quamquam inæqualium ſerierum preſsiones æquales ſint, tamen ob maiorem earumdem preſsionum numerum, quarum plures, ut hi philoſophi putant, longiori tempore a longiore ſerie in mobile imprimuntur, neceſſario in hoc idem mobile maior velocitas inducatur.

Atque hi philoſophi non ſolum tempora inæqualia eſſe conſtituunt, ſed certam quoque illorum proportionem ſtatuunt, docendo, ſeries elaſticas ita aperiri, ut tempora harum apertionum habeant inter ſe rationem ſubduplicatam longitudinis earumdem ſerierum; nempe illam, quam habent radices numerorum, qui exprimunt multitudines elaſtrorum ſeries componentium, ideſt in propoſito exemplo rationem, quam habet $\sqrt{BD}$ ad $\sqrt{AC}$, ſive $\sqrt{1}$ ad $\sqrt{n}$.

Atqui id totum difficultatibus premi poteſt quamplurimis. Ac primum: quis non videat, non poſſe ob ſolam temporis durationem augeri ſive in ſeriebus, ſive in globis pulſis velocitatem, quouſque velocitatis cauſa non augeatur? Fac duas æquales pilas horizontali menſæ impoſitas, a duobus æqualibus agentibus, verbi gratia a duobus æqualibus malleis luſoriis, alteram ſeorſim ab altera æqualiter premi. Fac unamquamque pilam ita temperate a malleo in motum adigi, ut quamquam malleus nuſquam illam deſerat, tamen uniformiter & eadem ſemper preſſione pergat agere. Iam ſi alter malleorum diutius altero pilam inſectetur, ſane non idcirco quiſquam putaverit maiorem velocitatem in hac, quæ diutius preſſa eſt, fore excitandam. Igitur poſita duarum preſſionum æqualitate, ſola maior minorve earumdem duratio non parit maiorem, aut minorem velocitatem.

Deinde ſi preſſio, quam facit ſeries AC in puncto G, propter maiorem diuturnitatem, velocitatem maiorem parit, quam pariat preſſio illa, quam facit ſeries altera BD in pun-

puncto homologo H; iam globus, quem urget ſeries AC, erit velocior, cum perveniet in punctum E, quam globus, quem urget ſeries BD, cum perveniet in punctum homologum P. Non ergo ambo hi globi æqualiter premi poterunt, atque urgeri in punctis homologis E & P; nam quamvis in his punctis ambæ ſeries, quantum in ſe eſt, faciant preſſiones, ut bernulliani volunt, æquales; tamen globi has preſſiones non æqualiter accipient; quippe quia alter altero velocior erit, ſeſeque celerius preſſioni ſubtrahet. Et tamen, iuxta bernullianorum ſententiam, ſicut globi in punctis homologis G, & H premuntur æqualiter, æqualiter quoque premi debent in punctis homologis E, & P. Quid eſt enim, quod preſſiones in binis quibuſque homologis punctis eodem ſymbolo p exprimunt?

Præterea cum dictæ temporum inæqualitatis in ſerierum elaſticarum apertionibus, hactenus a leibnitii ſectatoribus nulla prodierit ſufficiens probatio, carteſiani primum illud petunt, quid cauſæ ſit cur elaſtra, quorum etſi diſpar eſſe poſſit numerus, par eſt tamen niſus in ſingulis ad reſiliendum, ubi ſingula ſeorſim a reliquis poſita ſunt, reſiliant ſtatim, & ſingula æquali tempore aperiantur; ubi vero ſimul iunguntur in ſeriem, ſive longam, ſive brevem, non illo eodem tempore aperiantur ſimul omnia, ſed in una ſerie reſiliant citius, in alia ſegnius & cunctentur. Etenim, cum omni inertia carere illa velimus, cumque ex uno extremo nullo obice fulciantur, impedire ſe mutuo non poſſunt, ideoque, ſi in ſeriem coniecta retardentur, retardabuntur ſine cauſa, eludentque principium illud, quod nunc in ſcholis adeo premitur, rationis ſufficientis.

Mitto expendere proportionem illam, quam leibnitiani ponunt inter tempora, quibus duæ ſeries BD, AC homologas dilatationes abſolvunt; quam proportionem volunt eſſe ſubduplicatam illorum ſpatiorum, quæ a ſeriebus ipſis in ſimilibus dilatationibus conficiuntur. Quo loco carteſiani poſtulare a leibnitianis ſolent, ut hanc proportionem argumento aliquo probent.

Neque ſane hanc probationem poſtulant carteſiani a leibnitianis diſputandi genio, aut obſtinatione quadam, qua veterem ſententiam de vi viva in animo ſibi infixerint; ſed quia ad controverſiam tantam, qua nulla maior

in

in phyſica eſt, id in primis pertinet. Nam cum motus, qui in utraque ſerie habetur, durante qualibet dilatatiuncula, ſpectetur tamquam uniformis, cumque generatim in quocumque motu uniformi ſpatia a mobili percurſa ſint in ratione compoſita temporum, atque velocitatum, id profecto conſequens erit, ut ſi ratio temporum, quibus durant ſingulæ dilatatiunculæ, ponatur eſſe ipſa ratio ſpatiorum ſubduplicata, ratio quoque velocitatum ſit ſubduplicata ſpatiorum, ſeu, quod idem eſt, vires globorum vivæ ſint, uti quadrata velocitatum. Ut proinde ad ſententiam leibnitianorum nihil opportunius poni poſſit, quam ea hypotheſis, quam ipſi proponunt, ideſt tempora habere rationem ſpatiorum ſubduplicatam, quæ hypotheſis quanto leibnitianis commodior eſt, tanto magis carteſiani id iure ab iis poſtulant, ut eiuſdem hypotheſis probationem afferant aliquam.

At aliquam fortaſſe afferunt a gravitatis exemplo petitam. Etenim ſi gravia duo corpora per duas lineas perpendiculares cadant, conſtat profecto, caſuum tempora inæqualia eſſe, ſi lineæ quidem ſint inæquales, & habere rationem linearum ſubduplicatam; id quod eſt a magno Galileo demonſtratum. Quare cum preſſiones, quas gravitas in cadentia hæc corpora exercet, ſint æquales (poſſumus enim horum cadentium maſſas æquales ponere) ſintque etiam æquales preſsiones, quas duæ elaſtrorum ſeries exercent in duo mobilia; videbitur fortaſſe aliquibus, eamdem eſſe debere in utroque motus genere temporum proportionem.

Verum non eſt huic paritati nimis fidendum. Etenim in duobus cadentibus demonſtratur, tempora eſſe in ratione ſubduplicata linearum, quia experimentis Galilei, & rationibus quamplurimis conſtat, æqualia velocitatis incrementa utrique cadenti advenire in æqualibus temporibus ſingulis. Num ergo tale aliquid demonſtratum eſt in mobilibus globis, qui a duabus elaſtrorum ſeriebus urgeantur?

Sed quæcumque iam ſit vel inæqualitas temporum, vel proportio, certum eſt, vel in cadentibus ipſis, velocitates ſemper debere eſſe æquales, quotieſcumque preſſiones, quæ fiunt in cadente uno, æquales ſunt & numero, & magnitudine, preſsionibus, quæ fiunt in altero. Etenim preſsiones magnitudine æquales faciunt incrementa velocitatum

æqua-

æqualia; quare ſi tot numero preſsiones fiunt in uno cadente, quot in altero; erunt in utroque incrementa velocitatum & numero æqualia, & magnitudine; igitur & æquales incrementorum ſummæ; & omnino velocitates totales in utroque cadente æquales erunt. Quod ſi velocitates cadentium in temporibus inæqualibus inæquales ſunt; id fit ex eo, quod cum tempora inæqualia ſunt, preſsiones quoque ſunt numero inæquales; atque ex hac preſſionum inæqualitate inæqualitas oritur velocitatum.

Quod ſi ad ſeries elaſticas transferamus, dicendum ſane eſt, velocitates totales, quibus urgentur globi a duabus elaſtrorum ſeriebus, ex leibnitianorum ſententia, æquales ſemper eſſe debere. Hi enim, ſi ſibi conſtare volunt, non poſſunt, quin preſſiones in ambabus ſeriebus admittant & magnitudine, & numero æquales. Magnitudine quidem; quoniam volunt, ſeries ambas in apertiunculis ſingulis homologis æqualiter premere: quod niſi admittant, cur, quæſo, utriuſque ſeriei preſſionem in binis quibuſque apertiunculis homologis eodem ſymbolo *p* exprimunt? Numero autem; cum nulla ſit apertiuncula in una ſerie, cui non reſpondeat apertiuncula ſimilis, & homologa in altera. Quod cum ita ſit, debent profecto leibnitiani velocitates totales ambarum ſerierum æquales ponere; quamcumque temporum inæqualitatem, proportionemve prætendant.

Et ſane quidni ponant? Cum nequeant alia ratione dictarum ſerierum, ut ita dicam, phænomena ſimul conciliare. Nam ut alia mittamus argumenta, quibus iſta leibnitianorum de ſeriebus elaſticis theoria obnoxia eſt, unum hoc proferemus.

Supponamus (*Fig.* 1) ſeriem AC longiori tempore expandi quam ſeriem BD, atque adeo imprimere in globum a ſe pulſum velocitatem maiorem illa, quam ſeries BD, expandens ſe ſe breviori tempore, in globum a ſe pulſum poteſt imprimere. Iam per leibnitianos velocitas illa maior genita fuit a ſerie AC ob preſſionis incrementa, æqualia quidem illis, quæ impreſſa ſunt a ſerie BD, ſed numero plura propter maiorem preſſionis durationem. Igitur ſi utriuſque ſeriei velocitas foret æqualis, foret quoque æqualis cumulus dictorum incrementorum preſſionis, & proinde foret etiam æqualis totalis preſſio ab utraque ſerie exercita;

ta; nam, ſi inæqualitas velocitatis provenit a cumulo preſſionum, quæ in una ſerie plures ſunt numero, æqualitas velocitatis provenire debebit a cumulo preſſionum, quæ numero æquales in utraque ſerie ſint.

Porro ſit punctum I illud, in quo ſeries BD habet eam maximam velocitatem, quam poteſt expandendo ſe ſe acquirere: ſit pariter punctum F illud, in quo altera ſeries AC maximam habet velocitatem. Profecto ea maxima velocitas ſeriei BD erit æqualis cuipiam ex minoribus illis velocitatibus, quas ſeries AC aliquo in puncto ſuæ expanſionis habuit. Nam cum hæc ſeries acquirat ſucceſſive omnes velocitatis gradus, qui medii ſunt inter minimam & maximam, acquirit etiam illum eumdem, qui adæquat maximam ſeriei BD velocitatem. Ponatur itaque punctum R eſſe illud, in quo ipſa ſeries AC habet velocitatem æqualem illi maximæ, quam habet ſeries BD in puncto I. Igitur, ſi velocitates in R, & I ſunt æquales, eſt quoque æqualis tum iſte, tum ille incrementorum preſſionis cumulus, a quo eædem genitæ ſunt, uti paullo ante collegimus. Igitur utraque preſſio totalis, ideſt tum quæ in puncto R, tum quæ in puncto I exercetur, eſt eodem ſymbolo p exprimenda. Igitur puncta eadem R, & I homologa ſunt, & utriuſque ſeriei elaſtra cuncta in hiſce punctis eumdem apertionis angulum obtinent. Atqui id impoſſibile eſt, cum punctum F, non vero punctum R, ſit homologum puncto I. Ergo eſt etiam impoſſibile velocitates ſerierum in punctis R, & I eſſe æquales, inæquales vero in maximarum dilatationum punctis homologis F, & I. Ergo ex ipſis leibnitianorum principiis colligitur, velocitates, quas utraque ſeries habet in quibuſcumque homologis dilatationibus, eſſe æquales.

Videntur iam ergo bernulliani, ſuis ipſi rationibus ducti, debere concedere, duas elaſtrorum ſeries inæquales, ſi duos æquales globos urgeant, non ſolum preſſiones, ſed etiam velocitates habere æquales. Ex hoc autem facillime colligetur id, quod initio propoſitum fuit, ideſt duas elaſtrorum ſeries æquales, ſi globos inæquales urgeant velocitates iis tribuere maſſis ipſis reciproce proportionales. En quo modo id oſtendatur.

Sit in *Fig.* 2 ſeries quælibet, verbi gratia ex tribus

ela-

elaſtris conſtans. Reſiliat eadem ex utraque parte, & protrudat duo mobilia, B unius libræ, A duarum. Reſiliente ſerie, punctum C ſit centrum gravitatis. Sit porro alia ſeries priori æqualis, ideſt trium elaſtrorum, utrinque ipſa quoque reſiliens, protrudenſque duo mobilia E, & D, priorum dupla, videlicet mobile E ſit mobilis A duplum, & proinde quadrilibre; mobile D ſit duplum mobilis B, & proinde bilibre; quo facto duo mobilia A, & D erunt æqualia. Huius autem novæ ſeriei centrum gravitatis ſit punctum K.

Docet idem doctiſſimus Bernullius in ea lipſienſi diſſertatione, de qua ſupra, ſeriebus evolventibus ſe ſe, velocitates a mobilibus acceptas, fore in ratione reciproca maſſarum eorumdem mobilium, & centra gravitatis toto dilatationis curriculo fore omnino quieſcentia. Igitur ſi velocitas mobilis B ſit 1, velocitas mobilis A erit $\frac{1}{2}$, & hanc eamdem rationem, ideſt, 1 ad $\frac{1}{2}$, habebit velocitas mobilis D ad velocitatem mobilis E. Iam cum puncta C, & K in toto dilatationis tempore immota maneant, ea ſic habentur a bernullianis, quaſi duobus adactis clavis inibi infixa detinerentur; eſſentque propterea unius ſeriei partes CA, CB tamquam duæ ſeries innixæ in fulcro quodam immobili C, & ſimiliter alterius ſeriei partes KE, KD tamquam ſeries duæ in fulcro quodam immobili K innixæ.

Hic ergo erunt ex bernullianorum opinione duæ ſeries inæquales CA, KD, illa unius elaſtri, hæc duorum, quæ duos globos æquales A, & D pellent. Igitur ex ipſorum quoque opinione, ut ſupra oſtendimus, harum ſerierum CA, KD velocitates æquales erunt; ac cum velocitas globi A, ſi comparetur cum velocitate globi B, ſit $\frac{1}{2}$, etiam velocitas globi D erit $\frac{1}{2}$, ſi comparetur cum eadem velocitate globi B. His ita ſe habentibus, ſi iam comparentur bina quæque mobilia, quæ ab æquali elaſtrorum numero pelluntur, exempli gratia duo B, & D, quæ ſingula a duobus elaſtris pelluntur, itemque duo A, & E, quæ ſingula pelluntur ab uno elaſtro, eorum velocitates invenientur habere rationem maſſarum reciprocam. Scilicet mobile A, quod ſubduplum eſt mobilis E, habet velocitatem huius duplam; eſt enim illius velocitas $\frac{1}{2}$; huius vero, ideſt mobilis E, velocitas eſt $\frac{1}{4}$. Similiter mobile B, quod ſubduplum eſt mobilis

 lis

lis D, habet velocitatem huius duplam; illud enim habet velocitatem 1; hoc vero, ideſt D, habet velocitatem $\frac{1}{2}$. Videntur ergo, ſeries duæ æquales, ſi globos inæquales pellant, velocitates iis tribuere, non maſſarum radicibus, ſed maſſis ipſis reciproce proportionales.

Idque cum ex ipſis bernullianorum principiis ſtatim, nec obſcure, ducatur, nihil ſane erat, cur eo in loco demonſtraretur, ubi ſermo eſſet maxime cum bernullianis. Intelligitis profecto, Sodales ornatiſſimi, quo hæc ſpectent; eo nempe, ut argumenta cognoſcatis, quibus Heraclitus ille tueri ſe poſſit, qui olim cum Franciſco Maria Zanotto (ſic enim fert dialogus) in academia veſtra de viribus vivis diſputavit. Quæ ego argumenta colligere volui, ne viderer me ipſe deſeruiſſe; utinam vero ut Heracliti illius ſententiam tueri, ſic etiam elegantiam, & venuſtatem imitari poſſem.

THO-

Fig. 1.

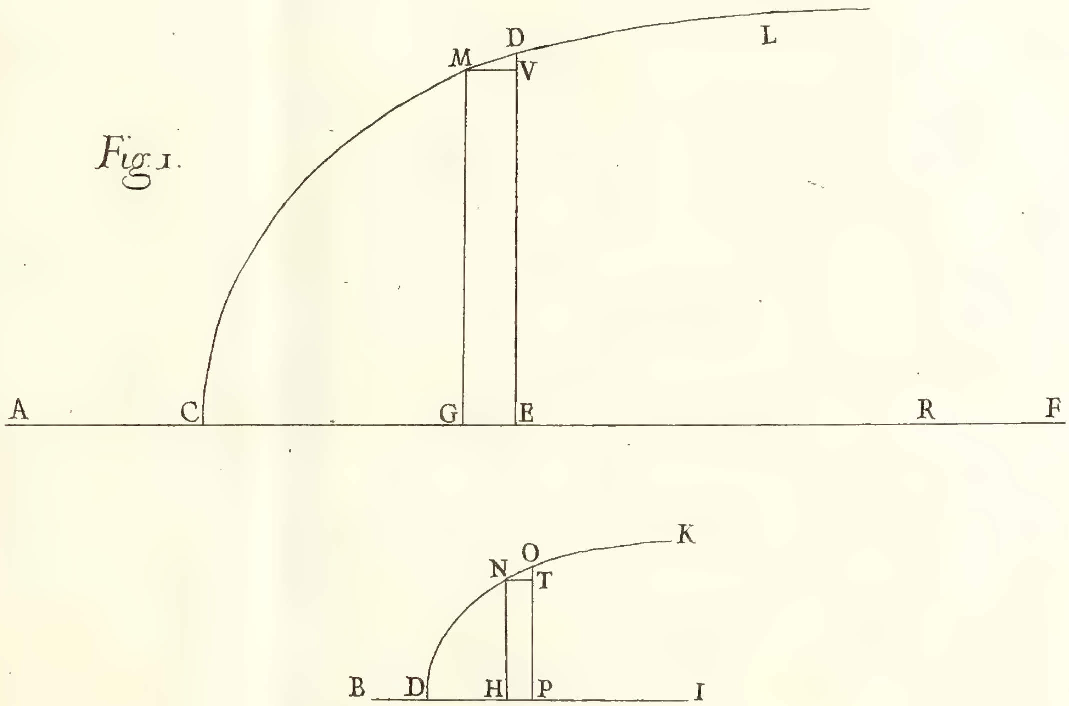
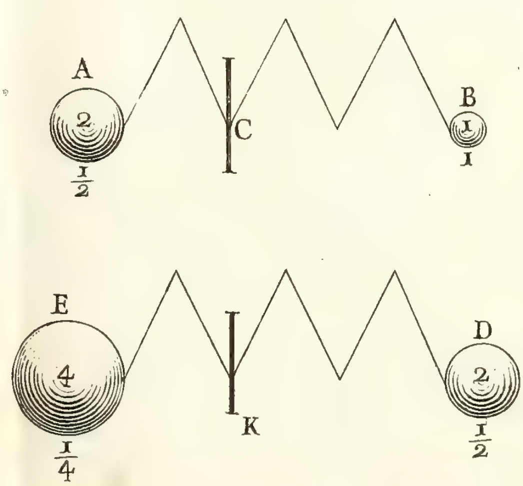


Fig. 2.



THOMAE LAGHII

De rubentibus lignorum cineribus.

Quamquam de rubentibus quorumdam lignorum cineribus vobiſcum dicturus, plane intelligam rem me afferre, natura fortaſſe ſua parvi faciendam, eamque quibuſdam vix experimentis tentatam, non abſolutam propterea, atque perfectam, quemadmodum pro loci huius dignitate cupiebam ipſe vehementer; facile tamen, ut ſpero, ignoſcent mihi humaniores Phyſici, qui nihil deſpiciendum ducunt, ac conatus omnes libenter amplectuntur, & probant.

Huiuſmodi itaque cineres, quos mihi primum obſervare contigit, ac ſimul lignum, e quo, dum comburitur, capiuntur, Franciſcus Vandellus ſpectatiſſimus Sodalis noſter autumno proxime elapſo ſumpſerat ab amico ruri per id tempus degenti prope oppidum apud vulgus *vergato* dictum, ubi caſu repertum fuerat inter fruſta illa lignea, quæ rhenus ab altioribus montibus in magnis alluvionibus ſecum vehit, ac poſt aquarum detumeſcentiam hic, illic ad ripas demittit, quæque a pauperibus eius regionis incolis ad hyemis iniurias arcendas colligi ſolent, & maturius etiam, ſi opus fuerit, igniri. Cum autem de inſolita hac cinerum ſpecie admonitus eſſem, rei novitatem magnopere admiranti mihi lignum, ſuoſque cineres præ ſua comitate dono dedit laudatus Vandellus, ut ſi quid in illud, ac cineres experiri vellem, eſſet integrum. Antequam vero quidquam molirer, cogitare cœpi num ad alnum, aut fagum, vel abietem, vel populum, vel aliam quamvis earum arborum, quas rhenus in iis montibus tangit, explorandum lignum referri poſſet, ſed neque mihi, quod nihil duco, neque aliis vel peritiſſimis botanicis datum fuit quidquam de eo decernere, præter id unum: lignum illud diu ſub aquis, ac terra delituiſſe, ab iis aquis ita ablutum, plurimum ſubſtantiæ ſuæ amiſiſſe,

alie-

alienaque imbuiſſe principia, ut hinc calore ſolis exſiccatum, fuſcum, ſquammoſum, rarum ſuam omnem veterem formam exuerit.

Interea dum mecum animo pervolverem, utrum rubros cineres largiendi facultas tantum eſſet huiuſce peculiaris ligni, an & aliorum (modo ab aquis ſimiliter vexarentur) accepi a clariſſimo Galeatio idem cuidam quoque ligno e paludoſis locis educto eveniſſe, itemque multis ab hinc annis ad egregiam mulierem Lauram Baſſiam tantillum alterius ligni, ſive potius radicis eadem virtute præditæ delatum fuiſſe; cuius radicis ut ipſa periculum fecit, ſic aliis experimentis noſtris tantæ mulieris auctoritas maiorem fidem adiungit.

Iam ergo ut rem totam vobis aperiam, utrumque lignum, montanum videlicet & paluſtre, ad examen revocavi, quoniam huius participem me eſſe voluit humaniſſimus Galeatius. Videbatur hoc fibrarum ſuarum textura a montano diferre; erat tamen æque ac alterum ſubnigrum, at aliquanto ponderoſius, quod mire conſentit cum colorum diſcrimine, quem ipſi cineres invicem collati præſeferebant, iique ex ſimplici lignorum combuſtione eliciti; nam quos montanum lignum reliquerat, vividiori rubedine nitebant, quos paluſtre, ſaturatiori; verum hoc diſcrimen tanti non eſt faciendum, ut quæ cauſa cineres illos, non hos etiam rubore inficiat; in quam quidem cauſam inquirenti induſtriæ, & laboris aliquid ſubeundum; neque enim in ſolo cinerum aſpectu erat conquieſcendum. Rogavimus propterea Iacobum Zanonum chimicum, ut ſcitis, præſtantem, ut ſuam nobis operam ſuppeditaret in iis experimentorum generibus, quæ inire diligenter volebamus; ac primum, ut coniecimus & ligna diutiſſime in aquis detenta partem eorum principiorum, quibus ditantur, amiſiſſe, & nova inde arripuiſſe, ligna ipſa deſtillationi commiſimus, ut quidquid intus in illis abſcondebatur, analyſis admoneret.

Quinque drachmæ montani ligni retortæ inditæ liquorem primo aqueum largitæ ſunt; poſtmodum aſcenderunt fumi totum vas obnubilantes; tandem igne multum aucto ſecutum eſt oleum craſſum, denſum, & nigricans: refrigeratis vaſis, apertoque recipiente erupit odor omnino ſimilis illi, quem omnia ligna deſtillata emittunt; liquor ſi degu-

deguſtaretur, acidulus, ac fere acetoſus perſentiebatur; oleum maximam partem fundum tenebat, præter tantillum, quod in liquore innatabat; liquoris pondus erat drachmarum circiter duarum; olei vix dimidiæ; reſidua maſſa, quæ in retortæ fundo continebatur inſtar carbonis, ſcrupuli pondus non excedebat.

Nunc ad lignum paluſtre: in huius deſtillatione ſervata eſt eadem quantitas, quæ ſupra; poſt deſtillationem id unum tantum diſcriminis repertum eſt, nempe plus olei ex hoc elicitum eſſe, quam ex montano, multoque copioſiores fumos exhalaſſe, ſed albicantes, qui undequaque recipiens vas lacteo liquore obduxerant, ramificationes æmulante ſalis volatilis animalis, quique liquor in oleum reſolutus eſt.

Ex memorata deſtillatione illud colligitur, Zanono ipſo monente, minus olei, & ſalini phlegmatis in hiſce lignis deprehendi, quam ab aliis naturaliter ſe habentibus æqua portione deſtillatis obtineri ſoleat, etſi alterum ex his lignis plus altero eiuſdem olei oſtenderit; ſciendum enim, e reliquis lignis per deſtillationem oleum educi non modo copioſius, ſed tenuius, & quaſi ſubcæruleum, quod longe abeſt ab oleo prædicto.

Hactenus de activioribus principiis; reliquum erat, ut caput mortuum perluſtraremus, in quo ruboris cauſam latere opinio fuit: quod igitur e montano ligno ſupererat, aperto igne calcinatum, abiit in calcem tenuiſſimam, & eleganter rubram, vel igne reverberato conſtantem, nec immutatam. Orta hinc ſuſpicione colorem illum, ferreæ cuidam ſubſtantiæ, croci naturam adeptæ, ac calci admixtæ tribuendum eſſe, calcem illam magneti admovimus, at nullum ad magnetem ipſum motum edere conſpeximus; ea vero ſebi, vel alterius adipis additione denuo uſta magnetis actioni paruit plurimas ferri micas patefaciens, quod haud mirum videri debet, cum omnibus innoteſcat crocum martis nequaquam ad magnetem accurrere, niſi in genuinum ferrum reviviſcat.

Non his contenti curavimus, ut prædictis cineribus lixivium pararetur, atque ad ſiccitatem redigeretur, eo videlicet conſilio, ut cuius indolis foret quidquid in eo ab evaporatione reſideret, tandem cognoſceremus; reperta eſt terra quædam eiuſdem coloris, & ſaporis, quem habet ea,

quæ

quæ inter ſolvendum, & cryſtallizandum vitriolum ſeparatur, idque pluries repetitum eſt eodem exitu; verumtamen, quod omnem dubitationem tollit: ſolutio gallæ eidem concretioni ſalino terreæ affuſa atramentum confecit.

Eadem porro methodo in paluſtris ligni caput mortuum inquiſivimus, nihil tamen in eo rubedinis detectum eſt, & quamvis igne multoties vexaremus, colorem atrum perpetuo retinuit. Ceſſit mihi res hæc præter expectationem, eaque ſollicitum me habuit; ægre quippe ferebam lignum, quod ſtatim concrematum cineres parit rubedine tinctos, non item eos parere poſt deſtillationem, quemadmodum in priori illo experti fuimus; unde nam quæſo peti debet tanta hæc varietas non ferenda? Proclive eſt coniicere lignum hocce, ſi primum comburatur, applicito immediate igne oleum omne dimittere; deſtillationis autem ope non omni prorſus ſpoliari; præſertim cum oleoſa materie, & quidem craſſiori, ditius altero ligno apparuerit; quin imo opinari licet, portionem eiuſdem olei, quæ fert fortaſſis ligni huius conditio, portionem, inquam, eiuſdem olei caloris vehementia agitati, commoti, atque repercuſſi, tenacius capiti mortuo adhæſiſſe, illudque intimius pervaſiſſe, adeout propterea ferruginea ipſius calcis ſubſtantia in crocum redigi nequiverit: revera admoto magnete protinus viſæ ſunt non paucæ calcis particulæ celeritate ſumma ſe ſe attollere, ſecus atque in rubeſcentibus eiuſdem ligni cineribus ſimplici uſtione paratis contingat, in quibus ſi minus nullæ, ut in priori cinere alterius ligni, multo ſaltem pauciores glebæ magnetis nutui obſequuntur. Coniectura hæc, quæcumque fuerit, videtur quoque ad illud intelligendum accommodata, cur ſalinum concrementum e lixivio ſimiliter confecto elicitum, mediæ potius naturæ, quam vitriolicæ perciperetur, quod a ſolutione gallæ nullatenus attingebatur.

Utcumque vero ſe res habeat, tuto affirmare poſſumus rubedinem eam, qua huiuſmodi cineres ſive obſcuriori, ſive nitidiori donantur, ad calcem quamdam ferream referendam eſſe, cum in ſingulis & ferreum, & vitriolicum principium latere inveſtigationes noſtræ declaraverint. Vitriolum, quod in terræ venis abunde reperitur, cuiuſque naturalis baſis eſt ferrum, quis inficiabitur, modo in aqua ſolvatur,

vatur, ſibi viam ſternere in ligni fibras poſſe, ac ideo martem ſub ea forma lignum undique pervadere? maxime quia innumeris obſervationibus conſtat, non parum vitrioli martis in pleriſque corporibus, ac potiſſimum vegetabilibus adeſſe, ad ipſos plantarum ramos, imo ad ſubtiliſſima florum ſtamina diſtributum. Quod ſi lignum, longiſſimo tempore ſub terris degens, continenter aquis ablutum, magna ſuorum principiorum parte privetur, aptius forſitan evadet ad vitriolicum ſalem uberius arripiendum, atque ad illam proprietatem induendam, quam in expoſitis lignis admiramur.

Quoniam vero crocus martis nullam ab acidis alterationem patitur, in hoc etiam hi cineres ſequi videntur rationem croci; nam iis inſtillato nitri ſpiritu nulla efferveſcentia ſuborta eſt; nulla etiam oleo tartari, quemadmodum nulla coloris mutatio per ſirupum violarum, inditio ſatis manifeſto neque quidquam acidi, aut alkalici ſaltem evoluti memoratos cineres complecti; ſolutio quoque aluminis (ne hanc reticeamus) nativum ſuum ruborem haud reddidit elegantiorem. Nimius eſſem, ſi quæcumque ſuper hac re inſtitui experimenta vobis enarrarem; recitabo tantum aliqua, quæ in ea me opinione firmiorem reddunt, non eſſe ad phænomeni huius intelligentiam a calce ferrea diſcedendum.

Lithantracem concremare feci, ex quo cineres dumtaxat nigricantes obtinuimus; quamquam ex hoc quoque rubentes cineres elicitos interdum fuiſſe accepimus; nempe cum eſſet eiſdem illis imbutus principiis, quibus memorata ligna imbuuntur. E radice rubiæ, & ligno campeſcano, atque indico, corporibus iam de ſe rubentibus, cineres ſubalbidi prodierunt. Ne autem obſervationibus noſtris quidquam deeſſet, quod propius ad naturæ imitationem accederet, communibus cineribus ſæpius elotis, ac de integro calcinatis adhuc albidis, nec ferruginea materia auctis, modicam vitrioli portionem adiecimus, nempe ſuboctuplam, ac peracta denuo calcinatione vidimus eos cineres coloris fuſci ad rubrum tamen vergentis, multiſque ferreis particulis præditos; eoſdem ſulphuri admixtos albidiores conſpeximus, tandem alumini nulla coloris extenuatione.

A cineribus ad ligna ventum eſt: periclitari placuit in

	alno,

alno, in populo, in iunipero, in opio, aliiſque. Ebullita hæc ligna pluries in aqua ſimplici, tum in aqua, quæ tartarum diſſolverat, in ſuis cineribus nihil præbuerunt memoratu dignum; ne alnus quidem, quamvis id lignum natura ſua rubeſcat. Horum lignorum omnium fruſta, quæ ebullire fecimus in aqua ſolutione vitrioli imbuta, haud videbantur negligenda; colorem enim prope nigrum adepta fuerant, quo lignum caſu inventum æmulabantur; cuius coloris cauſam ex vitriolo, & facultate in lignis adſtringente inſtar gallæ proficiſci nemo negaverit. Fecit id, ut ſpe aliqua duceremur eſſe nos horum ligneorum fruſtulorum cineres aliquanto ſimiles iis, de quibus hactenus locuti ſumus, reperturos; neque ſpem eventus fefellit, nam hi cineres a rubiginis colore parum receſſerunt; cur non autem acceſſiſſent magis ad illos, ſi diutius ligna in eadem aqua ebulliſſent, ſi per repetitas calidæ ablutiones partem ſuorum principiorum amiſiſſent, ſi demum rariora, & ſpongioſiora evaſiſſent?

Quæ cum ita ſint, Viri doctiſſimi, procul ne a vero aberit, qui philoſophetur ligna quævis ſic diſpoſita, & præparata poſſe ad cineres rubros edendos aptiſſima fieri? Equidem, ſi meum in hac controverſia iudicium interponere liceat, non improbabile cenſeo; hanc tamen aptitudinem ſi minus æque in omnibus agnoverimus, diſcriminis quod erit, culpanda potius aut ligni ſtructura, aut terræ, vel aquarum alluentium conditio, aut denique aliud in aliis temporis ſpatium, quo ibi detenta fuerint, quam opinio hæc reiicienda; enimvero ex lignis, quorum exemplum veſtris oculis ſubiicimus, paluſtre ſuarum partium textura alienum eſſe videtur a montano: cineres habet non eodem rubedinis gradu nitentes, ponderoſiores, ferreis particulis tum ante, tum poſt admixtam pinguedinem, flammiſque ſubinde abſumptam ditiores; illud præterea, quod a lectiſſima muliere Laura Baſſi accepimus, compactius eſt, ac ſubluteum, cineresque ſuos, quos primum ad rubedinem tendentes impertiebatur, cœpit modo flaveſcentes manifeſtare, quod nullam movet admirationem, cum calx ferrea modo rubra eſſe ſoleat, modo flava, cuiuſmodi apparet ochra vulgaris, atque eo magis, quod qui color ruber in noſtris hiſce cineribus manifeſto ſe prodit, ad colorem intenſe flavum videtur prorſus pertinere.

Num

Num autem futurum ſit, ut aliqua coloris mutatio & prædictis lignis a nobis exploratis veteraſcendo contingat, id temporis diuturnitas docebit. Nunc certe firmum illud, ratumque eſt, huiuſmodi cineres colore ſuo non multum a vitrioli colcotare, aut croco martis, ut cuilibet eos inſpicienti patebit, diſcrepare.

Antequam finem dicendi faciam, poſtremo monendi eſtis, periclitari nos voluiſſe, an iiſdem cineribus pigmentum confici poſſet colorandis corporibus idoneum. Videbam enim rem me allaturum, quæ & iucunditate præſtaret aliqua, nec utilitate prorſus careret, in quam præcipue ſtudiis noſtris contendimus. Cum ergo obduxiſſem eo pigmento tantillum ligni, obtentus eſt rubor non inelegans; excitatus porro ſum ad id præſtandum ex eo, quod rubrica, qua utuntur mechanici ad id coloris genus rebus plurimis inferendum, nihil aliud ſit, quam concretum quoddam terreo martiale, non ſecus ac cineres noſtri, ad quos ut idem munus commode transferatur, nonniſi ſufficiens eorum copia nobis ſuppeditanda.

Habetis obſervationes eas, quas ſuper his cineribus præſtiti, quaſque eo libentius ſuſcepi vobiſcum communicandas, quo mihi omnino novum acciderat ligna diutiſſime ſub aquis, & terris degentia vitriolicos ſales copioſius imbibere, itaut tandem rubedo eorum cineribus inſideat; quod ut ſemper admiratione dignum eſt, multo tamen eſt magis, id in agro bononienſi repertum eſſe, ubi vitriolum ipſum non effoditur.

CAIETANI MONTII

De Aldrovandia novo herbæ paluſtris genere.

QUum experimenta quædam de rebus chymicis, quæ haud ita pridem tentare exorſus ſum, nondum eo ſint perducta, ut commode ad academiam deferri poſſint; id mihi a vobis facile conceſſum iri exiſtimo, ut eorum loco ex botanicis aliquid proponam; deſcriptionem videlicet, ac imaginem plantæ cuiuſdam, in paludibus agri bononienſis ſponte naſcentis, in iiſque cum flore, ac fructu primum repertæ. Hæc fere pro nova haberi poteſt, licet eam videatur Leonardus Plukenetius britannus, in ſua Phytographia, ſub finem præteriti ſeculi commemoraſſe: ſed indicam ille ſtirpem eſſe non italicam dixit; folia etiam ſic parum accurate expreſſit in imagine, ut locum reliquerit dubitandi, utrum ea, quam ipſe lenticulam paluſtrem indicam appellat, cum planta, quam deſcribere ingredimur, eadem ſit: præterea floris, aut fructus nulla vel ab ipſo, vel ab alio quovis mentio illata eſt; ita ad quod genus proprie referenda ſit, quove nomine appellanda; quum & nominis, & generis determinatio a flore, ac fructu peti debeant, conſtare adhuc non potuit. Nos & florem primi, & fructum vidimus; quorum ex attenta inſpectione perſpeximus ſui generis plantam eſſe, novo propterea deſignandam nomine: quippe manifeſtum eſt lenticulis paluſtribus, quæ flores vel nullos, vel admodum imperfectos gignunt, adnumerandam non eſſe; a quibus ſi merito excluſæ ſunt a botanicis & quadrifolia dicta, & patavina; multo hæc magis eximi debet, quæ flores petaloidos gerit, ac perfectiſſimos. Fecimus igitur pro iure quodam noſtro, ut novum plantæ minus cognitæ, & a nobis ad certum genus relatæ imponeremus nomen: præſertim quod non modo floris, fructuſque conformatio, ſed & habitus, & figura to-

tius

tius plantæ, ad nullam ex vulgo cognitis accedens, idipſum a nobis poſtulare videbatur. Et quoniam hæc ſemper inter botanicos conſuetudo fuerat, ut clarorum virorum nomina, qui in hac facultate excelluiſſent ad plantas ipſas traducerentur, quemadmodum priſcis temporibus in Pæonia, in Euphorbio, in Gentiana, in Eupatorio, ut recentiori memoria in Cortuſa, ac in aliis vero permultis hac noſtra ætate factum eſt, quum horti publici bononienſis conditori Ulyſſi Aldrovando, egregio non philoſopho ſolum, ſed etiam botanico nondum hic honos habitus eſſet, meas partes eſſe putavi, occaſione novi huius plantæ generis, memoriam civis noſtri doctiſſimi, atque eruditiſſimi, cui & herbarum cognitio, & hiſtoria naturalis univerſa plurimum debet, hac etiam ratione ad poſteros mandare.

Aldrovandiam itaque appellare volui hanc plantulam, id nomen commune faciens cum reliquis, ſi quæ forte flore, ac fructu convenientes, habitu vero externo ab ea non multum diſcrepantes alibi reperientur. Interea ſpeciem illam, quam ſolam novi, paludum noſtrarum incolam ad characterem huius generis definiendum adhibebo.

Primus qui hanc plantam apud nos, imo forte in europa univerſa invenit, Ioannes Carolus Amadeus fuit, medicus bononienſis, quem plerique ex nobis meminiſſe poſſumus, vir antiqua morum ſimplicitate, doctrinæ cultor non indiligens, in herbarum vero cognitione, quam a Iacobo Zanonio celebri botanico adoleſcentulus acceperat, & qua uſque ad ſenectutem mirifice ſemper delectatus eſt, longe excellens. Inter ceteras illius laudes hanc prope ſingularem, ac vere illius propriam, commemorare poſſum, quod in ſeminibus contemplandis, ac microſcopio ſubiiciendis ita exercitatus fuit, ut vel minimo quovis granulo oblato, pro certo affirmare poſſet huius eſſe, ſive illius plantæ ſemen, in eoque iudicio ferendo vix umquam falleretur, quod ſane in varietate propemodum infinita, exilitate vero plerumque ſumma permagnum eſt; adeo ut iure id mihi affirmare poſſe videar, in huiuſmodi cognitione parem illi fuiſſe neminem. Is igitur, quem dixi, Amadeus, quum Butrii, agri bononienſis oppido, medicinæ faciendæ cauſa habitaret, inde ſæpe ad vicinas Dulioli paludes proficiſcebatur, ad aquaticas herbas, quibus ea loca abundant,

& qua-

& quarum, ut dixi, ſtudioſiſſimus erat, perquirendas. Ibi tum primum hæc illi occurrit, de qua nunc agimus, aquis ut plurimum ſubmerſa, ſingulari foliorum ſtructura, ac ſitu a reliquis omnibus, quas ipſe noverat, vel quarum imagines in libris conſpexerat, longe diſcrepans.

Nec vero dubitaſſet eam ſtatim pro nova in vulgus edere, ſed morabatur ipſum, quod flores, ac fructus, quos videlicet rariſſime profert, nondum viderat. Specimina interim exſiccata ad Lælium Triumphettum rem herbariam tunc apud nos publice profitentem, & ad parentem noſtrum, & ad alios etiam extra hanc urbem botanicos mittebat, eorumque opinionem ſciſcitabatur. Reſpondebant illi novam re ipſa videri plantam, niſi forte lenticula illa eſſet a Plukenetio in phytographia, & almageſto botanico, qui libri tum primum Bononiam advecti fuerant, commemorata. Non ceſſabat Amadeus omnem operam ponere ad flores, fructuſque inveſtigandos, ſed incaſſum. Relicto poſtea domicilio, quod per aliquot annos Butrii habuerat, Bononiam ſe recepit, ubi quum eſſet, non amplius ea loca tam frequenter adeundi, quam res poſtulabat, facultatem habuit.

Poſt Amadei mortem, quum & paluſtrem agri noſtri tractum plus ſemel peragrandi opportunitas nobis data fuerit, cumque ex iis locis in horti publici uſum herbæ variæ paluſtres ſæpe ad nos afferri conſueverint, in his plantulam iſtam cum fructibus, imo & floribus quibuſdam ſubclauſis, inſperantibus nobis fortuna obiecit; quos ut etiam expanſos intueremur, in teſta florali limoſa terra & aqua repleta per aliquot dies ſoli expoſitam aluimus, pluries quotidie obſervantes, ne forte occaſio nos fugeret, ſi ex iis flores eſſent, qui breviſſimo tempore permanent aperti. Hac diligentia adhibita integri, perfectique floris veram formam tandem aſpeximus, ex eaque & genus conſtituimus, & plantæ totius deſcriptionem, quæ adhuc nulla erat, concinnavimus: neque eo contenti, cum eſſent multa, quæ difficillime verbis exprimi poſſent, imaginem quoque a perito artifice effingi curavimus, quam imaginem in expoſita tabula habetis.

Aldrovandia, ut aliæ multæ, inter paluſtres herbas aquis perpetuo mergitur, quarum tamen a ſuperficie aliquando

quando ſic parum abeſt, ut omnino ſupernatare videatur. Nec vero radicum capillamenta ſubiecto fundo infixa facile invenias, ſed plane fluitantia, quamquam re vera non in profundis ſtagnorum æquoribus, ſed in limoſis herboſiſque marginibus herba hæc plurimum reperiri ſolet. Caule plerumque conſtat ſimplici, dodrantali, interdum etiam duplici, unicum videlicet ramulum proferente, qui ſemper breviſſimus eſt, ac ſingularis, neque uſquam ſcapi, ex quo emergit, longitudinem exæquat. Articuli & in cauli, & in ramo, ſi adſit, crebri ſunt, & conferti, quibus ſeptem, octo, vel novem inhærent folia in orbem radiorum inſtar diſpoſita, ut in rubiis, ſed craſſiuſcula, intus veluti ſpongioſa, ad eam partem, qua geniculo annectuntur, anguſtiora; ad alteram vero in latitudinem ſenſim ſe expandentia, in extremo veluti retuſa, in ſex tamen virides barbulas deſinentia. In barbularum medio folliculus oblique appenditur, ſingularis omnino ſtructuræ, ex orbiculari conſtans membrana, in ſemicirculi formam ſic complicata, ut ventricoſus ille quidem, ac ſubtumidus, ſed margine tamen preſſo, & connivente, quaſi criſta quadam ad alteram partem circundatus appareat. Huic ſimilius nihil cogitare potui, quam offas illas frixas, quæ ieiunii quadrageſimalis tempore, ex complanatæ paſtæ orbiculo duplicato, dulcem intus maſſam recondentes confici ſolent; quæ ſi vacuæ ſimul ac tumentes concipiantur, veriſſimam iſtius folliculi ideam repræſentabunt. Folliculi, ut dixi, oblique inſident foliis, inter medias barbulas, omnes eodem obliquitatis angulo, & criſta in omnibus ad eamdem partem verſa, ita ut quilibet articulus cum adhærentibus foliis a ſcapo avulſus molendini rotam præſeferat, foliis nimirum rotæ ſingulos radios, utriculis vero ſitulas aquam ex alto cadentem excipientes perbelle repræſentantibus. Auguſto menſe flores iſtius herbæ apparent, ſed rariſſime, quæ cauſa fuit, cur diligentiſſimum quoque latuerint Amadeum. Producit autem quilibet ſcapus non amplius quam binos, vel ternos ad ſummum, longis inſidentes pedunculis; qui pedunculi radiatim, ut modo dictum eſt, folia circumſiſtunt, ea lege, ut qui articuli hos pedunculos proferunt, numquam inter ſe proximi ſint, ſæpius valde remoti, haud raro alter in medio ſcapo, alter in laterali ramulo: ubicumque tamen ſint pedunculi iſti fo-

lia,

lia, inter quæ naſcuntur, longitudine ſuperant, ita ut flores, quos ſuſtinent, non facile ſub iiſdem foliis deliteſcant. Flores ipſi calyce conſtant quinquepartito, profunde ſecto, viridi, craſſo, non deciduo: petala pariter quinque ſunt, longiuſcula, acuminata, ex albo viridia, eiuſdem fere longitudinis, ac laciniæ calycis, vel non multo minora, quæ ſi vi diducantur (raro enim is flos ſua ſponte omnino expanditur) orbem conſtituunt, cuius diameter fere lineæ duæ. Medium florem occupat embryo, ſive piſtillus a Tournefortio ſic appellatus, ſphæricæ figuræ, pro floris ratione grandiuſculus, cuius vertici quinque tubæ incurvæ, breves, candidæ affiguntur; totidem vero ſtamina æqualis longitudinis flavos apices, ſive antheras ſuſtinentia circumpoſita ſunt. His marceſcentibus una cum petalis, embryo ſuccreſcit, calyce ſuperſtite, fitque globoſus fructus piperis granum fere adæquans, in quo tamen ſubobſcura quinque angulorum notari poſſunt veſtigia. Interior unica eſt cavitas, ſemina continens vix umquam plura quam decem, nigra, minuta, longiuſcula, internoque fructus parieti, quod in paucis contingit, affixa.

Quoniam vero hæc planta, uti diximus, raro floreſcit, fructuſque fert, alia ratione propagationi illius conſuluit natura: nempe ad extremos caules, & ramulos, ſub autumni finem, germina enaſcuntur, ut in aliis quibuſdam herbis paluſtribus; quæ ex foliis convolutis, arcteque complicatis conſtant. Germina hæc hiemis initio, corruptis ceteris plantæ partibus, fundum petunt, ac ſub glacie ſervantur, uſque ad novum veris adventum; quo tempore ſolis calore aquis tepeſcentibus ſenſim relaxata, in plantas eiuſdem ſpeciei brevi adoleſcunt; eæque, utriculis foliorum contento intus aere paulatim ſe expandentibus, ad ſuperficiem aquæ feruntur. Hæc propagationis ratio ſimillima eſt illi, quæ in multis herbis per bulbos fit; in arboribus vero per gemmas aliquando & ſurculos. Quando huius plantæ virentis mihi copia erat, ſaporem, odoremque explorare volui, & ſapor quidem initio mihi ſubdulcis, amarus poſtea, & auſterus viſus eſt, odor nullus, niſi quem paluſtres herbæ prope omnes ab originis loco mutuantur. Hoc re vera ſingulare eſt in hac planta, quod etſi tam recens, quam ſicca tota viridis eſt, ſi tamen comprimatur inter duo chartacea

tacea folia, ut botanicorum mos eſt, exſiccanda, notam utrique rubentem imprimit, formam totius plantæ, ſingularumque illius partium haud obſcure repræſentantem; neque in primis dumtaxat chartis, quas herba contingit rubeus ille conſiſtit color, ſed ad multas etiam penetrat ex inferioribus, imo quod eſt mirabilius, id evenit, etiam ſi non recens herba, ſed multis ante menſibus exſiccata chartis interponatur; quod cum etiam præſtet rocella tinctoria, qua infectores utuntur ad lanas colore ſubpurpureo tingendas, & eſt lichenis orientalis ſpecies quædam; locus relinqui videtur coniecturæ in hac noſtra paluſtri herbula utilitatem latere pro arte tinctoria. Sed hoc alias viderim, ubi examen, quod adhuc non licuit, inſtituere datum erit.

Unum eſt, quod ex me poſtulari video, ut aperiam ſententiam meam, an putem eamdem eſſe aldrovandiam noſtram cum lenticula illa plukenetiana, quod olim Lælium Triumphettum, ac parentem noſtrum, Amadeo adhuc vivo, ſuſpicatos eſſe dixi: certe ſi id, quod ſentio, libere fateri debeo, rem ita ſe habere prorſus exiſtimo: fidem enim faciunt & habitus externus, qui in utraque idem eſt, in alia vero ex cognitis plantis prorſus nulla; & ramulus unicus lateralis, & folia circa ſcapos conferta, & barbulæ foliis permixtæ. Obſtat ſane, quis neget, quod Plukenetius lenticulam ſuam indicam nominat, & quod in imagine non folia anguſta in ſex barbulas deſinentia cum appenſo folliculo oſtendit, ſed folia prope ſubrotunda, gemina tantum barbula ad baſim inſtructa. Ceterum cum plane inter omnes conſtet auctorem iſtum pleraſque ex plantis, quarum imagines dedit, non virides, aut recentes vidiſſe uſquam, ſed ex variis regionibus exſiccatas ſtudioſiſſime congeſſiſſe, ac in tabulis delineaſſe, nihil facilius evenire potuit, quam ut hanc plantam cum aliis paluſtribus ex italia fortaſſe acceperit, eamque, amiſſa ſchædula originis locum denotante, ut indicas habebat alias prope innumerabiles, indicam pariter reputaverit: niſi forte exiſtimare malumus, ſponte naſci hanc plantam non in italia ſolum, ſed etiam in india: quod vero ad errorem in foliis attinet, hunc etiam video ex hoc, quod ſiccatum ramulum depinxerit, exiſtere potuiſſe.

Nihil autem in hac re maioris momenti eſt, quam auctoritas viri clariſſimi Ioannis Iacobi Dillenii, quem inter principes noſtræ ætatis botanicos vere mihi videor commemorare poſſe; is cum in perficiendo univerſali plantarum nomenclatore, ſive ut aiunt pinace, quem clariſſimus vir Guillielmus Sherardus exorſus fuerat, atque eius rei cauſa immenſam ab eodem Sherardo oxonienſi academiæ relictam ſupellectilem excuſſerit, autographos videlicet botanicorum codices, exemplaria plantarum ſicca fere innumera, tum ab aliis, tum ab iis, qui ante ipſum in anglia vixerant, botanicis, quorum ex numero Plukenetius fuit, ingenti ſtudio collecta; tamen de hac ipſa planta per literas a parente meo, qui etiam exemplar illius ad eum miſerat, rogatus quid ſentiret, non dubitavit pro certo aſſerere eamdem eſſe cum lenticula plukenetiana. Neque ob id tamen Amadeus noſter ſua laude fraudandus eſt; primus enim ubi ſua ſponte hæc planta naſceretur, invenit, primus vegetandi modum, & ordinem perſpexit, primus veram illius partium ſtructuram, ut botanicum decet, accurate cognovit: is denique fuit, qui cum & locum, & tempus, & alia, quæ ad ipſam pertinent, diligenter notaſſet, facilem nobis expeditamque reliquit viam, ut floribus etiam, ac fructibus, qui ipſum fugerant, compertis plenam, abſolutamque illius cognitionem botanicis traderemus: in quo illud percommode cecidit, ut decus illud, quod celeberrimi Aldrovandi memoriæ iampridem debebatur, a nobis redderetur. Enimvero ſæpe miratus fueram, quod cum in americanis ſtirpibus deſignandis omnia ferme illuſtrium botanicorum nomina collegiſſet Plumerius, ex iiſque & Bauhinam feciſſet, & Matthiolam, & Cluſiam, & alias longe multas; ſi quæ autem ab eo forte præterita eſſent, Michelius, Houſtonus, Gronovius, Linnæus ad novorum, quæ ipſi inſtituerant, generum denominationem uſurpaſſent; de Aldrovando noſtro in mentem veniſſet nemini, ſed nimirum illi ex operibus editis tantum botanicum fuiſſe, quantus re vera fuit, iudicare non potuerunt. Nos autem qui & bibliothecam illius ampliſſimam vidimus, huic inſtituto nuper adiunctam, & libros permultos, quos de plantis editurus erat, & tabulas inciſas, quas pro iis libris comparaverat: & volumina ſtirpium exſiccatarum ſexdecim, in quibus nulla ferme, quæ

iis temporibus cognita eſſet, deſideratur, facile intelligere potuimus ad ceteras ſummi viri laudes hanc etiam acceſſiſſe, ut in clariſſimis illius ætatis botanicis poſſet numerari; & ſane ut talem agnoverunt, & in ſuis operibus deprædicant Matthiolus, Geſnerus, Bauhinus uterque, Cluſius, Lobelius, Marantha, aliique non pauci, quibuſcum ille ſtudiorum communione iunctus fuit, quique omnes amicum & fautorem, plerique etiam præceptorem appellant ſuum. Igitur ſi vel maxime Carolo Linnæo aſſentiamur, qui vetat plantis imponi a viris nomina, etiam eruditione præſtantibus, niſi in re potiſſimum herbaria excelluerint; hunc tamen honorem Aldrovando non denegabimus, qui non ſolum omni doctrinæ genere expolitus fuit, ſed & ſingularem quoque ſibi inter botanicos laudem promeruit.

FIGURARUM EXPLICATIO.

Fig. a. PLanta cum floribus, fructibuſque delineata.
b. Folia radiatim circa geniculum diſpoſita.
c. Folium cum appenſo folliculo microſcopio conſpectum.
d. Idem detracto folliculo.
e. Folliculus a folio ſeparatus.
f. Idem vi apertus, ac diductus.
g. Flores quales per microſcopium nonnihil maiores apparent.
h. Fructus, ex quo aperto prodeunt ſemina.



g. T. II. P. III.

FRANCISCI MARIAE ZANOTTI

De elaſtris.

Sermo primus.

Minime vereor, Sodales optimi, ne cum elaſtrorum naturam explicare ingrediar, ſi me dixero timide admodum ad diſputandum accedere, id magis exordii cauſa videar dicere, quam ex animo. Scitis enim, rem eſſe perdifficilem, quam etiam, audacia neſcio qua mea, feci ipſe difficiliorem. Etenim cum ſæpe ex vobis audiviſſem, & quid Bernullius in lipſienſibus actis anni milleſimi ſeptingenteſimi trigeſimi quinti; & quid in actis academiæ pariſienſis anni milleſimi ſeptingenteſimi octavi & viceſimi ſuper eadem re Camuſius tradidiſſet; eoſque intellexiſſem non directis rationibus, ſed, ut magno ingenio ſunt homines, longe petitis, maximeque contortis, uti; mihi autem nec otii ad ſubtilitates tantas perquirendas, nec valetudinis ſatis eſſet, conſilium cepi æque commodum, atque audax. Volui quippe quæſtionem eamdem nullo auctore, magiſtro nullo, nullo duce, ingredi, & in rem ipſam directe intuens, ſola ratione ductus, quid in ea poſſem, experiri; ſperabam enim fore, ut ſi omnia quam diligentiſſime circumſpexiſſem, in eas tandem ſententias mea ſponte laberer, ad quas illorum me invitabat auctoritas. Qua in re, ut in aliis ſæpe multis, fefellit me ratio, & quo nolebam, adduxit. Nam cum mihi diu ſatis indulſiſſem, meque ad auctores, a quibus diſceſſeram, revocaſſem, plane ſenſi, me, quamvis eadem, quæ illi, ſuppoſuiſſem, ac de multis inter nos conveniret, in eos tamen incidiſſe locos, in quibus permagna eſſet diſſenſio. Atque ego quidem ab opinionibus meis deſtitiſſem, ſi auctoritate vinci maluiſſem, quam ratione; ſed credo, ne illos quidem

dem voluiſſe auctoritate vincere. Eas ergo vobis exponam, ac cum ad locos venero, qui maxime in quæſtione ſunt, monebo, remque totam iudicio veſtro committam; modo illud memineritis, rem hic tantum inſpiciendam eſſe, auctoritate nihil agendum; hac enim ſi agatur, quis ego ſum, quem quiſquam cum Camuſio, aut Bernullio comparet; hominibus auctoritate tanta, ut vel hac una perſuadere poſſint quidlibet? Hinc autem totius ſermonis naſcetur exordium.

Definitiones & aſſumta.

Elaſtrum cum dico, intelligi volo angulum æqualia crura habentem, qui ſi claudatur, conſtringaturve, ſibique poſtea relinquatur, ſua ſe ſponte aperiat. Dilatationem illam, in qua elaſtrum quieſcit ſua ſponte, voco dilatationem naturalem.

Quod ſi de multis elaſtris ſermo fuerit, ſimilia inter ſe omnia eſſe putabo, & omnino æqualia, ut neque crurum longitudine, neque vi ſeſe aperiendi quidquam differant.

Neque vero in his materiæ, aut maſſæ pondus conſiderabo; & omnino ſic diſſeram, quaſi elaſtrorum maſſa ad id, quod quæritur, nihil faceret; quod quidem & illi fecerunt, qui adhuc de elaſtris diſſeruerunt. Quapropter cum elaſtrum conſtrictum, ſibique relictum, ad dilatationem ſuam naturalem non niſi certo tempore perveniat, non id quidem propter maſſam fieri putandum eſt, quæ ipſum retardet, ſed propter elaſticitatis ipſius naturam, quæ id poſtulet.

Elaſtrorum ſeriem cum dicam, intelligam elaſtra plura, deinceps poſita, & in eadem recta linea inſiſtentia, ut extremis cruribus ſe mutuo contingant.

Elaſtrum quodlibet, ſive quamlibet elaſtrorum ſeriem ſic dilatari putabo, ut extrema crura per eamdem lineam rectam toto relaxationis tempore ferantur.

Quod ſi elaſtrum, ſive elaſtrorum ſeries, ex neutra parte impediatur, quo minus relaxet ſeſe, id elaſtrum, ſive hanc ſeriem vocabo liberam, ſin autem ex altera parte in obicem immobilem infigatur, ultra quem relaxare ſe

ſe nullo modo poſſit, elaſtrum infixum dicam, ſive ſeriem infixam.

Quod ſi elaſtrum, aut elaſtrorum ſeries, aperiendo ſe ſe, corpus aliquod pellat, ipſumque ſecum deferat, hoc elaſtrum, ſive hanc ſeriem deferentem appellabo. Quæ nullum corpus deferunt, elaſtra ſive ſeries dicam ſine adiuncto.

Harum ego vires explicans dicam breviter, & dilucide, quantum potero; an vere, vos videritis; ſed nitar hoc etiam. Quod ſi cunctari interdum videbor, & in rebus ſingulis paullo diutius hærere, quam iſti ſolent, qui hæc profitentur; ex hoc ipſo intelligetis, quanto ſtudio ad veritatem contenderim; ſimulque dabitis hanc veniam homini non mathematico, rem difficillimam, & prope novam tractanti. Ut autem a ſimpliciſſimis exordiamur, dicam primum de elaſtro uno, eoque tum libero, tum infixo. Veniam poſtea ad ſeries multorum.

De uno elaſtro vel libero, vel infixo.

SIt unum elaſtrum, idque liberum, ABC (*Fig.* 1), quod primum clauſum ſit, ut ambo eius crura BA, BC in unam lineam coeant BM; poſtea ſibi relinquatur. Non eſt dubium, quin ſtatim ſe aperiat, & iactans ſe ſe in utramque partem æquali vi ad naturalem dilatationem feratur. Dilatationem eius naturalem lineà AC definio, quam linea BM mediam ſecat in M.

Ac tempus utique, quo elaſtrum ABC ad naturalem dilatationem pervenit, eſt illud ipſum tempus, quo punctum A percurrit lineam MA; nam eodem tempore etiam punctum C percurrit lineam MC; hiſque duobus motibus naturalis dilatatio efficitur.

Sit iam unum elaſtrum, idque infixum, DEF (*Fig.* 2), quod ſcilicet extremum alterum D in obicem quemdam immobilem XZ infixum habeat. Sitque primum clauſum, conſtrictumque totum in linea recta XZ; poſtea ſibi relinquatur. Non eſt dubium, quin ſtatim ſe aperiat, ſeſeque totum iactans in partem alteram, ad naturalem dilatationem feratur. Dilatationem eius naturalem definio linea DF.

Porro

Porro tempus, quo elaſtrum DEF ad naturalem dilatationem pervenit, eſt illud ipſum tempus, quo punctum F percurrit totam lineam DF.

Iam vero ſi elaſtra duo, unum liberum ABC, alterum infixum DEF inter ſe comparentur, & dilatationum tempora quærantur, mihi veriſimile valde eſt, utrumque illorum ad naturalem dilatationem pervenire æquali tempore. Cur enim non perveniant, cum & ipſa æqualia ſint, & eadem elaſticitatis vi polleant, ut idem plane effectus, niſi ſi quid obſtet, in utroque pariter ſequi debeat?

At, inquies, hoc ipſum obſtat, quod elaſtrum ABC tantummodo dilatatur; elaſtrum vero DEF, præter quam quod dilatatur, progreſſivum etiam motum habet, deferturque totum ab linea XZ verſus F; quapropter vis, qua agitur elaſtrum ABC, dilatationem tantum, vis vero, qua agitur elaſtrum DEF, non dilatationem tantum, ſed etiam totius elaſtri progreſſionem debet parere, quarum alteram dum facit, retardatur in altera. Dilatationem ergo elaſtri DEF retardat elaſtrum ipſum DEF, quod ab elaſticitate ſua, qua dilatatur, deferri etiam totum debet in partem alteram.

Verum id totum nihil eſt. Quæ enim nullius maſſæ ſunt, ſi ultro deferantur, vim deferentem nihil retardant; elaſtra autem nullius maſſæ eſſe ponuntur; ergo nihil retardant, etiamſi ultro deferantur. Niſi forte volumus, hominem aut ingenioſum, aut prudentem, aut temperantem in ſuo curſu retardari debere, propterea quod ſuum ſecum ingenium, aut prudentiam, aut temperantiam ferre debeat; quod ſi qui dixerit, rideatur; & ob id ipſum rideatur, quia neque ingenii, neque prudentiæ maſſa eſt ulla, neque temperantiæ. Ac ne a qualitatibus corporum diſcedam, quis putet, vim eam, qua corpus quodpiam aut rotundum, aut molle defertur, aut durum, ex eo retardari, quod ſimul cum corpore rotunditatem quoque eius, aut duritiem, aut mollitudinem ferre debeat? Hæc enim non ex iis rebus ſunt, quæ maſſam habent; ſed aliis categoriis ſubiiciuntur. Sed preſſius agamus, ac rem totam concludamus paucis ad hunc modum. Res, quæ deferuntur, vi deferenti retardationem tanto minorem afferunt, quanto ipſæ minoris ſunt maſſæ, ergo ſi elaſtra nullius maſſæ eſſe putantur, illud

etiam

etiam putandum eſt, nullam ab iis fieri, ſi quopiam deferantur, retardationem.

His poſitis iam facile oſtendam, in dilatationibus elaſtrorum ABC, DEF, velocitatem puncti F duplam eſſe velocitatis puncti C. Etenim cum ambo elaſtra ad naturalem dilatationem perveniant eodem tempore, ſequitur, ut punctum F lineam DF, & punctum C lineam MC percurrant eodem tempore, ideoque velocitates habeant proportionales lineis DF, MC. Eſt autem DF æqualis lineæ AC, ideſt dupla lineæ MC; ſequitur ergo, ut velocitas puncti F ſit dupla velocitatis puncti C.

Hactenus de uno elaſtro dixi vel libero, vel infixo; nunc de multorum ſerie dicam. Exordiar autem a ſerie infixa, quippe quia motum abſolutum in unam tantum partem habet, ideoque videtur eſſe ſimplicior.

De elaſtrorum ſerie infixa.

SIt ſeries infixa AG (*Fig.* 3) elaſtrorum quotlibet ABC, CDE, EFG, quæ alterum extremum A infixum habeat in obicem immobilem XZ. Primum clauſa & conſtricta ſit tota in linea recta XZ. Poſtea ſibi relinquatur. Dubium non eſt, quin ea ſtatim ſe aperiat, ſeſeque totam proiiciat ab linea XZ verſus G, uſque eo dum ad naturalem dilatationem perveniat. Hanc dilatationem linea AG definiemus.

Quo modo dilatatio hæc fiat, & ſeries tota ſe ſe explicet, paucis aperiam, & in omnibus veri ſimilitudine quadam contentus ero. Evidentiam quærant, qui ſibi plus confidunt.

Initio cum ſeries tota clauſa eſt, premunt ſe ſe mutuo elaſtra omnia æqualiter; quippe quia æquali elaſticitate pollent omnia.

Poſtea cum libertas ſeriei datur ad partem alteram G, non eſt dubium, quin punctum G foras emicet, interim dum punctum E elaſtri EFG adhuc premit, & vim facit contra obicem XZ; dilatatur ergo ſtatim elaſtrum EFG.

Porro dilatari elaſtrum EFG non poteſt, quin eodem tempore preſſio eius contra elaſtrum CDE minuatur; eſt enim cuiuſque elaſtri in maiori dilatatione preſſio minor.

Non poteſt autem preſſio elaſtri EFG minor fieri, quin eodem tempore elaſtro proximo CDE cedat; quod elaſtrum CDE, cedente illo, ſequi debet, uſque eo dilatans ſe ſe, ut preſſiones utriuſque elaſtri æquales ſemper inter ſe maneant.

Aequales autem manere preſſiones non poſſunt, niſi ſi dilatationes quoque elaſtrorum æquales ſemper inter ſe ſint; oportet igitur, ut aperiente, ac dilatante ſe ſe elaſtro EFG, aperiat ſe ſe eodem tempore, ac dilatet æqualiter elaſtrum proximum CDE.

Idemque transferri poteſt cum ad elaſtra alia, quibus ſeries componitur, tum vero etiam ad dilatationes alias, quæ primam conſecuntur. Quo apparet, & elaſtra omnia eodem tempore aperiri, & æqualibus temporibus æquales dilatationes obtinere, & eodem tempore ad naturalem dilatationem pervenire.

Quæ cum ita ſint, manifeſtum eſt, puncta G, E, C, eodem tempore omnia, ab linea XZ diſcedere, ac ſic progredi, ut intervalla GE, EC, CA inter ſe ſemper æqualia ſint; quo fit, ut punctorum G, E, C velocitates non æquales ſint inter ſe, ſed proportionales lineis AG, AE, AC; quas puncta ipſa G, E, C percurrunt eodem tempore.

His omnibus illud etiam addo: Elaſtrum quodvis in ſerie poſitum ad naturalem dilatationem ſuam eodem tempore pervenit, quo ad eamdem perveniret, ſi ſolum eſſet, & extra omnem ſeriem. Quod ſi in uno GFE manifeſtum fiat, erit idem manifeſtum & in aliis. Et vero elaſtrum GFE quid aliud habet ex aliorum, quæ ipſum inſecuntur, coniunctione, & vicinia, niſi hoc unum, quod, dum dilatat ipſum ſe ſe, defertur ab illis ultro, & promovetur? Quis autem non videt, dilatationis tempus in elaſtro nihil mutari, ex eo, quod totum, dum dilatatur, deferatur alio? Niſi forte putamus, elaſtrum in navi poſitum alio tempore dilatari, ſi immobilis navis ſedeat, alio, ſi aquarum curſu rapiatur.

Quod ſi ita eſt, oportet iam ſeriem quamvis infixam, cuiuſcumque ſit longitudinis, ſive quocumque elaſtrorum numero conſtet, eodem ſemper tempore ad naturalem dilatationem pervenire; quippe cum elaſtra eius omnia,

quot-

quotcumque ſunt, ad naturalem dilatationem perveniant eodem tempore, quo unumquodque illorum ad eam perveniret, ſi ſolum eſſet, & in nullam ſeriem implicitum.

Atque his denique rebus fit, ut velocitas extremi puncti G tanto ſit maior, quanto longior eſt ſeries, ſive quanto plura ſunt elaſtra. Etenim cum quævis ſeries ad naturalem ſuam dilatationem perveniat eodem tempore, ſequitur in quavis ſerie, ut punctum extremum G totam lineam AG percurrat eodem tempore; ideoque eius velocitas tanto ſit maior, quanto hæc linea longior eſt, ideſt quanto longior eſt ſeries, ſive quanto plura ſunt elaſtra.

Idque ſane rationi conſentaneum videtur; nam cum omnia elaſtra in unum punctum G nitantur, facile apparet, tanto id punctum velocius eſſe debere, quanto elaſtra ipſa ſunt plura.

Infixas ſeries adhuc conſideravi, quas explicans mihi videor quodammodo etiam liberas explicaſſe; quod facile intelligetis, ſi modo prius cognoſcatis, ſeriem quamque liberam, dum aperitur, in duas infixas diſpertiri. Id, quod ſtatim planum faciam.

De elaſtrorum ſerie libera.

SIt ſeries libera AB (*Fig.* 4), quæ primum clauſa, atque conſtricta in unam lineam EM ita, ut puncta extrema A, & B in M coeant, poſtea ſibi relinquatur. Non eſt dubium, quin ea ſtatim ſe aperiat, & iactans ſe ſe in utramque partem æquali vi, ad naturalem dilatationem feratur, puncto eius medio M manente immoto in linea EM. Dilatationem naturalem ſeriei definio linea AB, quam mediam ſecat linea EM.

Dividitur ergo ſeries tota in duas æquales partes MA, MB; has ego dico pro duabus ſeriebus infixis haberi poſſe; idque ſatis erit in altera, puta MB, demonſtraſſe.

Et primum quidem habet pars MB extremum unum immobile in M, ſeſeque totam in eamdem partem proiicit verſus B; quo ſane infixam ſeriem imitatur. Præterea cum vis tota totius ſeriei, quæ ex viribus elaſtrorum omnium conflatur, in duas partes MA, MB æqualiter diſtribuatur, ſequitur, ut pars MB ex hac diſtributione eam vim obti-

neat, quæ conflatur ex dimidio elaſtrorum numero, ideſt ex illo ipſo elaſtrorum numero, quibus ipſa compoſita eſt; atqui eamdem hanc vim prorſus haberet, ſi ſeries infixa eſſet; imitatur ergo ſeriem infixam in hoc etiam; & omnino pro ſerie infixa haberi poteſt. Quod ſi conceditur in parte MB, nihil eſt, cur non etiam in parte MA concedatur.

Iam ergo ſi ea, quæ de ſeriebus infixis diximus, ad partes MA, MB transferantur, facile colligentur omnia, quæ ad ſeriem liberam pertinent. Hæc recenſebo paucis.

Primum elaſtra omnia ſeriei liberæ AB æqualibus temporibus æquales habent dilatationes, ideoque ad naturalem dilatationem perveniunt omnia eodem tempore. Idque etiam ex eo colligi poteſt, quod cum ſeries tota AB continua ſit, & elaſtra eius omnia inter ſe communicent, fieri nequit, ut elaſtrum alterum, ne tantillo quidem tempore, conſtrictius maneat, aut explicatius, quam alterum.

Præterea elaſtrum quodlibet ſeriei liberæ AB eodem tempore ad naturalem dilatationem pervenit, quo ad eamdem perveniret, ſi ſolum eſſet, & extra omnem ſeriem poſitum.

Præterea ſeries tota AB, quicumque elaſtrorum ſit numerus, ſive quæcumque ſit ſeriei longitudo, ad naturalem ſuam dilatationem eodem tempore pervenit; quippe quia partes ambæ MA, MB, quicumque elaſtrorum ſit numerus, ſive quæcumque ipſarum ſit longitudo, eodem ſemper tempore ad naturalem dilatationem perveniunt; ſunt enim ambæ tamquam duæ ſeries infixæ.

Deinde extremorum A, & B tanto maior eſt velocitas, quanto longior eſt ſeries AB, ſive quanto maior eſt elaſtrorum numerus. Etenim, quæcumque ſit ſeriei longitudo, eodem ſemper tempore ad naturalem dilatationem ſeries pervenit, ideoque eodem ſemper tempore punctum B percurrit lineam MB; & ſimiliter eodem ſemper tempore punctum A percurrit lineam MA. Igitur velocitas puncti B tanto eſt maior, quanto eſt longior linea MB; & ſimiliter velocitas puncti A tanto eſt maior, quanto longior eſt linea MA. Manifeſtum eſt autem lineam utramque MA, MB tanto longiorem eſſe, quanto eſt longior tota ſeries AB, ſive quanto eſt maior elaſtrorum numerus.

Iam vero ſi ſeriem liberam AB cum infixa quavis conferre

ferre velimus, nihil negotii erit oſtendere, velocitatem utriuſvis puncti A, vel B ita eſſe ad velocitatem extremi mobilis ſeriei cuiuſvis infixæ, uti eſt longitudo MA, vel MB, ideſt dimidiata longitudo ſeriei liberæ, ad longitudinem ſeriei infixæ.

Hæc quaſi curſim propoſui. Qui enim ſuperiora conceſſerit, ſpero fore, ut hæc etiam per ſe intelligat. Si qui autem illa concedenda eſſe non exiſtimet; in illis hærendum eſt, non in his. Sed iam ad ſeries deferentes tranſeamus, quæ, ut ſupra dixi, eæ ſunt, quæ ſe ſe aperientes in corpora quæpiam incurrunt, & ea ſecum auferunt.

De ſeriebus deferentibus.

Definitiones, & aſſumta.

Hic vero qui elaſtra, elaſtrorumque ſeries ab omni maſſa præſcindi volunt, hypotheſin ſuam, meo quidem iudicio, vel minuant oportet, vel explicent. Ni faciant; motum corporis, quod ſerie defertur, & velocitatem fruſtra quærent. Nam ſi velocitas ſeriei in maſſa nulla inhæreat, nulla erit, a ſerie quidem, motus quantitas: unde ergo quantitatem motus accipient corpora, quæ a ſerie pelluntur? Ac corporum quidem, quæ pelluntur, velocitates ex ea proportione ſolemus quærere, quam habent maſſæ ambæ pellentis ſimul & pulſi ad maſſam unam pellentis; qua regula quo modo uti poterimus, ſi pellentis ſeriei maſſam nullam omnino eſſe velimus? Ac ſi regulam hanc ipſam ſequi volumus, oportebit utique, cum ſeriei maſſa ponatur nulla, velocitatem eius a pulſu quovis in infinitum minui. Quis autem erit infinitæ huius retardationis modus? Vel qua ratione definietur?

Quando igitur deferentes ſeries explicare ingredimur, quæ pellunt corpora, eiſque certam motus quantitatem tribuunt; nemo, ut credo, ægre feret, ſi maſſam aliquam ſupponamus, in qua ſerierum ipſarum celeritates inhæreant; non ut celeritates, quas ſeriebus convenire diximus, propter hanc maſſam mutentur, ſed ut eædem maneant, & inhæreant in hac maſſa.

Ut

Ut vero indulgeamus auctoribus, & hanc ipſam, quam ſuppoſuimus, maſſam, quantum poſſumus, contemnamus; eam primum perexiguam eſſe putabimus, ut, ſi cum maſſa eius corporis, quod a ſerie pellitur, comparetur, haberi poſſit pro nulla. Deinde putabimus, eam æqualem eſſe in ſeriebus omnibus, ut poſſit etiam in duarum ſerierum comparatione, propter æqualitatem ſcilicet, contemni. Sic maſſam ſupponemus aliquam, (quod erat ad quantitatem motus, pulſionemque faciendam neceſſarium) & eam ponemus, quæ in comparationibus omnibus (quod maxime auctores videntur velle) haberi poſſit pro non poſita. Hanc maſſam appellabo poſthac maſſam ſeriei.

Porro celeritatem ſeriei cum dixero, celeritatem intelligam puncti extremi, in quod ſeries tota nititur. Quod ſi qui velit non celeritatem ultimam, ſed mediam quamdam intelligere; nihil repugnabo. Eſt enim ultimarum, & mediarum proportio eadem. His prævisis ſeries infixas, & deferentes explicare ordiar ad hunc modum.

De ſeriebus infixis deferentibus.

SIt ſeries AB (*Fig.* 5), quæ altero extremo A incumbat obſtaculo immobili XZ, extremo altero B urgeat globum Q, quem ſe ſe explicans ſecum auferat.

Hic vero dubium eſſe non poteſt, quin totius ſeriei dilatatio obiecto globo retardetur. Quo modo id fiat, & quas vires, velocitateſque accipiat globus, per concluſiunculas paucas exſequar.

Prima. Quantitas motus, qua ſeries AB per ſe ipſa, nullo oppoſito globo, fertur, proportionalis eſt ſeriei longitudini. Quod ita probo. Cuiusvis ſeriei celeritatem in eadem ſemper maſſa inhærere volumus: ergo quantitas motus in quavis ſerie proportionalis celeritati eſt; atqui celeritas eſt proportionalis longitudini ſeriei, ut ſupra oſtendimus; ergo etiam quantitas motus proportionalis eſt longitudini ſeriei.

Secunda. Elaſtra omnia, quibus ſeries AB componitur, æqualiter a globo in ſuis dilatationibus retardantur. Id ita probo. Urgente ſerie globum Q, elaſtra omnia, quibus ipſa componitur, æquali tempore æqualiter dilatantur;

tur; nihil enim cauſſæ eſt, cur alterius preſſio a preſſione alterius vincatur; atque huc redeunt argumenta, quæ ſupra induximus; atqui etiam dilatarentur æqualiter æquali tempore, ſi globus nullus ſeriem retardaret, ergo elaſtra omnia, quibus ſeries componitur, in dilatationibus ſuis retardantur a globo Q æqualiter.

Tertia. Series AB globum Q uſque premit, donec ad naturalem dilatationem pervenit. Simul ut ſeries ad hanc pervenit, globus ab ea diſiungitur, conceptoque impetu longius abit. Id ita oſtendo. Series AB elaſticitate ſua perpetuo urgetur, ideoque alios, atque alios motus perpetuo accipit; ideoque perpetuo acceleratur; donec ad naturalem dilatationem perveniat. Atqui quamdiu acceleratur, tamdiu globum debet premere; ergo globum uſque eo premit, donec ad naturalem dilatationem perveniat. Ad hanc vero cum pervenerit, retardari ſtatim incipit; globus ergo acceptum impetum conſervans, & abiens longius ab ea diſiungitur.

Quarta. Series AB premens globum Q ſuam omnem motus quantitatem in ipſum transfert. Quod ſic colligo. Premente ſerie globum Q, omnis motus quantitas in maſſam ſeriei, & maſſam globi proportionaliter diſtribuitur. Eſt autem ſeriei maſſa, ſi ad maſſam globi comparetur, ut ſupra monui, contemnenda; ergo ſeries ſuam omnem motus quantitatem in globum transfert.

Quinta. Velocitas globi Q proportionalis eſt longitudini ſeriei diviſæ per globum. Id ita probo. Longitudo ſeriei proportionalis eſt quantitati motus, quæ in globum Q transfertur; poteſt ergo pro ipſa motus quantitate ſumi; atqui quantitas motus per globum diviſa proportionalis eſt globi velocitati; ergo longitudo ſeriei per globum diviſa proportionalis eſt ipſius globi velocitati. Ita ſi longitudo ſeriei ſit $= S$, erit globi velocitas $= \frac{S}{Q}$.

Sexta. Tempus, quo ſeries AB globum Q deferens dilatatur, ſive quo globus lineam AB percurrit, proportionale eſt globo ipſi. Id ſtatim ex eo patet, quod velocitas globi, ut modo oſtendimus, eſt $= \frac{S}{Q}$. Quippe dubium non eſt, quin velocitas ſit ſpatium diviſum per tempus; cum ſit

ergo

ergo S ſpatium illud, quod globus percurrit, dum ſe ries dilatatur, ſitque velocitas $= \frac{S}{Q}$, neceſſe eſt, ut Q exprimat tempus, ideoque ſit tempus proportionale globo Q.

An velocitas globi Q exprimenda ſit per $\sqrt{\frac{S}{Q}}$.

HIc enimvero aperte fateor, Sodales lectiſſimi, me valde vereri, ne quid offendam; vix enim ſatis recte dici poſſe mihi videtur, quod contra Camuſium, Bernulliumque dicatur. Bernullius, nec uno in loco, ea tradidit, quæ ſi ſequamur, dicendum ſit, velocitatem globi Q non eſſe, ut ego volo, $\frac{S}{Q}$, ſed $\sqrt{\frac{S}{Q}}$. Camuſius eamdem rem tractans ſic diſputat, ut videatur Bernullio velle obſequi. Quid illos adduxerit, ut hanc metiendæ velocitatis in globo Q rationem ſequantur; quibuſque argumentis ſuam ſententiam defendant, non quæro; propterea quod non aliorum ſenſa examinare conſtitui; ſed mea proponere. Tamen ne videar, ſi nulla propoſita cauſſa ab horum opinione diſceſſerim, homines, quos maxime vereor, contemſiſſe; paucula adnotabo, quæ cum ex illorum ſententia neceſſario ſequantur, mihi tamen videntur dici minus commode.

Et primum quidem cum velocitas globi Q, ex illorum ſententia, ſit $\sqrt{\frac{S}{Q}}$, erit motus quantitas $= \sqrt{SQ}$. Atqui id ipſum dicitur minus commode. Etenim ſi motus quantitas eſt $\sqrt{SQ}$; eadem manente ſerie S, ſi modo globus Q augeatur, motus etiam quantitas augebitur. Quis autem intelligat, quo modo motus quantitas augeri debeat, cum ſeries, unde omnis motus oritur, maneat eadem, ſolumque globus augeatur, qui a ſerie moveri debet?

Ne illud quidem ſatis belle dicitur, ſeriem, ſi brevior ſit, ideoque paucioribus elaſtris conſtet, eamdem motus quantitatem facere, quam faceret, ſi longior eſſet, & conſtaret elaſtris pluribus. Quod tamen ex illorum ſententia neceſſario conſequitur. Etenim cum motus quantitas ſit $\sqrt{SQ}$,

mane-

manebit hæc eadem, quantumcumque ſeries S minuatur; modo globus Q tanto augeatur, quanto illa minuitur.

Quid quod etiam ſeries brevior maiorem motus quantitatem interdum faciet, quam longior. Velut ſi imminuta ſerie S globum Q uſque eo auxeris, ut productum totum SQ fiat maius.

Hæc illi confiteantur, oportet, qui velocitatem ſeriei, ſive globi, radice ipſius ſeriei per globum diviſæ metiuntur. Quæ incommoda, ut vere dicam, me deterrent; atque haud ſcio, an qui illam metiendi rationem ſecuntur, cum ad hæc venerint, ſibi ipſi ſatis placeant. Hactenus deferentes ſeries expoſui, eaſque infixas; nunc illas exponamus, quas liberas dicimus.

De ſeriebus liberis deferentibus.

Sit ſeries libera AB (*Fig. 6*), quæ clauſa primum in linea EM ſibi poſtea relinquatur; eaque, aperiens ſe ſe, duos globos P, & R pellat in contraria. Hic vero multa per ſe occurrunt uſque adeo manifeſta, ut demonſtrationem prope recuſent; itaque, quantum ſcio, negantur ab nemine. Hæc paucis proponam, & quaſi curſim.

Primum. Non eſt dubium, quin ſeries AB, aperiens ſe ſe, in prima ſui dilatatione utrumque globum pellat æqualiter; ipſa enim per ſe ſe in utramque partem æqualiter nititur. Quod ſi facit in prima dilatatione, nihil eſt cur idem non faciat & in aliis.

Secundo. In prima ſeriei dilatatione elaſtra omnia æqualiter dilatantur. Nihil eſt enim, cur in illa communi lucta alterum elaſtrum cedat alteri. Quod idem accidit in aliis dilatationibus, quæ ſecuntur; quo fit, ut elaſtra eiuſdem ſeriei omnia ad naturalem dilatationem perveniant eodem tempore.

Tertio. Pelluntur globi ambo uſque eo, dum ſeries ad naturalem dilatationem pervenit. Elaſticitate enim in utramque partem perpetuo urgente, oportet, ſeriem perpetuo in utramque partem accelerari, ideoque utrumque globum perpetuo urgere. Simul ut ſeries ad naturalem dilatationem pervenit, acceleratio ceſſat; globi vero abeuntes longius a ſerie diſiunguntur.

Quarto. Globus uterque æqualem motus quantitatem a ſerie accipit; quippe quia in dilatationibus ſingulis uterque æqualiter pellitur.

Quinto. Quantacumque fuerint ſpatia MA, MB a globis P, & R eodem tempore percurſa, erit MA ad MB, uti velocitas globi P ad velocitatem globi R. Quippe quia velocitates ſpatiis æſtimantur, cum tempus eſt idem.

Sexto. Iiſdem poſitis erit MA ad MB, uti reciproce globus R ad globum P; nam cum motus quantitates æquales ſint, oportet velocitates globorum globis ipſis eſſe reciprocas; ſunt autem velocitates globorum (quod modo oſtendi) uti ſpatia MA, MB.

Septimo. Globi P, & R ſic procedunt, ut commune centrum gravitatis immotum maneat in M. Quippe quia quocumque globi P, & R eodem tempore pervenerint, erit P ad R, uti reciproce MB ad MA.

Octavo. Numerus elaſtrorum, quæ inſiſtunt in linea MA, eſt ſemper ad numerum elaſtrorum, quæ inſiſtunt in linea MB, uti linea MA ad lineam MB. Quippe, cum omnia ſeriei elaſtra æquales ſemper inter ſe habeant dilatationes, neceſſario ſequitur, ut elaſtra tanto plura, ſive tanto pauciora in linea MA inſiſtant, quam in linea MB, quanto longior, aut brevior eſt linea MA, quam linea MB.

Atque hæc quidem vel ſine demonſtratione conceduntur fere ab omnibus. Nunc ea proponam, quæ quo facilius concedantur, ſi non ad veritatem, at certe ad magnam veri ſimilitudinem conabor oſtendere.

Dico primum. Vis tota ſeriei AB, quæ motum efficit, proportionalis eſt longitudini ipſius ſeriei. Quod ſic colligo. Quanto longior eſt ſeries, tanto plura ſunt elaſtra, ideoque tanto maior in ſerie eſt elaſticitatis vis. Atqui hæc illa eſt, quæ motum efficit; ergo quanto longior eſt ſeries, tanto eſt maior ſeriei vis, quæ motum efficit.

Dico ſecundo. Motus quantitas utriuſvis globi, ſive P, ſive R, proportionalis eſt longitudini ſeriei. Id probo. Quoniam globi P, & R quantitates motus habent æquales, par eſt credere, vim totam ſeriei, quæ motum efficit, ita diſtribui, ut dimidia una agat in P, dimidia altera in R; eritque propterea motus quantitas, ſive in P, ſive in R, pro.

proportionalis huic dimidiæ; ergo etiam proportionalis toti; ergo etiam proportionalis longitudini ſeriei.

Dico tertio. Velocitas globi P proportionalis eſt longitudini ſeriei AB diviſæ per P; itemque velocitas globi R proportionalis eſt longitudini ſeriei AB diviſæ per R. Quod ita oſtendo. Longitudo ſeriei AB proportionalis eſt motus quantitati, ideoque pro ipſa motus quantitate ſumi poteſt; atqui motus quantitas diviſa per P proportionalis eſt velocitati globi P; itemque motus quantitas diviſa per R proportionalis eſt velocitati globi R; ergo longitudo ſeriei AB diviſa per P erit proportionalis velocitati globi P; itemque longitudo ſeriei AB diviſa per R erit proportionalis velocitati globi R. Si ergo fuerit ſeriei longitudo $= S$, erit globi P velocitas $= \frac{S}{P}$; velocitas vero globi R erit $= \frac{S}{R}$.

Dico quarto. Tempus, quo globus P percurrit ſpatium MA, eſt $= \frac{MA : P}{S}$, & tempus, quo globus R percurrit ſpatium MB, eſt $= \frac{MB : R}{S}$. Id ita probo. In omni motu tempus æquale eſt ſpatio diviſo per velocitatem; cum ergo ſpatium decurſum a globo P ſit $= MA$; velocitas vero ſit $= \frac{S}{P}$, ſequitur, ut tempus, quo globus P conficit ſpatium MA, ſit $= \frac{MA : P}{S}$. Eodem modo invenietur tempus, quo globus R conficit ſpatium MB, eſſe $= \frac{MB : R}{S}$. Quamquam cum tempora hæc duo æqualia eſſe debeant, invento uno quærendum non erit alterum.

Dico quinto. Tempus, quo ſive globus P ſpatium MA, ſive globus R ſpatium MB conficit, eſt $= \frac{PR}{P+R}$, quam menſuram noto, quia videtur commodiſſima; ceterum ex his, quæ modo dixi, facillime ducitur. Etenim cum ſit MA, MB : : R, P, ſequitur, ut ſit $\frac{MA}{MA+MB}$, ideſt $\frac{MA}{S} = \frac{R}{P+R}$;

 & ſimi-

& ſimiliter $\frac{MB}{S} = \frac{P}{P+R}$; cum ſit ergo tempus globi P, ut ſupra docui, $= \frac{MA:P}{S}$, & tempus globi $R = \frac{MB:R}{S}$; ſi loco $\frac{MA}{S}$ ſubſtituatur $\frac{R}{P+R}$, & loco $\frac{MB}{S}$ ſubſtituatur $\frac{P}{P+R}$, fiet utrumque tempus $= \frac{PR}{P+R}$.

Dico ſexto. Utervis globus, ſive P, ſive R, ea vi pellitur, qua pelleretur a ſerie infixa, quæ æqualis eſſet ſeriei liberæ AB dimidiatæ. Probare id nitar ad hunc modum. Vis motum efficiens in ſerie quavis tanta eſt, quanta eſt ſeries ipſa; ſi ſit igitur ſeries infixa dimidia ſeriei AB, dimidiam quoque habebit vim ſeriei ipſius AB; atqui globus utervis, ſive P, ſive R, urgetur vi dimidia ſeriei AB; ergo ea vi urgetur, qua urgeretur a ſerie infixa, quæ eſſet æqualis ſeriei AB dimidiatæ.

Hinc ad omnes infixarum, liberarumque ſerierum comparationes patet aditus.

Dico ſeptimo. Si partes ſeriei MA, MB ſint inæquales (eſſe autem inæquales oportet, ſi inæquales ſint globi P, & R) minime haberi poſſunt, tamquam duæ ſeries infixæ, quæ inter ſe ſe nihil communicent, & quaſi pariete quodam interpoſito diſiunctæ ſint. Id ita probo. Cum ſeries una & continua AB primum aperitur, vis eius omnis in duas æquales vires diſtribuitur, quarum altera ſe immittit per MA contra P, altera per MB contra R; quare pars ſeriei MA agit non vi ſua, ſed ea vi, quæ illi ex hac diſtributione contingit, quæque facile dimidia vis eſt totius ſeriei. Idem dico de parte MB. Atqui ſi hæ partes MA, MB duæ ſeries infixæ eſſent, nihilque inter ſe propter parietem interpoſitum communicarent, diſtributio illa, quam dixi, nulla fieret; & pars utraque ſeriei ageret vi tantum ſua; ergo hæ partes MA, MB minime haberi poſſunt, tamquam duæ ſeries infixæ, quæ propter parietem interpoſitum inter ſe ſe nihil communicent.

An ſint audiendi, qui putant ſeriei partes MA, MB *pro duabus ſeriebus infixis habendas eſſe.*

NOn ſum neſcius fore permultos, qui hanc æqualem totius vis in partes MA, MB diſtributionem minus probent. Iique contendent, partes has, quoniam puncto quodam fixo, atque immobili inter ſe dividuntur, perinde haberi poſſe, ut ſi firmiſſimo quodam pariete diviſæ eſſent, quo pariete & ſeriei totius continuitas, & partium inter ſe communicatio, & illa, quam dixi, totius vis diſtributio tolleretur. Quorum ratio quoniam in immobilitate puncti nititur; hanc prius immobilitatem paucis demonſtrabo, quo res tota melius cognoſcatur. Oſtendam poſtea quid interſit, utrum ſeriei partes puncto hocce, an pariete interpoſito dividantur.

Sit ſeries quævis libera AB (*Fig.* 7) conſtans elaſtris quotlibet AGH, HKL, LOB, quæ coacta primum in unam lineam EM, relaxetur poſtea, globos duos P, & R pellens in contraria. Hic dico, idem ſeriei punctum I per totum relaxationis tempus manere ſemper in linea EM. Quod ſic demonſtro.

Cum per totum relaxationis tempus elaſtra omnia æqualiter inter ſe ſemper dilatata eſſe debeant, erit ſemper baſis una AH ad ſummam baſium omnium, ideſt ad AB, ut elaſtrum unum AGH ad ſummam elaſtrorum omnium, ideſt ad ſeriem. Erit etiam (quod facile demonſtrari poteſt) AH ad HM, ut AGH ad HI; & omnino pars AM ad totam AB, uti pars AGHI ad ſeriem totam. Quod ſi ita eſt, erit quoque AM ad partem reliquam MB, uti AGHI ad partem reliquam ſeriei IKLOB. Atqui proportio AM ad MB eſt ſemper eadem; eſt enim ſemper AM ad MB, uti R ad P; ergo ſeries tota in eadem ſemper proportione dividetur ab linea EM; ergo in eodem ſemper ſeriei ipſius puncto I; ergo idem ſeriei punctum I manebit ſemper in linea EM.

Atque hoc ipſum punctum I, quoniam ab linea EM numquam dimovetur, illud eſt, quod multi habent pro immobili; eoque duas ſeriei partes ita diſiungi volunt, uti diſiungerentur a pariete. Quid enim intereſt, inquiunt *illi*,

cum

cum ſit punctum immobile æque ut paries? Quod ſi interpoſitus paries & ſeriei continuitatem, & illam totius vis in utramque partem diſtributionem tollit; cur non eam pariter tollat punctum I? Quibus ego adduci non poſſum, ut aſſentiar.

Hoc enim intereſt inter punctum I, & parietem; quod immobilitas puncti I ab ipſa ſeriei continuitate, & totius vis diſtributione oritur; non ergo tollere has poteſt, quæ ſi non eſſent, ne ipſa quidem eſſet. At immobilitas parietis non ab his oritur, ſed eſt ipſa per ſe ſe; itaque & ſeriei continuitatem, & illam totius vis diſtributionem poteſt tollere, & tollit.

Idem declaro aliter. Cum ſeries tota continua ſit, oportet, ut globum utrumque æque premat, ideoque vim ſuam in utramque partem diſtribuat æqualiter; quod ſi facit, oportet etiam, ut ex altera parte velocior fiat, ex altera tardior; ſintque ipſæ ſeriei partes velocitatibus proportionales. Atque hoc ipſo fit, ut punctum I in linea EM detineatur. Ergo non recte colligitur: punctum I in linea EM detinetur; igitur neque ſeries tota continua eſt, neque vim ſuam omnem æqualiter in ambas partes diſtribuit; detinetur enim punctum I in linea EM ob id ipſum. Nihil tale de pariete dici poteſt, qui in eodem loco manet, quia ipſe per ſe eſt immobilis.

Atque hæc differentia eo etiam manifeſtior eſt, quod quamvis punctum I in linea EM quaſi ſedeat, non impedit tamen, quo minus pars altera MB ad partem alteram MA ſe ſe accommodare debeat; idque eo valet, ut elaſtra partis alterius MB toto relaxationis tempore æque ſemper dilatata eſſe debeant, ut elaſtra partis alterius MA, ipſa ſeriei continuitate id poſtulante: quod minime eveniret, ſi ambæ hæ partes pariete interpoſito diſiungerentur. Præterea ſi in ipſo relaxationis tempore elaſtrum unum parti MB improviſo addatur, aut dematur, illico punctum I moveri, & ſimul alterius partis MA velocitas, & vis mutari debebit. At ſi paries lineæ EM ſubſtituatur, nullo modo ex alterius partis mutatione mutari debebit altera.

Dicet fortaſſe aliquis: cur quæſo, dum aperitur ſeries, vis eius omnis ſe ſe tam apte diſtribuit? Quis eam mentem huic vi indidit, ut cum ſeries in duas inæquales partes dividatur

vidatur, ſe ſe ipſa tamen diſtribuat æqualiter in ambas?

Quod ſi qui dicat, is mihi videbitur naturam virium nondum ſatis cognoviſſe. Quod enim eſt corpus, quod ſi moveatur, non artificioſiſſima in eo fiat, & aptiſſima, & commodiſſima ad omnia, totius vis diſtributio? Exemplum afferam ſimpliciſſimum. Rotetur pulſu quovis linea quævis ST (*Fig.* 8) circa unum ſui punctum C. An non ſtatim ut ea pellitur, vis omnis pulſu orta ſe ſe per totam ea ratione diſtribuit, ut in puncto C ſit nulla, in aliis vero punctis, vel partis CS, vel partis CT, tanto ſit maior, quanto unumquodque a puncto C longius diſtat? Quis quæſo hanc mentem ei dedit, ut, abſtinens ſe ſe a puncto C, ad puncta alia ſe applicet proportione tam commoda? Quid ſi linea ST non recta ſit, ſed inflexa, & contorta multis modis? Quam convenienter, quam apte, quam pulchre diffundet ſe ſe vis tota per flexus, & curvaturas omnes, ut ſit ubique tanto maior, quanto longius abeſt a puncto C! Quid? In iſtis ipſis elaſtrorum ſeriebus, quas adhuc conſideravimus, quantum eſt elaſticitatis, in ſe ſe explicanda, ut ita dicam, ingenium, quanta induſtria! Deſinant ergo mirari, ſi ſeries liberas explicantes, ingenii aliquid earum vi dediſſe videmur.

Parent enim divinæ cuidam neceſſitati motus, vireſque omnes, quam neceſſitatem ſi conſilio, & ſapientia carere vulgus putat, fallitur. Hæc enim, quæ longe a ratione noſtra abſunt, & quaſi ſua ſponte fiunt, non ſine ratione fiunt, ſed fiunt ratione meliori. Hæc habui dicere de elaſtris.

De vi corporum viva.

Valde autem vereor, ne hæc differens viſus ſim vobis illorum ſententiam labefactare velle, qui vim vivam quadrato velocitatis metiuntur; nam utique non nulla ſuſtuli, quæ ab his teneri & defendi ſolent. Qui quid dicant breviter recenſebo, monens in locis ſingulis, quid illis ex hoc noſtro ſermone concedi poſſit, quid negari debeat.

Et primum quod aiunt, vim vivam velocitatis quadrato æſtimandam eſſe, ſi modo hoc uno contenti ſint; ea quidem, quæ adhuc propoſui, nihil repugnant. Etenim in

id

id unice incubuimus, ut velocitatem conſtitueremus, quam globus quivis a ſerie quavis accipit. Quamcumque autem accipiat, quid impedit, quo minus vim eius vivam metientes, velocitatis quadratum, ſi res ferat, in maſſam ducamus?

Quod vero aiunt in ſerie libera AB (*Fig. 6*), (quæ, in duas partes MA, MB diviſa, globos duos pellit P, & R) vires vivas globorum P, & R proportionales eſſe partibus MA, MB; id etiam ex iis, quæ diximus, concedi poteſt. Etenim cum velocitates globorum P, & R lineis MA, MB exprimantur, erit vis viva globi P, ſi velocitatis quadrato æſtimetur, æqualis producto P : MA : MA; & vis viva globi R æqualis producto R : MB : MB; cum ſint autem P : MA & R : MB æqualia; productum illud erit ad hoc, ideſt vis viva globi P ad vim vivam globi R, uti MA ad MB.

Quod autem ad ſeries infixas omnes idem transferunt; & quemadmodum vires vivæ globorum P, & R proportionales ſunt partibus MA, MB, ſic pariter contendunt, vim vivam cuiuſque globi, qui a ſerie quavis infixa pellatur, proportionalem eſſe ſeriei, a qua pellitur, id enimvero concedi non poteſt. Nam præter quam quod partes MA, MB pro ſeriebus infixis haberi non debent; quod ſupra oſtendi; rem etiam ſecus ſe habere, ſic demonſtro. Sit ſeries quævis infixa $= S$. Globus $= Q$. Erit velocitas $= \frac{S}{Q}$ cuius quadratum ſi in maſſam ducatur, ut hi volunt, fiet vis viva $= \frac{SS}{Q}$, quæ minime proportionalis eſt ſeriei.

Ac ſcio ego quidem non hanc illos metiendæ velocitatis rationem tenere, ſed ſequi aliam; quippe radicem ſeriei per radicem globi dividunt, & ponunt velocitatem $\sqrt{\frac{S}{Q}}$. Idque ipſum ſcite faciunt, ut vim vivam proportionalem ſeriei poſſint invenire. Nam utique ſi $\sqrt{\frac{S}{Q}}$ quadretur, tum ducatur in maſſam Q, fiet vis viva æqualis ipſi S. Et quoniam miram hanc metiendæ velocitatis rationem ob id ipſum invexiſſe videntur, ut vim vivam proportionalem ſemper ſeriei eſſe, poſſent defendere; nihil ego quidem repugnarem, ſi cauſſas haberent graves, cur id defenderent.

Quas

Quas vero cauſſas habent? aut cur tam acriter defendunt, vim vivam proportionalem ſemper ſeriei eſſe? Nempe quia vis viva prius in ſerie eſt, deinde a ſerie in globum transfertur; eſt autem in ſerie quavis, vel potius in elaſtro quovis, eadem ſemper, & conſtans, & perpetua. Verum id ipſum quo modo probant? Videndum eſt enim, ne, cum cetera huius cauſa ponantur, hoc ipſum ponatur ſine cauſa. At, inquiunt, vis viva ſubſtantialis eſt, per ſeque ſubſiſtens, nec ab alio dependens; nam quamvis generetur a motu, ſtatim tamen ut eſt genita, evadit ſubſtantialis, quapropter nec augeri in eadem re, nec minui poteſt. An ſuam illam metiendæ velocitatis rationem in elaſtrorum ſeries invexerint, ut hæc defendant? Quæ ego quidem ſi intelligerem, fortaſſe concederem. Ut nunc ſum, libentius de ſubſtantiali forma Ariſtoteli aſſentiar, quam cuivis de ſubſtantiali iſta vi. Quæ vis ſubſtantialis, quamvis patronos habeat magnos, & graves, non mihi tamen tanti eſſe videtur, ut, eius defendendæ cauſſa, velocitatis menſuram, quam ſupra in elaſtrorum ſeriebus explicandis propoſui, mutandam eſſe cenſeam.

Fig. 1.

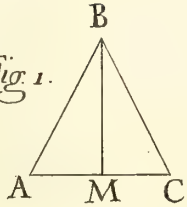


Fig. 2.

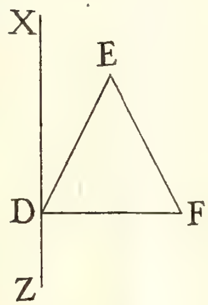


Fig. 3.

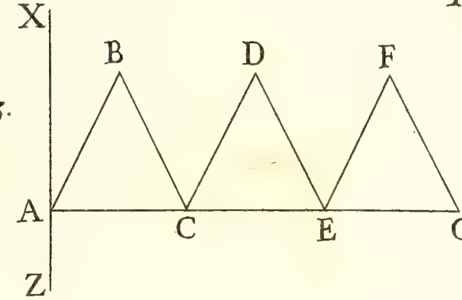


Fig. 4.

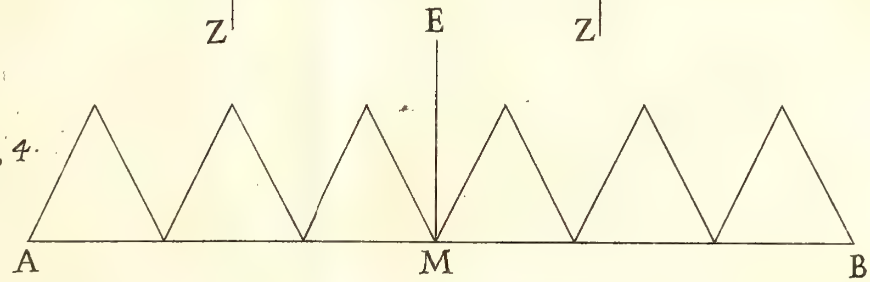


Fig. 5.

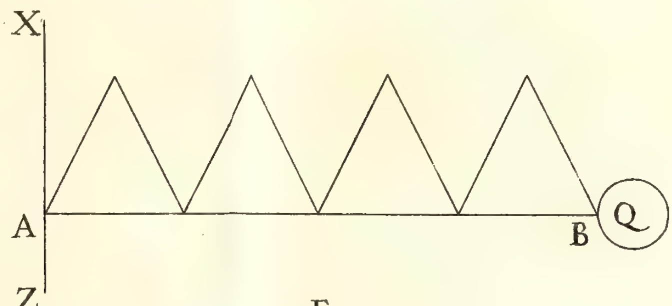


Fig. 6.

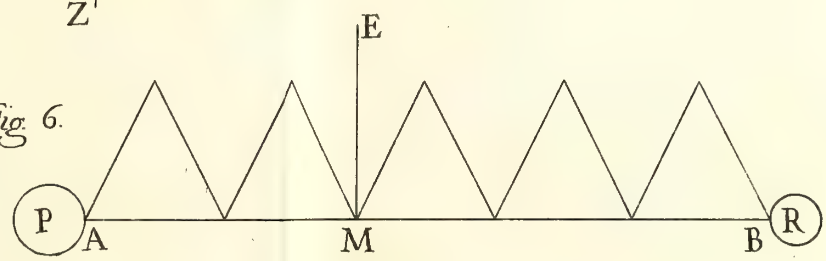


Fig. 7.

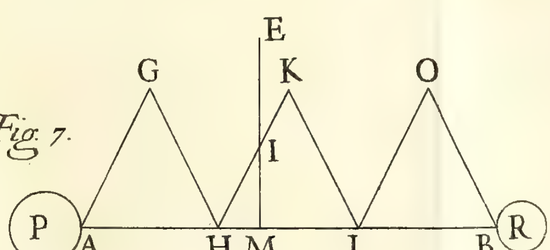
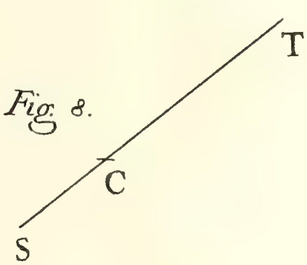


Fig. 8.



FRANCISCI MARIAE ZANOTTI

De elaſtris.

Sermo alter.

CUm paucis ante menſibus de elaſtrorum natura, & vi apud vos, Viri clariſſimi, diſſeruiſſem; non ignoratis profecto, quam multos ſermo ille meus, non academicos modo, ſed prope cuiuſvis generis homines ad eiuſdem rei ſtudium accenderit. Quem enim paullo doctiorem offendere per illos dies potui, qui mecum non de elaſtris vellet verba facere, & de vi corporum viva diſputare? Ad quas diſputationes vel inter ludos interdum, & in conviviis revocabar, ut locus iam nullus in urbe eſſet, in quo non aliquam academiam invenirem. Cum autem multi multa ex me quærerent, & alii obiicerent alia; plane intellexi, theoremata eſſe quædam, quæ totius controverſiæ initia contineant, quæque niſi quis teneat, vix poſſit ad abſolutam rei cognitionem pervenire. Hæc ego notavi, hortante maxime Carolo Graſſio Senatore ampliſſimo, ſodale noſtro, apud quem eſt etiam a litteratiſſimis viris, qui ad ipſum conſtitutis diebus conveniunt, non ſemel hac de re diſputatum. Hæc ipſa vobis legere conſtitui, ſperans fore, ut qua me alias humanitate, & patientia audiſtis, eadem nunc quoque audiatis. Sed ante moneo, me illa eadem in hoc ſermone aſſumere, quæ aſſumſi in altero, definitioneſque eaſdem ſequi; quod ipſi per vos facile intelligetis. His ergo inſiſtens pauca quædam ſtatim notabo, quæ ad elaſtrorum relaxationem generatim pertinent.

Elaſtrorum relaxatio explicatur.

ELaſtrum quodvis, dum relaxatur, continenter premit, & vim facit, ut dilatet ſe ſe magis, magiſque, donec ad naturalem dilatationem perveniat. Quare & continuam habet preſſionem, & continuam dilatationem, & continuam accelerationem.

Has continuitates per particulas infinitas infinite parvas ſic explico. Elaſtrum a conſtrictionis ſtatu ad naturalem dilatationem fertur per dilatatiunculas infinitas, infinite parvas, alias aliis deinceps ſuccedentes. In initio autem cuiuſque dilatatiunculæ elaſticitas preſſionem novam affert, quæ celeritatem auget. Quamquam preſſiones hæ novæ, quoniam elaſtro adveniunt magis, magiſque dilatato, aliæ aliis debiliores ſunt, donec elaſtrum ad naturalem dilatationem perveniat. Sic & preſſio in elaſtro eſt continua; & continua quoque eſt acceleratio; nam illa continua dicuntur, quæ intervallis diſiunguntur infinite parvis.

Elaſtrum quodvis, eodem ſemper dilatatiuncularum numero, ad naturalem dilatationem fertur, ſi ab eodem conſtrictionis ſtatu diſcedat. Et quoniam elaſtra omnia, de quibus infra agemus, ab eodem ſemper conſtrictionis ſtatu diſcedere putabimus, idcirco etiam putabimus, dilatatiuncularum numerum eumdem eſſe in omnibus, ideoque etiam eumdem in omnibus numerum preſſionum.

Quia vero, conſtricta elaſtrorum multorum ſerie, elaſtra ſingula in eodem conſtrictionis ſtatu ſunt, idcirco, ſi libertas ſeriei detur, elaſtra eius omnia eodem dilatatiuncularum numero ad naturalem dilatationem feruntur. Quæ ſane dilatatiunculæ iiſdem tempuſculis in elaſtris omnibus fiunt; omnia enim eodem tempore dilatari incipiunt, & eodem tempore ad naturalem dilatationem perveniunt. Quod & in alio ſermone declaravi; & mihi facile concedent omnes, quicumque hanc rem totam diligentius ſcrutati ſunt.

His prævifis theoremata nonnulla paucis exſequar, quibus tota relaxationis ratio, quod ex multorum ſermonibus intellexi, melius cognoſci poterit.

De vi, quam elaſtrum infixum in utramque partem facit, dum ſe ſe explicat.

SIt elaſtrum IKL (*Fig.* 1), quod ex parte I incumbat obici immobili XZ; conſtrictumque cum ſit, relaxetur. Punctum L ex hac relaxatione vim vivam concipiet; punctum I vim ſemper habebit mortuam; atque illa per totum relaxationis tempus perpetuo augebitur; hæc perpetuo minuetur. Vires dico, ſi modo intelligamus, celeritates punctorum L, & I in maſſa quapiam, quantulacumque ea ſit, inhærere; ſublata enim omni maſſa, vis nulla in celeritate eſſe poteſt.

Propoſitum autem ſic probo. In ſingulis dilatatiunculis elaſticitas preſſionem novam affert tum puncto I, tum puncto L; preſſiones autem ſingulæ, quibus afficitur punctum I, ſtatim in obice XZ eliduntur; itaque punctum I ſemper fertur contra obicem XZ una tantum preſſione: ea ſcilicet, qua in præſenti tempuſculo afficitur; quo fit vis mortua. Preſſiones vero, quibus afficitur punctum L, quoniam nullo obice eliduntur, in motus abeunt, & velocitates alias, atque alias, quæ conſervatæ, & in infinitum auctæ faciunt vim vivam. Quoniam vero preſſiones, ab elaſticitate ortæ, aliæ aliis deinceps debiliores ſunt, ſequitur, ut vis mortua puncti I perpetuo minuatur; vis viva puncti L, quamquam per incrementa alia aliis minora, perpetuo tamen augeatur.

His facile intelligitur, preſſionem omnem, ac vim ceſſare in puncto I ſimul, ut elaſtrum ad naturalem dilatationem pervenit; punctum vero L, concepto impetu, ferri longius.

Quod ſi ſeries elaſtrorum quotlibet ABC, CDE, EFG (*Fig.* 2) incumbens ex parte A obici immobili XZ, relaxetur; facile intelligitur, unumquodque elaſtrum, verbi gratia CDE, ex parte C, quæ ſpectat obicem, vim mortuam perpetuo exercere; ex parte altera E vi viva in contrarium rapi; eſſeque in eodem puncto C, ubi elaſtra duo ſe mutuo contingunt, & premunt, vim vivam, & vim mortuam; vim mortuam, quæ fit ab elaſtro CDE contra obi-

obicem XZ; & vim vivam, quæ ſit ab elaſtro ABC, quæque punctum C rapit verſus G.

Neque vero vis hæc mortua, quam facit elaſtrum CDE, vim vivam retardat, qua elaſtrum ABC urget punctum C; nam quamvis illa contra hanc nitatur, & premat perpetuo; tamen elaſtrum ABC illam ſimul, & elaſtrum CDE, a quo illa fit, ſecum rapit. Velut is, qui in navi ſedet, quamvis ipſam contra eius curſum manu premat, nihil tamen eam retardat; navis enim & preſſionem, & prementem ſecum rapit.

An punctum extremum ſeriei, quæ quidem conſtricta detineatur, æqualiter premat, quicumque elaſtrorum ſit numerus.

NEminem eſſe puto, qui neget, punctum extremum ſeriei, quæ quidem conſtricta detineatur, æqualiter premere, quicumque elaſtrorum ſit numerus. Sunt tamen, qui id ſibi explicari velint. Id ergo ſic explico.

Sit elaſtrum IKL (*Fig.* 1) ex parte I incumbens obici immobili XZ. Siqui, manu appoſita ad punctum L, ipſum conſtrictum teneat; ſentiet is quidem, ac ſuſtinebit vim illam, quam facit elaſtrum in puncto L contra manum; vim illam, quam facit in puncto I contra obicem, non ſentiet.

Igitur ad preſſionem, quam punctum L facit contra manum, nihil refert, utrum preſſio, quæ fit in I, obice quodam XZ detineatur (*Fig.* 1), an pugnet cum elaſtro altero DEI (*Fig.* 3) vi pari, ipſumque ſuſtineat. Quod ſi elaſtrum LKI ea preſſione, quam facit in I, quamque manus non ſentit, ſuſtinet elaſtrum IED; illud profecto ſequitur, ut huius elaſtri IED preſſio non poſſit ad punctum L, neque ad manum puncto L appoſitam, pervenire.

Qua re fit, ut ſi ſeries quæpiam DL conſtricta detineatur, quocumque elaſtrorum numero conſtet, punctum L æqualiter ſemper premat; elaſtra enim omnia, alia ab aliis, quemadmodum ſupra dixi, ſuſtinentur, ut illorum preſſio ad punctum L pervenire non poſſit.

In phyſicos quoſdam incidi, qui hoc theorema mirarentur; ego contra illos mirabar, qui in vulgatiſſimo experimen-

rimento id nondum animadvertiſſent. Namque in experimento Torricellii, cum aer inferior, qui hydrargyrum proxime tangit, dicatur utique ipſum premere elaſticitate ſua; quis tamen umquam dixit, ſi ad elaſticitatem inferioris aeris addatur gravitas aeris ſuperioris, preſſionem contra hydrargyrum augeri debere, & barometricam altitudinem maiorem fieri? Cur id, quæſo, nemini umquam in mentem venit?

Nempe quia inferior aer ſuperioris aeris gravitatem elaſticitate ſua ſuſtinet, neque ſinit, gravitatis huius preſſionem ad hydrargyrum pervenire. Et omnino errant, qui putant, hydrargyrum, in experimento Torricellii, ſuperioris aeris gravitatem ſentire; quemadmodum is etiam erret, qui pondus quodpiam manu tenens, elaſtro inter pondus, & manum interpoſito, putet ſe ſentire pondus; non enim pondus, ſed elaſticitatem ſentit elaſtri, cui, pondus tenens, reſiſtit; quamvis, cum elaſticitas hæc æqualis ſemper ſit ponderi, facit æqualitas, ut putet ille ſe pondus ſentire ipſum. Sed iam in viam redeamus.

An velocitas prima, quam ſtatim accipit punctum extremum ſeriei, dum hæc ſe aperit, proportionalis ſit ipſius ſeriei longitudini.

Sit ſeries elaſtrorum quotlibet AG (*Fig.* 2) incumbens ex parte A obici immobili XZ; cumque conſtricta ſit, ſubito relaxetur ex parte G. Dico, velocitatem, quam primum concipit punctum extremum G, eſſe proportionalem longitudini ſeriei, ſive, quod eodem redit, numero elaſtrorum.

Ut id clarius oſtendam, ſit ſeries altera IL (*Fig.* 1) elaſtri unius IKL; ut ſit longitudo ſeriei AG ad longitudinem ſeriei IL, uti numerus elaſtrorum, quibus illa componitur, ad unum. Incumbatque ſeries IL ex parte I obici immobili XZ; ſitque elaſtrum IKL æque conſtrictum, ut elaſtrum quodlibet ſeriei AG; tum ſubito relaxetur.

Unumquodque elaſtrum ſeriei AG eodem tempore æque dilatatur, atque elaſtrum IKL; quippe quia elaſtra, quibus ſeries AG componitur, cum maſſa omni careant, nihil

ſe

ſe ſe mutuo impediunt; idque ſatis in alio ſermone planum fecimus. Iam ergo propoſitum ſic probo.

In prima dilatatiuncula elaſtri IKL punctum L certo tempuſculo certum ſpatiolum conficit. Eodem tempuſculo unumquodque elaſtrum ſeriei AG dilatatiunculam abſolvit parem dilatatiunculæ elaſtri IKL; oportet ergo, ut punctum G eodem tempuſculo ſpatiola totidem conficiat, quot ſunt elaſtra, quibus ſeries AG componitur; ergo velocitatem concipit elaſtrorum numero, ſive, quod idem eſt, longitudini ſeriei proportionalem.

Difficultas quædam tollitur.

INveni quoſdam ad hanc demonſtrationem tardiores; eoſque in primis tenebat hæc ratio. Corpus quodque a quiete diſcedens velocitatem ſtatim concipit proportionalem preſſioni, quam habebat, dum quieſceret. Atqui cum ſeries AG, IL ad pares angulos conſtrictæ detinerentur, & quieſcerent, puncta G, & L preſſiones habebant æquales; ergo, ſi, relaxantibus ſe ſeriebus, puncta hæc a quiete diſcedant, velocitates ſtatim concipient æquales.

Id totum quale ſit, diligenter examinemus; non enim paucos ſum nactus, quos hæc ratio caperet. Camuſius vero, vir doctiſſimus, ſuam illam elaſtrorum theoriam, quam in pariſienſis academiæ actis edidit, ex ea, quam modo dixi, velocitatum æqualitate totam duxiſſe videtur.

Igitur quod primo loco aiunt, corpus quodque a quiete diſcedens velocitatem ſtatim concipere proportionalem preſſioni, quam ante habebat, dum quieſceret; id ſane aliquo modo diſtinguant, oportet. Si enim nullo modo diſtinguant, qua ratione, quæſo, illud explicabunt, quod hydroſtatici vulgo docent; aquam, ſi perforato vaſis latere ſubito exſiliat, ea ſtatim velocitate exſilire, quam haberet, ſi ex altitudine tanta decidiſſet, quanta eſt aquæ in vaſe? Qui enim poteſt velocitas hæc proportionalis eſſe preſſioni, quam aqua ante habebat, dum in vaſe quieſcebat? An non preſſio illa proportionalis eſt altitudini; velocitas vero radici altitudinis? Ut illud mittam, quod preſſio illa vis eſt mortua, e qua velocitas aſſignabilis oriri ſtatim poſſe non videtur.

Verum

Verum ut ad rem ipſam propius accedamus; concedo ego quidem, velocitatem, quam corpus a quiete diſcedens primum accipit, proportionalem eſſe ei preſſioni, quam habebat, antequam a quiete diſcederet; ſed ita concedo, ſi, dum a quiete diſcedit, nulla cauſa ſuperveniat, quæ preſſionem eius augeat, aut minuat; ſin minus, non concedo. At, inquies, quid ergo ſupervenit in ſerie AG, dum hæc ſe aperit, & punctum G a quiete diſcedit, quod ipſius puncti G preſſionem ſubito augeat, aut omnino mutet?

Nempe ſupervenit preſſio elaſtrorum omnium inſequentium. Etenim, relaxante ſe ſe elaſtro EFG, preſſio eius in E minuitur, neque amplius ſuſtinere poteſt elaſtrum CDE; hoc ergo, ſtatim ſe promovens, elaſtrum quoque EFG promovet, & ſimul cum eo punctum G ulterius urget. Eodemque modo, quoniam elaſtrum ABC non amplius ſuſtinetur ab elaſtro CDE, ſe ſe ipſum quoque antrorſum promovet, & ulterius urget elaſtra ambo CDE, EFG, & ſimul cum his punctum G. Apparet ergo, puncto G, dum a quiete diſcedit, ſupervenire preſſionem elaſtrorum omnium inſequentium, quæ non amplius ſuſtinentur alia ab aliis, quemadmodum ſuſtinebantur, dum ſeries adhuc conſtricta quieſcebat.

Quapropter minime mirandum eſt, velocitatem, quam primam punctum G accipit, nequaquam proportionalem eſſe ei preſſioni, quam ante habebat.

Obiectum aliud diluitur.

Cum hæc perambulans cum amicis quibuſdam diſputarem, & omnes iam fere perſuaſiſſem, adoleſcentulus quidam nobilis, qui una nobiſcum erat: me nondum, inquit, perſuades; & argumentum hoc protulit. Non poteſt corpus, quod antecedit, premi ab eo, quod inſequitur, ſi quod antecedit, ſit velocius, quam quod inſequitur. Id ſcilicet omnes docent; & eſt tamen uſque adeo perſpicuum, ut nihil ſit opus doceri. Quid ergo? Relaxante ſe ſerie AG, an non punctum G velocius eſt, quam aliud quodvis ſeriei punctum, ſive E, ſive C? An non velocius eſt, quam alia elaſtra omnia, quæ ipſum inſecuntur? Qui igitur poteſt ab his premi?

Hanc ego ingenioſi adoleſcentuli dubitationem ſic ſuſtuli. Non poteſt utique corpus inſequens premere corpus aliud, quod maiori velocitate antecedat; ſi procedentia hoc modo corpora diſiungantur inter ſe ſe, communicationemque omnem amittant. Quid vero, ſi communicationem inter ſe, connexionemque ſemper retineant aliquam?

Fac, verbi gratia, corpora duo P, & R per vim quamdam repulſivam, & mutuam inter ſe ſe communicare; atque interim dum R velociſſime ſe ſe removet a P, manum quampiam vim facere in P, ipſumque corpus P urgere verſus R velocitate vel minima. Oportebit profecto, corpus R, accedente ad ipſum corpore P, tanto velocius ferri. Premetur ergo corpus R a corpore P, & a manu; etiamſi corpus R antecedat, & velocius ſit; corpus vero P, & manus tardius inſequantur.

Id ipſum apparet in punctis G, & E; quacumque enim velocitate feratur G, ſemper tamen connexionem quamdam habet cum E propter continuitatem elaſtri GFE, cuius elaſtri elaſticitate fit, ut per totum relaxationis tempus inter puncta G, & E vis repulſiva quædam exſiſtat. Quare quantulacumque velocitate promoveatur punctum E ab inſequente elaſtro CDE, tanto velocius punctum ipſum G ferri debet. Sentit ergo punctum G preſſionem, quam elaſtrum inſequens CDE facit in E, etiamſi feratur velocius, quam ipſum elaſtrum CDE; immo ob id ipſum velocius fertur, quia preſſionem illam ſentit.

An ſumma omnium velocitatum, quas per totum relaxationis tempus deinceps accipit punctum extremum ſeriei, longitudini ipſius ſeriei proportionalis ſit.

CUm ſupra docuerim, velocitates, quas primum accipiunt puncta G, & L, dum ſeries ſe ſe aperiunt, ſerierum ipſarum longitudinibus proportionales eſſe, facile erit idem transferre ad velocitates quoque alias, quas per totum relaxationis tempus puncta eadem deinceps accipiunt.

Etenim dum puncta G, & L prima illa velocitate feruntur, elaſtra ſingula utriuſque ſeriei dilatatiunculam ſuam

pri-

primam abſolvunt, qua abſoluta in eodem conſtrictionis ſtatu ſunt omnia. Nihilque eſt, cur velocitas altera, quam nova elaſtrorum preſſio affert punctis G, & L, non eamdem proportionem ſequatur, quam prima. Idemque de tertia dici poteſt, de quarta, & de aliis. Erit ergo & prima velocitas, & alia quævis longitudini ſeriei proportionalis; ergo etiam ſumma omnium.

Hinc porro ſequitur, ut velocitas ultima, quam habet punctum G eo puncto temporis, quo ſeries ad naturalem dilatationem pervenit, ſit ipſa quoque longitudini ſeriei proportionalis. Quid eſt enim velocitas illa ultima, niſi ſumma velocitatum omnium, quas punctum G per totum relaxationis tempus deinceps acquiſivit?

An velocitates ultimæ punctorum G, *&* L *inæquales inter ſe eſſe poſſint, ſi primæ quidem æquales ſint.*

HActenus demonſtravi, velocitates vel primas, vel ultimas punctorum G, & L longitudinibus ſerierum proportionales eſſe. Quoſdam autem inveni, nec ita paucos, qui primas velocitates punctorum G, & L æquales ſemper inter ſe eſſe vellent; iidemque contendebant, velocitates ultimas, in ſeriebus quidem inæqualibus, debere eſſe inæquales. Quorum opinionem etſi ſatis reiecimus, primarum velocitatum æqualitate ſublata; idque ad noſtram elaſtrorum theoriam firmandam ſatis eſt; nihil tamen impedit, quo minus ultro progrediamur, illudque etiam oſtendamus, velocitates ultimas punctorum G, & L inæquales eſſe non poſſe, ſi primæ quidem ſint æquales.

Id, quod ſatis conſtabit, ſi modo explicemus, qualiter, poſita illa, quam in præſens ponimus, primarum velocitatum æqualitate, elaſtrorum dilatatiunculæ aliæ ex aliis fieri debeant, & quo ordine preſſiones, velocitateſque novæ punctis G, & L advenire.

Illud ergo in primis tenendum eſt, preſſiones, quibus elaſtra velocitatem ſuam continenter augent, advenire alias, atque alias, non ex æqualibus tempuſculis, ſed ex æqualibus dilatatiunculis; quod & ſuppoſitionibus, quas adhuc ſecuti ſumus, & rei ipſius naturæ maxime conſentaneum

eſt. Elaſticitas quippe non ipſa per ſe ſe preſſiones validiores, aut debiliores facit; ſed elaſtri conſtrictione maiori, minorive ad id determinatur; itaque preſſiones ſingulæ, quibus velocitas paullatim augetur, ſingulis dilatatiunculis reſpondent, neque æqualibus tempuſculorum intervallis fieri poſtulant, niſi ſi ipſa dilatatiuncularum ratio id requirat.

His viſis propoſitam rem explico. Dum ſeries IL aperitur, punctum L ex ea preſſione, quam tunc habet, velocitatem quamdam concipit, qua certum ſpatiolum percurrit certo tempuſculo. Interim prima dilatatiuncula elaſtri IKL abſolvitur. Hac abſoluta tunc demum preſſio nova advenit, & augetur velocitas puncti L.

Quod ſi, ſerie AG ſe ſe aperiente, punctum G velocitatem ſtatim concipit æqualem velocitati puncti L, ſane ſequitur, ut æquali tempuſculo ſpatiolum æquale conficiat. Quo tamen confecto, dilatatiunculæ primæ ſingulorum elaſtrorum B, D, F nondum erunt abſolutæ; nam adhuc ſingula conſtrictiora erunt, quam elaſtrum IKL. Quare nova preſſio nondum iis adveniet, ſed oportebit, punctum G eadem velocitate ulterius progredi, donec dilatatiuncula prima in ſingulis elaſtris abſolvatur. Hac abſoluta tunc demum preſſio adveniet nova, & velocitatem puncti G augebit.

Sic in prima elaſtrorum dilatatiuncula velocitates punctorum G, & L æquales erunt, quamvis velocitas puncti G diutius perſeverabit, quam velocitas puncti L; nam punctum G feretur per ſpatiolum longius.

Iam vero, dilatatiuncula prima abſoluta, cum elaſtra omnia in eodem ſint conſtrictionis ſtatu, nihil ſane eſt, cur dilatatiuncula ſecunda non eodem plane modo inſtituatur, quo inſtituta fuit prima. Idemque ad alias, quotquot conſecuntur, dilatatiunculas transferri poterit.

Igitur ſi velocitates punctorum G, & L in prima dilatatiuncula æquales ſint, æquales quoque erunt in dilatatiuncula alia quavis; ac ſi omnes duorum punctorum velocitates dilatatiunculis omnibus reſpondentes in duas ſummas conferantur, æquales quoque erunt hæ ſummæ; ſunt autem hæ ſummæ æquales velocitatibus ultimis punctorum G, & L; ergo etiam velocitates hæ ultimæ æquales inter ſe erunt.

Hoc

Hoc loco diligenter animadverti velim id, quod quaſi obiter monui: tempuſcula, in quibus ſingulæ elaſtrorum dilatatiunculæ fiunt in ſerie AG, minime æqualia eſſe tempuſculis, in quibus ſingulæ dilatatiunculæ fiunt in ſerie IL: quod ſic dico; ſi primæ quidem velocitates punctorum G, & L, ut in præſentia putamus, æquales ſint. Id infra iuvabit animadvertiſſe.

Argumentum contrariorum proponitur.

NOn eſt autem argumentum contrariorum prætermittendum. Omnis enim oratio manca ſit, niſi &, quod propoſuit, demonſtret, &, quæ contra afferuntur, diluat: quod utinam recentiores philoſophi diligentius facerent. Scholaſtici illi veteres, quos iam contemnimus, ſtudium ad id maius adhibuerunt; quod fortaſſe a græcis, romaniſque propius aberant, a quibus omnis bene dicendi ratio orta eſt. Qui ergo velocitates ultimas punctorum G, & L inæquales eſſe contendunt, etiamſi primæ æquales ſint, hanc fere rationem adhibent.

Sint (quando id nunc datur) velocitates primæ punctorum G, & L æquales; quod ſcilicet a preſſionibus oriantur æqualibus. Iam punctum G, quod longius ſpatium conficere debet (quippe quod ſeriem AG longiorem ponimus, quam ſeriem IL) longius quoque tempus in ſuo curſu inſumet. Punctum L, cui brevius ſpatium conficiendum eſt, breviori tempore contentum erit. Preſſio igitur, quæ utrique puncto æqualiter inſtat, inſtabit longiori tempore puncto G, quam puncto L; igitur velocitatem pariet maiorem in G, quam in L; eſt enim illud quaſi iam tritum, velocitatem proportionalem eſſe preſſioni in tempus ductæ.

Quod argumentum quoniam in eo nititur, quod vulgo aiunt, velocitatem cuiuſque corporis proportionalem eſſe preſſioni in tempus ductæ, id ipſum, niſi moleſtum eſt, diligentius explicemus.

Expli-

Explicatur illud, quod aiunt, velocitatem proportionalem eſſe preſſioni ductæ in tempus.

NOn eſt dubium, quin, ſi preſſio eadem in eodem corpore per alia tempuſcula, atque alia iteretur, velocitas inde fiat tanto maior, quanto ſæpius preſſio iterata eſt; ideoque ſit velocitas proportionalis preſſioni in tempuſculorum numerum ductæ.

Quod ſi tempuſcula ponantur ſemper æqualia, erit etiam velocitas, quam corpus finito quovis tempore acquiſitam habebit, proportionalis preſſioni in totum hoc tempus ductæ. Nam ſi tempuſcula ponantur ſemper æqualia, erit ſemper numerus tempuſculorum ad numerum tempuſculorum, uti totum tempus ad totum tempus.

Id apparet in motibus a gravitate ortis. Nam cum gravitas agat ipſa per ſe ſe, neque rem aliam exſpectet, a qua determinetur; idcirco preſſionem eamdem iterat in corpore, æquali quoque tempuſculo. Velocitas ergo, quam corpus finito quovis tempore a gravitate acquirit, cum ſit proportionalis preſſioni in tempuſculorum numerum ductæ, ſint autem tempuſcula hæc æqualia; eſt etiam proportionalis preſſioni ductæ in totum tempus; ideoque etiam proportionalis toti tempori, cum preſſio ſit ſemper eadem.

Verum ſi tempuſcula non ubique ponantur æqualia, fieri poterit, ut velocitas, quam corpus finito quovis tempore acquirit, cum ſit proportionalis preſſioni in tempuſculorum numerum ductæ; non ſit tamen proportionalis preſſioni ductæ in totum tempus. Rem hanc exemplo illuſtremus.

Sit totum aliquod tempus quadruplum alterius temporis totius; illudque reſolvatur in tempuſcula, quæ ſingula ſint ipſa quoque quadrupla ſingulorum tempuſculorum, in quæ reſolvitur hoc. Erit ſane æqualis tempuſculorum numerus in utroque tempore, quamvis tempora ipſa tota non ſint æqualia.

Iam ergo in utroque tempore preſſio eadem per ſingula tempuſcula iteretur. Toties ſane iterabitur in uno tempore, quoties in altero; ideoque velocitates faciet in utro-

que

que tempore æquales; & hoc tantum intererit; quod velocitas, quam unaquæque preſſio in quadruplo tempore gignet, quadruplo tempuſculo perſeverabit; quam vero gignet in tempore ſubquadruplo, tempuſculo perſeverabit ſubquadruplo. Quod ſi velocitates in utroque tempore acquiſitæ omnino æquales ſunt, iam ſatis patet, eas utique proportionales eſſe preſsioni in tempuſculorum numeros ductæ, non vero preſsioni ductæ in tota tempora.

Atque hæc quidem valent in motibus acceleratis, in quibus preſsio perſeverat, ideſt per infinita tempuſcula iteratur. Ceterum in motu æquabili quis eſt, qui velit preſsionem in tempus ducere? Nam ſi preſsionem in tempus ducas, quo corpus moveri pergit; cum id tempus perpetuo augeatur, augebitur quoque preſsio, & velocitas; quod intelligi in motu æquabili non poteſt; non enim ſit æquabilis, ſi velocitas perpetuo augeatur.

Præterea quis ignorat, preſsionem in motu æquabili nequaquam perſeverare, ſed ſimul ac certam velocitatem corpori indidit, evaneſcere, nec amplius iterari? ut propterea nullo modo in tempus ducenda ſit. At, inquies, cur ergo pergit moveri corpus, cum preſsio evanuerit, nec amplius iteretur? Reſpondeo: moveri pergit propter inertiam ſuam; nam primum velocitatem accipit a preſsione; eamdemque poſtea retinet, cum preſsio evanuerit, propter inertiam. Quod ergo aiunt velocitatem proportionalem eſſe preſsioni in tempus ductæ; id totum a motu æquabili reiiciamus.

Argumentum contrariorum diſſolvitur.

HIs expoſitis facile contrariorum ratio diſſolvetur, quæ huc redit. Preſsio illa, qua primum aguntur puncta duo G, & L, æqualis eſt in utroque; idcirco velocitatem ſtatim æqualem in utroque creat. Tamen quia punctum G longiori tempore moveri pergit; preſsione in tempus ducta, velocitas eius fit maior; quippe velocitas proportionalis eſt producto preſsionis, & temporis.

Quod argumentum qui proferunt, videant, quæſo, velocitatem cum dicunt, quam intelligant; nam ſi eam velocitatem intelligunt, quam habent punctum G, ſive punctum

ctum L in unaquaque dilatatiuncula ſeorſim ſumta, fruſtra hanc aſſerunt, proportionalem eſſe ei producto, quod fit preſsione in tempus ducta. Etenim, quamvis motus, quo punctum G, ſive L in tota ſeriei dilatatione fertur, acceleratus utique ſit; motus tamen, quo fertur in unaquaque dilatatiuncula, habetur pro æquabili; in motu autem æquabili, velocitas, quod ſupra monui, male æſtimetur, ſi æſtimetur preſsione in tempus ducta.

Sin autem velocitatem cum dicunt, eam intelligunt, quam habet vel punctum G, vel punctum L in tota ſeriei dilatatione, vel quam ex tota ſeriei dilatatione acquirit; ideoque preſsionem in totum dilatationis tempus duci volunt, videant hic quoque, ne fallantur. Nam preſsio iteratur in ſingulis elaſtrorum dilatatiunculis, ideſt in tempuſculis ſingulis dilatatiuncularum ſingularum; quare in tempuſculorum numerum utique duci poteſt ad velocitatem æſtimandam; ac ſi tempuſcula hæc omnia æqualia eſſent, recte etiam duceretur in tota dilatationum tempora; ſed quoniam tempuſcula, in quibus fiunt elaſtrorum dilatatiunculæ ſingulæ in ſerie AG, minime æqualia ſunt tempuſculis, quibus fiunt dilatatiunculæ ſingulæ in ſerie IL; quod ſupra animadvertimus; idcirco quamvis preſsio in tempuſculorum numeros duci poſsit ad velocitatem æſtimandam; in tota dilatationum tempora, quemadmodum paullo ante monui, non poteſt.

Quam quidem rationem ſi ſequimur; quoniam dilatatiuncularum, ideoque etiam tempuſculorum numerus in utraque ſerie æqualis eſt; preſsio autem, (ut contrarii volunt) quæ in unaquaque elaſtrorum dilatatiuncula fit, ipſa quoque in utraque ſerie æqualis eſt; oportet ſane productum in utraque ſerie æquale fieri, ſi preſsio in tempuſculorum numerum ducatur; ideoque etiam velocitates, ſi his quidem productis proportionales ſint, in utraque ſerie gigni æquales.

Adhuc oſtendimus, velocitates ultimas punctorum G, & L inæquales eſſe non poſſe, ſi primæ quidem ponantur æquales. In quo tamen ſi quid forte erravi, minus moleſte feram; quippe quod, ut ante monui, theoriam elaſtrorum noſtram ſatis firmavimus, primarum velocitatum æqualitate ſublata. Hanc enim æqualitatem cum ſuſtulerimus; quid-

quidquid ea poſita ſequi debet, contemnere nos quidem poſſumus commodiſsime.

De elaſtris, eodem numero, ſed per varios ordines in ſeriem diſpoſitis.

FAcit patientia veſtra, Sodales ornatiſsimi, & ſingularis, qua me adhuc audiſtis, humanitas, ut peccare aliquid mihi videar, niſi illa, quoad poſſum, utar; ſermonemque ita, ut eſt apud Carolum Graſsium cum litteratiſsimis viris a me habitus, vobis exponam. Nam & multi ex academia in eam diſputationem fuerunt impliciti, &, quod caput eſt, quæſtiones de elaſtris continet non contemnendas.

Veneram ego ad Graſſium quodam die, cum litteratos permultos homines exſpectaret, qui ad ipſum octavo quoque die, ut ſcitis, convenire ſolent, & venuſtioribus ſtudiis otium fallere. Cumque ille, dum alii advenirent, ſimul cum Ioſepho Putio, & Thoma Laghio ad ignem ſederet, ut me vidit, in tempore, inquit, advenis; narrabat enim mihi Putius, quæ tu paucis ante diebus in academia diſſeruiſti. Quæ iſtæ ſunt, quæſo, quas de elaſtris turbas excitas? Ego vero, inquam, turbas nullas excito; ſed hi plurimas, & graves excitant, qui contra me dicunt. Non illi, inquit Graſſius, contra te dicerent, niſi tu contra illos. Sed iocos mittamus. Ac cum me ſedere iuſſiſſet, aveo, inquit, ſcire, quo modo illa explices, quæ ſunt olim a ſummo viro, Ioanne Bernullio, in lipſienſibus actis tradita, de elaſtris eodem numero, ſed per varios ordines in ſeriem diſpoſitis; quæ ut melius in memoriam revoces, figuras tibi ſtatim delineabo.

Hic chartam ſumens ſchemata tria fecit: primum elaſtra quatuor B, C, D, E finxit (*Fig.* 4) in unam ſeriem OP diſpoſita, quam ſeriem, inquit, incumbere volo obici immobili XZ ex parte O, ex parte vero P urgere corpus A. Tum elaſtra eadem B, C, D, E in binos ordines diſtribuens (*Fig.* 5) ſeriem alteram RS fecit, quam pariter voluit ex parte R incumbere obici immobili XZ, ex parte S urgere corpus A. Tum demum elaſtra eadem B, C, D, E (*Fig* 6) in quatuor ordines diſtribuit, ac ſeriem tertiam

fecit TV, ipſam quoque incumbentem ex parte T obici immobili XZ, ex parte vero V urgentem corpus A. Ac ſit tibi, inquit, corpus A ubique eiuſdem maſſæ. Contendit in primis Bernullius, niſi fallor, corpus A ab unaquaque harum ſerierum OP, RS, TV eamdem accipere velocitatem. Tu quo modo id explicas?

De velocitate, quam accipit corpus A *ab unaquaque trium ſerierum* OP, RS, TV.

FAcillime, inquam, & multis modis. Et primum quidem fac, ſeriem RS uno tantum ordine elaſtrorum B, C conſtare; & ſeriem TV uno tantum elaſtro B. Hoc poſito, cum mihi quidem velocitas ſit ipſa ſeries diviſa per corpus A; qua de re ſatis in academia diſputavi; erit ſane velocitas, quam accipiet corpus A a ſerie OP, $= \frac{4}{A}$; velocitas, quam accipiet a ſerie RS, $= \frac{2}{A}$; & velocitas, quam accipiet a ſerie TV, $= \frac{1}{A}$, ideſt erunt velocitates, uti 4, 2, 1. Si ergo in ſerie RS elaſtrorum ordo duplicetur, velocitas, quæ erat 2, duplicabitur, & fiet 4. Similiterque in ſerie TV, ſi elaſtrum quadruplicetur, velocitas, quæ erat 1, quadruplicabitur, & fiet 4 ipſa quoque. Erit ergo velocitas ubique eadem, nempe 4.

Idem aliter declaro. Quoniam in ſerie RS duo elaſtrorum ordines, iique inter ſe pares, BC, DE idem corpus A ſimul deferunt, perinde eſt, ut ſi unus ordo BC dimidium A deferat, alter ordo DE dimidium alterum; quare utriuſque ordinis velocitas erit 2 diviſum per $\frac{A}{2}$, ideſt $\frac{4}{A}$. Eodemque modo oſtendetur, in ſerie TV velocitas eſſe 1 diviſum per $\frac{A}{4}$, ideſt $\frac{4}{A}$. Quo apparet, velocitatem a ſeriebus hiſce omnibus æqualem fieri.

Et eſt id ſane conſentaneum, cum idem corpus A, in unaquaque ſerie, OP, RS, TV, æquali elaſtrorum numero prematur.

Tamen

Tamen Bernullius, inquit Laghius, rem non ſic explicat; & preſſiones, quantum memini, permiſcet varias & tempora. Ita prorſus, reſpondi; tamen eamdem eſſe, in unaquaque harum ſerierum, corporis A velocitatem, non ex hac preſſionum, aut temporum varietate colligit, ſed aliud argumentum affert. Quodnam? inquit Putius. Hoc, inquam, ſi recte ſum aſſecutus. Unaquæque harum ſerierum eamdem vim vivam tribuit corpori A, ergo eamdem quoque velocitatem; non poteſt enim vis viva in eadem maſſa eſſe eadem, niſi eadem quoque ſit velocitas.

At, inquit Putius, quo modo probat, unamquamque harum ſerierum eamdem vim vivam tribuere corpori A? Nam ſi dicat, id ex eo fieri, quia vis viva proportionalis ſemper eſſe debeat numero elaſtrorum, a quibus gignitur; id ipſum, quæram, quo modo probet. Cur enim non idem de quantitate motus dici poſſit, ut ipſa quoque elaſtrorum, a quibus gignitur, numero proportionalis eſſe debeat?

Quid? inquit Graſſius; an non liceat id dicere? Per Bernullium utique, inquit Putius, non liceat. Nam ſi idem elaſtrorum numerus eamdem motus quantitatem in quovis corpore gignat, non eamdem profecto gignet in quovis corpore vim vivam, ſi vis quidem viva, ut nunc volumus, & Bernullius contendit, velocitatis quadrato æſtimetur. Cum ergo ambæ ſimul, vis viva, & motus quantitas, proportionales eſſe elaſtrorum numero non poſſint, cur eſſe potius vis viva dicatur, quam motus quantitas?

Hic, ego inquam, non ſatis, mi Puti, intelligis, quid interſit inter ſubſtantiale, & accidentale; nam quantitas motus, & velocitas accidentalia ſunt, ideoque, eodem etiam manente elaſtrorum numero, variare fortaſſe poſſunt. Vis viva ſubſtantialis eſt, ideoque, ſi elaſtrorum numerus idem maneat, ut alia varientur omnia, variari ipſa non poteſt.

Non exſpectabam, inquit Grasſius, ut nos huc deduceres; ſubſtantialitas enim illa, de qua te audio in academia paullo liberius diſputaviſſe, me fugerat. Sed quando Bernullii ratio huc redit, fateor ſane, me illam non ſatis asſequi, ut etiam tibi ignoſcam, qui in iſta ſubſtantialitate non acquieſcas. Sed quorſum, quæſo, preſsiones illas varias, quas modo Laghius commemorabat, & varia tempora

vir ille ſummus permiſcet? Non enim ſine cauſa hæc etiam conſiderat.

Nempe, inquam, ut illam ipſam ſubſtantialitatem melius tueatur; nam ſi temporibus, preſsionibuſque variatis vis tamen viva maneat eadem, videtur iam ille ſibi ſubſtantialitatem quamdam in vi viva cognoſcere. Mihi, inquit Graſsius, (credo & his duobus) nihil ſit ſatis ad hanc cognoſcendam. Sed dic, obſecro, quo modo preſsiones illas varias diſtribuat, & tempora; nam aveo ex te audire; & Ghedinus noſter, & Tiolius, qui nunc adveniunt, in his etiam rebus, ut tu ſcis, delectantur. Ego vero, inquam, & tibi obſequi, & his placere, ſi poſsim, cupio. Sed Ghedinus, credo, Bonamicum de rebus ad Velitras geſtis legi mavult; ſcio enim, vos ad hunc legendum hoc veſpere convenire: præclarum commentarium; quem ego quoque audire malim, quam de elaſtris dicere. Hic Ghedinus, non committam, inquit, ut neapolitanorum, hiſpanorumque gloriam quamquam ſummopere admiror, ſermonibus tamen veſtris anteponam. Ac cum ipſe, & Tiolius conſediſſent; eoſque, qua de re ſermo inter nos eſſet, quove deducti eſſemus, Laghius docuiſſet, ſic ipſe ſum exorſus.

Quas preſſiones exerceant propoſitæ ſeries OP, RS, TV; *quibuſque temporibus dilatentur.*

Bernullius, ut mihi quidem videtur, preſsiones diſtribuit ad hunc modum. Quoniam in ſerie OP corpus A ab uno tantum elaſtro tangitur, vult ille in hac ſerie preſsionem eſſe = 1. Quia vero in ſerie RS tangitur ab elaſtris duobus, preſsionem in hac ſerie vult eſſe = 2. Quia demum in ſerie TV tangitur ab elaſtris quatuor, vult preſsionem hic eſſe = 4.

Hic Putius inquit: miror id ſane. Quo modo enim ſeries hæ omnes æqualem vim vivam in corpus A transferant, cum premant non æqualiter? An non per preſsiones vis viva transfertur? Tunc ego, idem, inquam, mirari poteras de velocitate. Quis enim intelligat, ex preſsionibus inæqualibus eamdem in eodem corpore velocitatem fieri?

At ego quidem incommodum hoc fugio. Quare? inquit Putius. Quippe quod ego, inquam, cum velocitates

æquales

æquales ponam, preſsiones quoque pono æquales. Id explica: inquit Ghedinus. Quia, inquam, corpus A (quæ mea ſententia eſt) non uno elaſtro tantum in ſerie OP premitur, etiamſi ab uno tantum tangatur; neque in ſerie RS premitur duobus tantum, etiamſi tangatur tantum a duobus. Non enim corpus A premunt ea tantum elaſtra, quæ ipſum tangunt; ſed etiam illa, quæ inſecuntur, & urgent, & premunt illa, quæ tangunt. Quod ſi ſequimur, dicendum profecto eſt, preſsionem in unaquaque harum ſerierum elaſtris quatuor fieri; ut propterea nihil mirandum ſit, & æqualem eam eſſe, & velocitatem æqualem parere in omnibus. Prorſus aſſentior, Ghedinus inquit; ſed dic iam de temporibus.

Tempora, inquam, Bernullius ſic diſtribuit, ut preſſionum rationem quaſi invertat. Vult quippe dilatationis totius tempus in ſerie OP eſſe $=4$; in ſerie RS eſſe $=2$ in ſerie TV eſſe $=1$. Quæ ego tempora non muto. Et ſane ſi concedimus, velocitates, quas corpus A a tribus hiſce ſeriebus accipit, æquales eſſe; illud etiam concedamus, oportet, ſpatia eſſe, uti tempora; quare cum ſpatia OP, RS, TV ſint, uti numeri 4, 2, 1, neceſſe eſt etiam tempora horum numerorum proportionem ſequi.

An temporis conſideratio a menſura vis vivæ excludatur.

HIc Putius, quamvis, inquit, de preſsionibus cum Bernullio non conſentias; tamen ſi illud das, dilatationum tempora in his ſeriebus inæqualia eſſe; videtur ille profecto id aſſequi, ut in vi viva metienda temporis ratio habenda non ſit. Hic enim corpus A eamdem ubique velocitatem, eamdemque propterea vim vivam acquirit, quamvis tempora, quibus hanc acquirit, ſint varia. An putas, Bernullium huc ſpectaſſe? Eſt enim carteſianis mirum in modum infenſus, qui, ut ſuam illam de vi viva metienda opinionem tueantur, numquam ad tempus non confugiunt.

Quod, inquam, faciunt, o Puti, plus quam vellem. Bernullius autem huc etiam ſpectaſſe videtur; quamquam non hoc illi erat primo loco propoſitum. An autem ſit

aſſecu-

aſſecutus, quod voluit, ut tempus iam in vi viva metienda contemni debeat, valde dubito. Etenim ſi Bernullii rationem ſequimur, illud tempus contemni debet, quo ſeries dilatantur, & corpus A vim vivam acquirit; atqui huius temporis ne carteſiani quidem rationem habent; quippe qui non id tempus conſiderari volunt, quo vis viva acquiritur, ſed id, quo vis viva, poſtquam acquiſita eſt, in effectu edendo amittitur. Itaque ſi quod corpus vi quadam viva ſurſum excurrat, non illi quidem quærunt, quanto tempore hanc vim acquiſiverit, ſed quantum ſit illud tempus, quo ſurſum excurrendo, vim acquiſitam amittit. Ac ſi corpus vi quapiam viva in materiam mollem ſe immittat, & foveam faciat; quærunt carteſiani quidem, quo tempore foveam faciat, & in ea facienda vim omnem amittat; quo autem tempore vim illam ſibi comparaverit, non quærunt.

Quod ergo tempus Bernullius contemni vult, id & carteſiani contemnunt; quod autem carteſiani conſiderant, de eo Bernullius verbum non facit. Quamquam, ut ſupra dixi, non hoc erat illi primo loco propoſitum; illud potius ſibi propoſuerat, ut oſtenderet exemplo aliquo vim vivam corporis A proportionalem eſſe numero elaſtrorum.

An exemplo trium ſerierum OP, RS, TV *ſatis probetur vim vivam proportionalem eſſe numero elaſtrorum.*

IDque præclare aſſequitur, inquit Gotardus Bonzius, qui in tempore adveniens poſtrema verba audiverat; itaque ſtans adhuc: an non vobis, inquit, de Bernullio ſermo eſt? Is ergo plane oſtendit, in tribus illis ſeriebus, quarum ſchemata vobis video eſſe in manibus, vim vivam proportionalem eſſe numero elaſtrorum. An non idem eſt elaſtrorum numerus in ſeriebus hiſce omnibus? An non eamdem vim vivam unaquæque ſeries parit in corpore A? Eſt ergo utique vis viva elaſtrorum numero proportionalis.

Cum hæc Bonzius dicens conſediſſet; ego vero, reſpondi, nullus dubito, quin proportio iſta conſtet in tribus illis ſeriebus, quas Bernullius ſuo modo ſibi compoſuit. Vereor aliquantulum, ne proportio eadem non maneat in ſerie-

ſeriebus aliis. Hæc dicens, chartam ſumſi, & ſeriem MN (*Fig.* 7) inſcripſi, elaſtris ſex compoſitam B, C, D, E, F, G in tres ordines diſtributis, ut ſinguli ordines elaſtris binis componerentur. Et facite, inquam, ſeriem hanc ex parte M obici immobili XZ incumbere, ex parte N urgere corpus A, idque æquale eſſe ei corpori A, quod urgetur a ſerie OP.

Quid hic vos? Putatiſne, vim vivam, quam corpus A accipit a ſerie OP, eſſe ad vim vivam, quam accipit a ſerie MN, uti 4 ad *6*? Ego quidem, inquit Graſſius, non negem; ſed id tamen probari velim. Videatur enim revolvi eodem, & quaſi principium petere, ſiqui dicat, vim illam eſſe ad hanc, uti 4 ad *6*, propterea quod vires vivæ proportionales eſſe debeant numeris elaſtrorum; nam quæſtio eſt de hoc ipſo.

Oporteret, inquit Bonzius, velocitates primum metiri, quas habet corpus A a ſeriebus OP, & MN; nam his cognitis ſtatim vires vivæ cognoſcerentur; ac tum demum appareret, an numeris elaſtrorum proportionales ſint.

Ratio, inquam, optima: modo velocitates, quas metiri volumus, non ex illa ipſa virium vivarum proportione, quæ in quæſtione eſt, ducamus. Velut heri bernullianus quidam, mecum in hanc quæſtionem ingreſſus, faciebat. Argumentabatur enim ſic: vis viva eſt ad vim vivam, uti 4 ad *6*. Ergo velocitatis quadratum erit ad velocitatis quadratum, uti 4 ad *6*. Ergo velocitas ad velocitatem, uti $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{6}$. Velocitates profecto, ſi iſto modo inveniantur, eæ invenientur, ut vires vivæ exſiſtant elaſtrorum numero proportionales; ſunt enim ductæ ex hoc ipſo.

An non tu aliam, inquit Putius, velocitatum inveniendarum methodum in academia propoſuiſti? Propoſui ego quidem, inquam, ſed illam bernulliani iſti repudiabunt. Quid enim non repudient, ut illud teneant, vim vivam ſemper proportionalem eſſe elaſtrorum numero? Tamen, inquit Graſſius, methodum iſtam tuam periclitemur. Quando id vultis, inquam, ſtatim facio. Putemus in præſens, ſeriem triplicatam MN ad ſimplicem redigi, quæ uno tantum elaſtrorum ordine BC conſtet. Velocitas profecto, quam accipit corpus A a ſerie OP, ex his, quæ ego in academia docui, erit $= 4$. Quam vero accipiet a ſerie illa

ſimpli-

ſimplici, quam modo dixi, quæque binis elaſtris conſtat, erit $= 2$. Cum ergo ſeries MN triplicata ſit, ideoque velocitatem triplam afferat, accipiet corpus a ſerie MN velocitatem non amplius $= 2$, ſed $= 6$. Velocitas ergo, quam accipit corpus A a ſerie OP, eſt ad velocitatem, quam accipit a ſerie MN, uti 4 ad 6. Erunt ergo vires vivæ, uti 16, & 36; non ergo uti elaſtrorum numeri.

Pulchre tibi procedunt omnia, inquit Tiolius; ſiquidem velocitates tuo modo inveniſti. Sed quid ei tandem male vertat, qui, Bernullium ſequens, velocitatem, quam corpus A accipit a ſerie OP, faciat eſſe, ut bernullianus ille tuus faciebat, $\sqrt{4}$; quam vero accipit a ſerie MN, faciat eſſe $\sqrt{6}$? Equidem video, hanc velocitatum menſuram ex eo duci, quod vis viva proportionalis elaſtrorum numero ponatur; idque ipſum duci ex eo, quod ſubſtantialis ſit; qua quidem re confiteor, nihil eſſe obſcurius. Tamen ſiquis obſcuritatem rerum minus, quam tu, oderit, eaque Bernullii ratione implicari ſe ſinat, quid ei tandem accidet minus commode?

Video, inquam, quid agas. Vis nempe, ut bernullianos ad abſurdum deducam, vel certe ad id incommodum, quo perterriti opinionem deponant. Difficile id quidem eſt; nam modo obtineant, vim vivam, quam velocitatis quadrato metiuntur, proportionalem eſſe elaſtrorum numero, omnia ferre poſſunt. Ego certe non feram, ſi qui dicat, velocitatem, quam terni elaſtrorum binorum ordines BC, DE, FG in ſerie MN corpori A tribuunt, non eſſe triplam eius velocitatis, quam eidem corpori tribueret unus tantum horum ordinum. Cur enim non ſit tripla, cum ſinguli ordines in idem corpus A æque agant? Et tamen tripla eſſe bernullianis non poteſt.

Quid ita? inquit Laghius; quia, inquam, ſi corpus A tribus ordinibus pellatur, quorum ſumma conſtet elaſtris ſex, oportet ſane, ex bernullianorum opinione, vim eius vivam eſſe $= 6$, ideoque velocitatem $= \sqrt{6}$. Similiterque ſi uno tantum ordine BC pellatur, qui elaſtris duobus conſtet, oportebit, vim eius vivam eſſe $= 2$, velocitatem $= \sqrt{2}$. Quis autem non videt, velocitatem eam, quæ ſit $= \sqrt{6}$, minime triplam eſſe eius velocitatis, quæ ſit $= \sqrt{2}$?

Ut ut eſt, mihi certe non ſatis probatur, vim vivam (ſi vis modo ulla viva eſt in natura) proportionalem ſemper eſſe elaſtrorum numero, a quibus manat. Vereor enim, ne variet, & ab hac proportionalitate aberret, quemadmodum aberrat, & variat velocitas. Libentius dixerim, quantitatem motus numero elaſtrorum reſpondere, quam vim vivam.

An vis ulla viva ſit in natura.

Libentius ego quoque, inquit Graſſius, id dixerim. Sed quid eſt, quod ais: *ſi vis modo ulla viva eſt in natura?* An hoc etiam dubitas, utrum vis viva ſit ulla? Scio enim in philoſophia quam facile nihil teneas. Sed ſi vim vivam nullam eſſe ponis; quis quæſo tibi credat, tam multos homines, tam litteratos, tam graves uſque adhuc inter ſe contendiſſe de vi nulla? Ne ego quidem, inquam, id crederem; ſi iſti graves, quid ipſa ſit vis viva, de qua contendunt, omnes mihi eodem modo explicarent. Sed ſcis, vel in ipſa definitione quantum diſcrepent.

Quapropter ut perſpicuitati ſerviam, quantum poſſum, quod me interrogas, dialecticorum more ſtatim diſtinguo. Si enim vim vivam cum dicis, quantitatem ipſam motus, a potentia aliqua, & preſſione ortam, intelligis; ſanus non videar, ſi dubitem, an ſit ulla in natura. Et vero quis umquam de ea dubitavit? Sin autem vim eam intelligis, quæ ad quantitatem motus addatur, quæque ſit ipſa tamen quantitati motus proportionalis; quamquam quid ea opus ſit in natura, non video; tamen ſi vis eſſe aliquam, non admodum repugnabo. Quod ſi vim eam intelligis, quæ ad quantitatem motus addatur, quæque non velocitati, quemadmodum motus quantitas, ſed velocitatis quadrato æſtimetur; hæc enimvero an ſit ulla in natura, valde dubito.

Quid? inquit tum Laghius; cum corpora mota effectus in natura edant velocitatis quadrato proportionales; an non opus eſt, vim quamdam in corporibus motis ineſſe, quæ velocitatis quadrato proportionalis ſit? Etiamne, inquam, ſubſtantialis? Non hoc dico, inquit Laghius; nam ut

ut ſit vis viva in natura, & proportionalis quadrato velocitatis ſit; non continuo tamen & immutabilis ſit, oportet, & per ſe ſubſiſtens. Subſtantialitatis ergo opinionem, inquam, quæ quaſi fundamentum a bernullianis ponitur, reiicis.

Credo, inquit Laghius, & hi reiiciunt; (oſtendebatque mihi Ioannem Petrum fratrem meum, & Lælium Amadeſium, quos dudum introiiſſe, non ſenſeram) hi enim, inquit, rident, cum ſubſtantialitatis nomen audiunt. Quod enim nomen, ſi paullo aſperius ſit, inquam, non hi rideant? Homines poetarum lectione perpoliti, quibus nihil venuſtum eſt, præter Adonidem. Non autem animadvertunt, quantum in his nominibus interdum ſit ponderis. Sed hi profecto Bonamicum de rebus a Carolo Borbonio præclare geſtis audire malunt; noſtra hæc abhorrent. Bonamicum ergo, quem iam Ghedinus habet in manibus, audiamus.

Non; inquit Amadeſius, niſi prius ad id reſpondeas, quod modo Laghius proponebat. Si enim corpora, quæ moventur, effectus edunt velocitatis quadrato proportionales, oportet ſane, vim quamdam in illis eſſe velocitatis quadrato proportionalem; quæ, quoniam quantitas ipſa motus eſſe non poteſt, oportet, ut ſit vis alia, quæ ad ipſam addatur. Vides, nos non in fabulis tantum delectari. Quod ſi voces interdum ridemus; inſolentia nominum riſum movet, non res ipſa.

Vos vero, inquam, cum omnia ad elegantiam refertis, ridetis iure quodam veſtro. Nos his nominibus aſſueti ſumus, ut iam credam poetas veſtros nobis ignoſcere. Sed quando tibi res placet; morem geram, & pauca de re dicam; modo illud mihi concedatis, ut cum ad id, quod Laghius modo propoſuit, reſpondero, ad Borbonium tranſeamus. Quæro igitur, qui effectus hi ſint velocitatis quadrato proportionales. Spatia, inquit Amadeſius, quæ corpora ſurſum iacta excurrunt. Et foveæ, inquit Laghius, quas globi exempli gratia in ſebum cadentes faciunt. Experimentum ſummi viri, Ioannis Poleni, non ignoras.

Nec ignoro, inquam, & ſummopere admiror. Sed prius dicam de ſpatiis. An ergo putas, Amadeſi, ſpatium, quod adſcendens corpus excurrit, ipſius corporis effectum

eſſe?

eſſe? Non quidem, inquit Amadeſius, ſpatium ipſum; ſed quia corpus, adſcendendo, ſe ſe omnibus ſpatii punctis applicat; hæc ſcilicet applicatio effectus eſt; quæ quoniam proportionalis eſt ſpatio ipſi, idcirco etiam velocitatis quadrato proportionalis eſt. Sic enim audio a leibnitianis diſputari.

Ita ſane, inquam. Sed quid, ſi, dum corpus adſcendit, ex improviſo omnis ei gravitas adimatur? Quid fiet corpori? Abibit ſurſum, inquit Amadeſius, in infinitum motu æquabili. Et ſe ſe, inquam, applicabit ſpatio infinito. Hic ſe colligens Amadeſius, cum aliquantiſper ſubſtitiſſet, video, inquit, quam fallaciam nectas. Nempe, quia corpus, gravitate omni ſublata, per infinita ſpatia abiturum eſt, vis inde colligi, vim eius vivam infinitam eſſe. In quo falleris. Etenim gravitate omni ſublata, corpus in infinitum abit motu æquabili, neque in eo vim vivam ullam exercet; ſola motus quantitate fertur, quæ, ſublatis reſiſtentiis omnibus, numquam in illo minuitur, ſed manet eadem.

Hoc ſcilicet volebam, inquam. Nam ſi corpus per infinitum ſpatium excurrere poteſt ſine vi viva, cur per finitum non poſſit? Ac ſi motus quantitas, quæ numquam minuatur, ei ſatis eſt ad infinita ſpatia percurrenda; cur eadem motus quantitas, ſi reſiſtentiis aliis, atque aliis paullatim minuatur, non ſit ſatis ad finita? Ut appareat, quantitatem motus, ab naturalibus potentiis ortam, ſatis valere ad omnia; vim aliam nullam ad hanc addi oportere.

Quo loco mirari ſatis non poſſum, quid ſit, quod in corpore, ſi ad ſpatium aliquod ſurſum feratur, vim vivam quamdam omnes requirant; in eodem corpore, ſi per idem ſpatium deorſum cadat, vim vivam requirat nemo. Quid enim? An non idem cadendo deſcribit ſpatium, quod adſcendendo? An non iiſdem punctis ſe applicat? Quod ſi quantitas motus ſatis cadenti eſt, ut ſpatii punctis ſe applicet, cur non ſit ſatis etiam adſcendenti? Ut hoc unum interſit, quod quantitatem motus in cadente gravitatis preſſiones paullatim pariunt; in adſcendente quantitatem motus iam partam paullatim minuunt, ac tandem exſtinguunt. Sed nihil impedit, quo minus quantitas motus ſatis ſit vel cadenti, vel adſcendenti ad ſpatia eadem emetienda.

Cum hæc dixiſſem; ſcite, inquit Ioannes Petrus ſubridens, ex iſtis ſpatiis evaſiſti; ſed nondum tamen explicas, quid id ſit, quod in corpore adſcendente pro effectu haberi debeat. Nam ſpatium quidem ipſum effectus non eſt; applicatio autem corporis ad ſpatium eſt motus ipſe, non effectus moti corporis. Quid ergo? An corpus hoc motu percitum nihil efficit? Nihil, inquam, efficeret, niſi contra nitentis gravitatis reſiſtentias vinceret. In his ergo vincendis effectus omnis eſt poſitus. Quod ſi ita eſt, vide, quemadmodum rem expediam. Reſiſtentiarum omnium ſumma, quas corpus adſcendendo vincit, proportionalis eſt velocitati: quod omnes facile concedent; ſunt enim reſiſtentiæ nihil aliud, niſi preſſiones, quas corpus a gravitate accipit, dum adſcendit. Atqui hæc ſumma effectus eſt. Effectus igitur in adſcendente corpore proportionalis velocitati eſt, non quadrato velocitatis. Viden', quam breviter rem totam expediverim, ut ne mulæ quidem tuæ brevius poſſint?

Te autem miror, Tiolius inquit, qui non ad tempus confugis, ad quod audio carteſianos ſolere ſemper perfugere. Nempe illos, inquam, cum ſemel erraverint ſpatium pro effectu ponentes, iuvat errare iterum, & tempus effectui admiſcere; nam, ſpatium cum dividunt per tempus, reſiſtentiarum ſummam, aliud agentes, metiuntur; & errant feliciter, ſed tamen errant.

Exſpecto iam, inquit Laghius, de foveis quid reſpondeas. Non admodum, inquam, longe abeo. Quid enim? Dum globus ex certa altitudine decidens in ſebum ſe infigit, putaſne, effectum eſſe foveam illam, quam facit, ſive ſpatium illud, quod ſebo vacuum relinquitur? Nequaquam, inquit Laghius; quis enim dicat, ſpatium illud a decidente globo effici? Sed quoniam globus per ſebum deſcendens, multas eius partes removet, & reſiſtentias earum vincit, has reſiſtentias, quas vincit, in effectus loco pono.

Præclare, inquam. Qui ergo ſpatium, ſive foveam, metiuntur, nihilque præterea requirunt, effectum non metiuntur; atque ut foveas velocitatis quadrato proportionales inveniſſe ſe, prædicent; non continuo tamen credendum eſt, effectus quoque fuiſſe velocitatis quadrato proportionales; videndum eſt enim, non quam foveæ, quæ fiunt, pro-

por-

portionem habeant, ſed quam proportionem habeant reſiſtentiæ, quæ vincuntur; in his enim vincendis vis omnis abſumitur. Reſiſtentiis ſublatis, dimotiſque partibus, foveæ ipſæ per ſe exſiſtunt.

Atque in his experimentis, ut fatear, illud interdum mirari ſoleo, quod qui ea faciunt, eam ſemper velocitatem conſiderari volunt, quam globus, ex altitudine quapiam cadendo, acquiſiverit; cui velocitati vim vivam quamdam adiungunt, eaque foveam fieri, dicunt. Quid enim velocitate iſta opus ſit, non video; vel omnino quid opus ſit, globum ex altitudine quapiam decidiſſe.

Quid? inquit Amadeſius: annon opus eſt, globum vim vivam quamdam habere, ut perrumpat ſebum, & in ipſum ſe immittat? Hanc ille vim vivam, ex altitudine quapiam cadendo, acquirit. Niſi cadat, vim tantum habebit mortuam. Quid ergo, inquam, ſi prægravis globus, non ille quidem ex altitudine quapiam in ſebum cadat, ſed filo, aut manu ſuſtentetur, uſque dum ſebi ſuperficiem attingat, ac tum ſibi relinquatur? An non ſebum perrumpet ſuo pondere, & foveam quamdam faciet? Hanc vero qua vi faciet? Nam cum primum deſcendere per ſebum incipit, vim vivam nullam habet. At, inquies, vim vivam acquirit per ſebum deſcendendo. Igitur vim vivam acquirit, faciendo foveam, ideſt effectum edendo. Quid ergo aiunt, effectum id eſſe, in quo edendo vis viva amittitur; cum hic quidem in effectu edendo acquiratur?

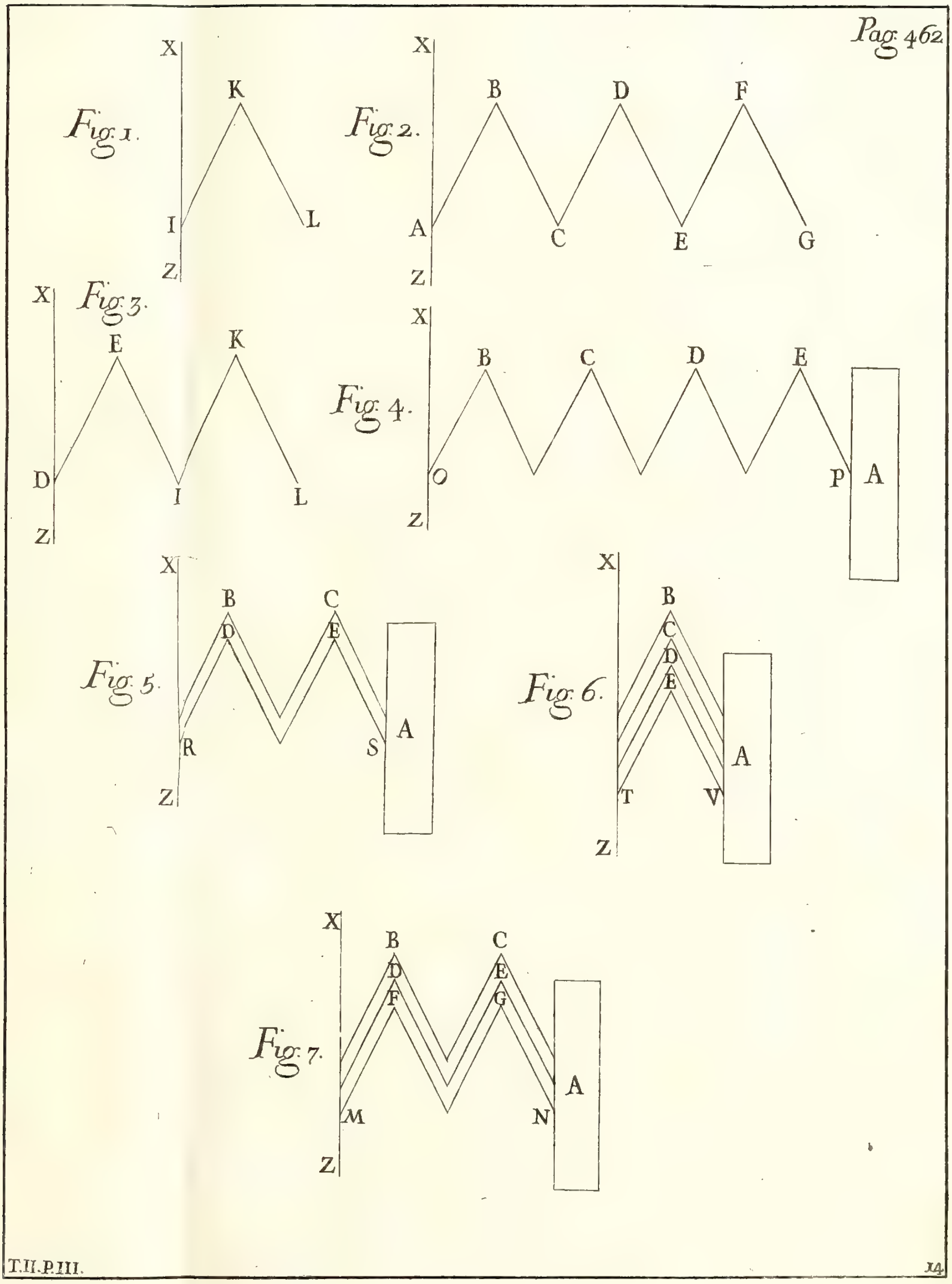
Sed faciamus etiam, ſi volumus, globum, dum deſcendit per ſebum, & foveam facit, præter quantitatem motus, quam a gravitate accipit, accipere etiam vim vivam. Non hanc tamen accipiet, niſi cum per quoddam ſpatium deſcenderit, ideſt cum foveam quamdam fecerit. Hanc ergo foveam, quam facit, antequam vim vivam accipiat, qua vi facit? Quod ſi, nullam adhibens vim vivam, partem tamen aliquam foveæ poteſt facere, cur partes quoque alias, & foveam totam non poſſit? Ut hoc foveæ negotium per ſolam motus quantitatem expediatur; vim vivam nullam adiungere opus ſit.

Sed iam, obſecro, iſta mittamus; ad molliora ſtudia veniamus. Ut lubet, inquit Graſſius. Tu hæc tamen cum academia profecto communicabis. Vereor, inquam, ne, ſi

de

de his rebus iterum in academia diſſeram, moleſtus ſim; præſertim cum eæ res ſint, quæ dici ex tempore dilucide ſatis vix poſſint. Tu vero, inquit Graſſius, ne obſcurus in dicendo ſis, timeas? Tamen res eaſdem mandare litteris potes. Faciam, inquam, ſi otium erit.

FRAN-


Fig. 1.
X
K
I
L
Z
Fig. 2.
X
B
D
F
A
C
E
G
Z
Fig. 3.
X
E
K
D
I
L
Z
Fig. 4.
X
B
C
D
E
O
P
A
Z
Fig. 5.
X
B
C
D
E
R
S
A
Z
Fig. 6.
X
B
C
D
E
T
V
A
Z
Fig. 7.
X
B
C
D
E
F
G
M
N
A
Z

Francisci Mariae Zanotti

De elaſtris.

Sermo tertius.

Cum ſuperiore anno pauca quædam de elaſtrorum vi, & natura contra Camuſium, excellentiſſimum longe mathematicum, & in pariſienſibus academicis clariſſimum, propoſuerim; non ſatis ea de re dixiſſe videbor, niſi hominis doctiſſimi cum ſententiam reiecerim, argumentum etiam, demonſtrationemque diſſolvam. Eſt enim omnis perfecta oratio, ut Rhetores omnes tradunt, in argumentatione & confutatione poſita, quarum alteram ſi tollas, nihil aut parum momenti ſit in altera. Patiemini ergo, Sodales optimi, me rurſum ad rem eamdem reverti, & Camuſii argumentum paullo diligentius expendere, ut quam diſputationem non ſine veſtra approbatione ſuſcepi, eamdem perficiam hoc veſpere.

Theorema Camuſii proponitur, & declaratur.

Camuſius theorema hoc ſtatuit. Sit AB (*Fig.* 1) longitudo cuiuſvis elaſtrorum ſeriei: quæ ſeries cum ſit immobilis in A, relaxans ſe ſe ad partem B globum urgeat. Sintque elaſtra ſeriei omnia & forma, & magnitudine, & vi inter ſe æqualia. Velocitas globi proportionalis erit non lineæ AB, ſed eius radici. Sic Camuſius. Ego, lineæ, dixeram.

Quoniam vero in ſeriebus tantum ſimilibus theorema hoc ſuum Camuſius proponit; videamus iam (ne quid ambiguum relinquamus) quas ille ſeries vocet ſimiles. Duas ergo ſeries ſimiles vocat, ſi in pari elaſtrorum omnium dilata-

latatione preſſio ſeriei unius eamdem ſemper habeat proportionem ad preſſionem alterius.

Qua definitione poſita, ſi elaſtra omnia utriuſque ſeriei cum vi, tum forma, & magnitudine æqualia inter ſe ſint, (eſſe autem in præſens putantur) nulla erit ſeries non cuivis ſimilis. In pari enim elaſtrorum omnium dilatatione, preſſio unius ſeriei ſemper æqualis erit preſſioni alterius, ſi Camuſium audimus; ſi me auditis, preſſio ſemper æqualis erit preſſioni, ſi ambæ ſeries immotæ teneantur; ſin autem relaxent ſe ſe, preſſio ſemper erit ad preſſionem, uti numerus elaſtrorum ad numerum.

Iam vero ſi ſint AB, CD (*Fig.* 1) ſerierum duarum ſimilium longitudines; ac ſeries ipſæ immobiles in A, & C, relaxando ſe ſe ad partes B, & D, duos globos æquales pellant; ſintque præterea AE, AF, & CG, CH partes ſimiles longitudinum AB, CD; non eſt dubium, quin, cum ſeries relaxando ſe ſe pervenerint primum ad puncta E, & G, tum ad puncta F, & H, preſſio in E ſit ad preſſionem in G, ut preſſio in F ad preſſionem in H.

Quippe quia cum ſint AE, CG, & AF, CH partes ſimiles longitudinum AB, CD, facile intelligitur, elaſtra utriuſque ſeriei omnia æqualiter dilatata eſſe debere, ſimul ut ſeries pervenerint in E, & G, vel in F, & H. Porro autem ut preſſiones in punctis E, F, G, H proportionales ſunt, proportionales quoque erunt velocitates, quas globi in iiſdem punctis acquirent. Id per ſe ſatis clarum eſt.

Conſtructio, & demonſtratio propoſiti theorematis.

HActenus ſeries ſimiles explicavi, in quibus theorema ſuum Camuſius propoſuit. Ad id autem demonſtrandum conſtructionem hanc adhibet.

Convertantur lineæ AB, CD (*Fig.* 1) in duas curvas IK, LM ita inflexas, ut ſi globi ex I, & L per eas decidant, eamdem a gravitate velocitatem in quibuſque punctis accipiant, quam in iiſdem punctis accipiunt ab elaſtris, dum lineas AB, CD percurrunt.

Antequam conſtructionem reliquam perſequor, operæ pre-

pretium eſt explicare, quæ ſint in conſtruendis his curvis ſupponenda, qualeſque hæ curvæ ſint.

Et primum quidem putandum eſt, velocitates illas, quas primum globi a gravitate accipiunt in punctis I, & L, æquales eſſe illis, quas primum accipiunt ab elaſtrorum ſeriebus in punctis A, & C. Quod ſi præſens gravitas, quam natura corporibus indidit, id non ferat; poſſumus utique id gravitatis genus fingere, quod id ferat.

Secundo quoniam globi, percurrentes lineas AB, CD, velocitatis incrementa alia aliis ſemper minora ab elaſtrorum ſeriebus accipiunt; ac tandem in punctis B, & D incrementum velocitatis accipiunt nullum; ſic etiam putandum eſt, latercula omnia curvarum IK, LM alia aliis inclinatiora ſemper eſſe, donec ad ultima perveniatur in K, & M; quæ horizontalia ſint, oportet; ut ibi ſcilicet incrementum velocitatis a gravitate ſit nullum.

Et curvis quidem his ita conſtructis, dubitari non poteſt, quin, ſi arcus bini IN, IO, & bini LP, LQ, ſint partes ſimiles curvarum IK, LM; velocitates, quas cadentes globi habebunt in punctis N, O, P, Q, proportionales eſſe debeant. Etenim ſi in lineis AB, CD ſumantur ſegmenta AE, AF, CG, CH æqualia arcubus IN, IO, LP, LQ, erunt AE, AF, CG, CH partes ſimiles linearum AB, CD; & velocitates in punctis E, F, G, H, uti ſupra diximus, proportionales.

Ex hoc porro, quod globorum velocitates in N, & O; & in P, & Q, proportionales ſint; (qualeſcumque ſint arcus IN, IO, LP, LQ, modo partes ſint ſimiles curvarum IK, LM) ſibi dari Camuſius vult, ut curvæ ipſæ IK, LM pro ſimilibus, & ſimiliter poſitis haberi poſſint, & omnia eis tribui, quæ curvis ſimilibus, & ſimiliter poſitis tribuuntur.

Atque hinc ſane theorematis ſui demonſtrationem habet expeditiſſimam. Ductis enim horizontalibus lineis KR, MS, quæ perpendiculares duas IR, LS ſecent in R, & S, facile intelligitur, poligona IRK, LSM ſimilia eſſe; eſſeque IR, LS : : IK, LM, & $\sqrt{IR}$, $\sqrt{LS}$: : $\sqrt{IK}$, $\sqrt{LM}$.

Quare cum velocitates, quas globi a gravitate acquirunt, cadendo ex I in K, & ex L in M, ſint utique inter

 ſe,

ſe, uti $\sqrt{IR}$, & $\sqrt{LS}$, erunt quoque uti $\sqrt{IK}$, & $\sqrt{LM}$; ideoque etiam velocitates, quas iidem ab elaſtrorum pulſu acquirunt percurrendo lineas AB, CD, erunt, uti radices linearum ipſarum AB, CD.

Neque vero Camuſius hanc demonſtrandi viam aperte tenet; etenim longius ſpectans, & multa ſimul colligere volens, poſtquam curvas IK, LM eo, quem ſupra dixi, modo conſtruxit, ex illarum ſimilitudine, & notiſſimis gravium proprietatibus, formulas quaſdam ſibi condit, e quibus, tamquam e communibus locis, argumenta petit omnia ad ſuas ſententias ſtabiliendas. Mihi quidem non videtur res tanti fuiſſe; ac potuerunt fortaſſe multa, vel ſine formulis, brevius, atque adeo clarius, expediri; velut hoc ipſum theorema, de quo loquimur, cuius demonſtrationem e formularum latebris quaſi eductam, & omni prope artificio ſpoliatam, in medio poſui. Nunc eamdem conſideremus, ſi placet.

An velocitates cadentium globorum per IK, *&* LM *ſint inter ſe, uti radices altitudinum* IR, LS.

Et primum quidem illud in hac demonſtratione ponitur: velocitates globorum cadentium ex I in K, & ex L in M, ita inter ſe eſſe, uti radices altitudinum IR, & LS. Id niſi concedas, demonſtratio tota corruat, neceſſe eſt.

Videamus ergo quatenus concedendum id ſit. Ego vero, ſi globi ambo eodem agantur gravitatis genere, ideſt impulſus accipiant ambo a gravitate æquales; concedo utique, cadentium corporum velocitates proportionales eſſe radicibus altitudinum; non autem concedo, ſi gravitatis genus ſit diſpar; ideſt ſi globus alter impulſum maiorem a gravitate accipiat, alter minorem.

Etenim qui demonſtrant, velocitates cadentium corporum ita inter ſe eſſe, uti radices altitudinum; id ſcilicet demonſtrant, quia terreſtria tantum corpora inter ſe comparant, quæ omnia eodem gravitatis aguntur genere. Non idem demonſtrarent, ſi corpora duo inter ſe compararent, quorum alterum in terram caderet, alterum, exempli cau-

ſa, in lunam; ſiquidem dicuntur omnia in luna multo minores impulſus accipere a gravitate. Atque hæc ſane comparatio ſi fiat, cadentium velocitates radicibus altitudinum minime proportionales invenientur.

Sinite hoc loco, Sodales præſtantiſſimi, me a propoſito paullisper digredi, ut illos moneam, qui vim vivam velocitatis quadrato ex eo maxime metiuntur, quod cadentia corpora vim vivam acquirunt altitudini, unde decidunt, proportionalem; cenſetur autem altitudo proportionalis eſſe velocitatis quadrato. Quod illis recte procedet, quamdiu terreſtria cum terreſtribus comparabunt. Videant autem, ſi a terra diſceſſerint, in luna ne quid offendant. Si enim terreſtre aliquod corpus, quod in terram cadat, cum lunari quopiam comparent, quod cadat in lunam, non erunt, quod ſupra dixi, velocitatum quadrata altitudinibus proportionalia. Quid, ſi in venerem tranſeant, ſi in mercurium, ſi in alia cœleſtia corpora, quorum ſingula proprium habent gravitatis genus? Quæ erit a planetis, cometiſque omnibus, & quanta diſſenſio? Hæc dixi, non ut homines arguerem, ſed ut monerem.

Ad propoſitum iam redeo. Ut demonſtratio Camuſii ne corruat, ſintque velocitates globorum decidentium ex I in K, & ex L in M radicibus altitudinum proportionales; putandum ſane eſt globos ambos eodem agi gravitatis genere, ideſt æqualiter a gravitatibus ſuis pelli in punctis I, & L, ideoque etiam æqualiter ab elaſtrorum ſeriebus pelli, in punctis A, & C. Idque ipſum ſane Camuſius ſupponit; nam quamvis in condendis ſuis formulis nullam certam his impulſibus proportionem aſſignet; ut formulas tamen ipſas theorematì accommodet, idque efficiat, quod vult; impulſus, qui fiunt in I, & L, æquales eſſe ſupponit; idque ex eo, quod illos etiam æquales ſupponit, qui fiunt in A, & C. Quod facit ille quaſi iure quodam ſuo. Commodius autem feciſſet, ſi quod ſuppoſuit, ratione aliqua demonſtraſſet.

Ego certe cum dixi (recordari enim omnes poteſtis) impulſus illos, quos globi ab elaſtrorum ſeriebus primum accipiunt in A, & C, minime æquales eſſe, ſed elaſtrorum numero proportionales, id etiam demonſtrare conatus ſum; & præterea argumenta collegi, quæ contra videbantur dici

 poſſe,

poſſe, ut ea, ſi poſſem, etiam ſolverem. Quo apparet, me nihil aſſumſiſſe arbitratu meo; certe noluiſſe.

An curvæ lineæ IK, LM *ſimiles ſint, & ſimiliter poſitæ.*

Alterum eſt, ſine quo ſtare Camuſii demonſtratio non poteſt: curvas ſcilicet IK, LM & ſimiles, & ſimiliter eſſe poſitas. Id nempe Camuſius ex eo colligit, quod, ſi arcus quivis ſumantur IN, IO, LP, LQ partes ſimiles curvarum IK, LM, velocitates, quas cadentes globi habent in punctis N, O, P, Q, proportionales ſunt. Mihi non videtur id ſatis eſſe ad ſimilitudinem, ſimilemque curvarum poſitionem colligendam. Quod plane manifeſtum fiet, ſi duas ipſe curvas lineas IK, LM (*Fig.* 2) conſtruxero, in quibus illa utique velocitatum proportionalitas conſervetur; ipſæ autem curvæ nequaquam ſimiles, & ſimiliter poſitæ ſint. Has ſtatim conſtruo.

Accipiantur in duabus lineis verticalibus IR, LS partes infinitæ, infiniteque parvæ Ip, pq, qr &c. Ls, st, tu &c., totidem in utraque linea. Sintque lineolæ Ip, pq, qr &c. aliæ aliis ſemper minores, differentia infiniteſima ſecundi ordinis; ſitque præterea prima Ip ad primam Ls, uti ſecunda pq ad ſecundam st, & ſic deinceps; ut ſint lineolæ Ls, st, tu &c. ipſæ quoque aliæ aliis ſemper minores eodem modo.

Hoc facto ducantur horizontales totidem lineæ ph, qz, rk &c. sm, tn, uo &c., ductiſque lineolis duabus quibuſvis Ih, Lm, quæ ſecent horizontales in h, & m; facto centro in h, intervallo hI, deſcribatur circulus ſecans qz in z, ducaturque lineola hz. Et ſimiliter facto centro in m, intervallo mL, deſcribatur circulus ſecans tn in n, ducaturque lineola mn; eodemque modo ducantur zk, no, aliæque deinceps.

Non eſt dubium, quin ſeries lineolarum Ih, hz, zk &c., & ſeries lineolarum Lm, mn, no &c. duas curvas lineas IK, LM conſtituant; etenim cum ſit Ip maior quam pq; ſit vero Ih æqualis hz, fieri nequit, ut ſit hz in directum lineæ hI; ſed oportet, ut ab eius directione tantillum deflectat. Idemque accidet lineolis aliis omnibus, ut deflectant

fleƈtant ſemper aliæ ab aliis, & quidem in eamdem partem.

Curvas conſtruxi IK, LM. Nunc duo oſtendam: primum has curvas eiuſmodi eſſe, ut ſi arcus bini IN, IO, & bini LP, LQ partes ſimiles ipſarum ſint; globi autem duo ex I, & L per eas decidant; velocitates, quas globus alter habebit in N, & O, proportionales futuræ ſint velocitatibus, quas habebit alter in P, & Q: ſecundo fieri poſſe, ut hæ curvæ nequaquam ſint ſimiles, & ſimiliter poſitæ.

Primum oſtendam, duƈtis horizontalibus NE, OH, PC, QT, quæ ſecent perpendiculares IR, LS in punƈtis E, H, C, T. Cum ſint arcus IN, LP partes ſimiles curvarum IK, LM, tot erunt latercula Ih, hz &c. in arcu IN, quot erunt latercula Lm, mn &c. in arcu LP; & pariter tot lineolæ Ip, pq &c. in linea IE, quot erunt lineolæ Ls, st &c. in linea LC. Quare cum ſit prima Ip ad primam Ls, uti ſecunda pq ad ſecundam st, & ſic deinceps; erit etiam tota IE ad totam LC, uti Ip ad Ls. Eodemque modo oſtendetur, eſſe etiam IH ad LT, ut eſt Ip ad Ls. Erit ergo IE, LC : : IH, LT, ſive IE, IH : : LC, LT, & $\sqrt{IE}$, $\sqrt{IH}$: : $\sqrt{LC}$, $\sqrt{LT}$. Atqui velocitates, quas habet globus alter in N, & O, ſunt inter ſe, uti $\sqrt{IE}$, & $\sqrt{IH}$; velocitates vero, quas habet alter in P, & Q, ſunt inter ſe, uti $\sqrt{LC}$, & $\sqrt{LT}$; ergo velocitates illæ his erunt proportionales.

Fieri autem poteſt (quod ſecundo loco propoſui), ut hæ curvæ IK, LM nequaquam ſimiles & ſimiliter poſitæ ſint. Quod ſic oſtendo. In conſtruendis his curvis latercula prima Ih, Lm, ut cuique luberet, ſumi ſivimus; ac potuerunt utique ea ſumi, ut anguli Ihp, Lms inæquales fierent; putemus ergo hos angulos faƈtos fuiſſe inæquales; iam igitur prima illa latercula Ih, Lm nequaquam erunt ſimiliter poſita. Iam vero latercula, quæ ſecuntur, hz, mn vel angulos zhI, nmL æquales faciunt, vel inæquales; ſi æquales, ergo ne ipſa quidem erunt ſimiliter poſita, quoniam æquales angulos faciunt cum laterculis Ih, Lm poſitis non ſimiliter; ſi inæquales, iam ergo curvæ IK, LM non ſunt ſimiles.

Appa-

Apparet igitur, illam, quam diximus, velocitatum proportionalitatem non ſatis eſſe ad oſtendendum, curvas haſce & ſimiles, & ſimiliter eſſe poſitas.

Quid requiratur ad harum curvarum ſimilitudinem, ſimilemque poſitum inducendum.

REquiritur præterea, ut anguli Ihp, Lms ſint æquales. Et ſane, ſi æquales hi ſint, curvæ lineæ IK, LM & ſimiles, & ſimiliter poſitæ eſſe debebunt. Quod ſtatim oſtendam, ductis lineis hy, mx, quæ parallelæ ſint lineolis pq, st, ſecentque lineas qz, tn in punctis y, & x.

His enim ductis facile intelligetur, lineolas, zh, hI, Ip, pq, hy, omnes ex ordine proportionales eſſe lineolis nm, mL, Ls, st, mx; eſſeque propterea zh, hy : : nm, mx; quare cum ſint anguli hyz, mxn æquales, ut qui recti ſunt; facile conſtat, æquales quoque eſſe angulos zhy, nmx; ideoque cum ſint æquales etiam anguli yhp, xms; quippe recti; & æquales etiam ſint anguli phI, smL ex ſuppoſito; conſequens eſt, ut etiam reliqui anguli zhI, nmL æquales eſſe debeant. Quod cum ad angulos alios omnes transferri poſſit, quotcumque a laterculis deinceps ſequentibus fiunt, ſatis conſtat, curvas IK, LM eſſe ſimiles.

Neque minus manifeſtum eſt, ſimiliter eſſe poſitas; quippe quia latercula lh, Lm, propter æqualitatem angulorum Ihp, Lms, ſunt utique ſimiliter poſita; ſequentia vero latercula ipſa quoque ſimiliter poſita eſſe oportet, cum alia ab aliis deflectant paribus ſemper angulis.

Videtur ergo curvarum, quas conſtruximus, IK, LM ſimilitudo omnis ex eo pendere, ut anguli Ihp, Lms æquales ſint. Horum angulorum æqualitatem ſi tollas, proportionalitas velocitatum in punctis N, O, P, Q manebit; ſimilitudo curvarum, & ſimilis poſitus non manebit.

An

An liceat Camuſio æqualitatem angulorum Ihp, Lms *ſupponere.*

QUamquam id quidem non in his tantum curvis valet, quas finximus, ſed in omnibus, quocumque tandem modo conſtructæ ſint; ut nullæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ eſſe poſſint, niſi illa, quam diximus, angulorum Ihp, Lms æqualitas ſupponatur. Quare Camuſii argumentum ſolutum ſatis habebimus, ſi oſtendamus, hanc illi angulorum æqualitatem ſupponere non licere. Rem repetam ab initio.

Cum ſint curvæ IK, LM, ut Camuſius vult, non ſolum ſimiles, & ſimiliter poſitæ, ſed æquales etiam longitudinibus AB, CD (*Fig.* 2); ſane ſequitur, ut quemadmodum latercula prima Ih, Lm ſunt partes ſimiles curvarum; ſic etiam lineolæ primæ Af, Ce, æquales laterculis Ih, Lm, ſint partes ſimiles longitudinum AB, CD.

Oportet præterea, ut Camuſii ratio fert, velocitatem, qua globus decidit ex I in h, æqualem eſſe velocitati, qua globus idem, elaſtris pulſus, percurrit lineolam Af; eodemque modo velocitatem, qua globus decidit ex L in m, æqualem eſſe velocitati, qua globus idem propter elaſtrorum pulſum percurrit lineolam Ce.

His prævifis duo hæc pono. Primum: ſi velocitates, quibus globi, elaſtris pulſi, percurrunt lineolas Af, Ce, ſunt inter ſe, uti $\sqrt{Af}$, & $\sqrt{Ce}$; erunt utique, in curvis lineis IK, LM, anguli Ihp, Lms æquales. Secundo: ſi velocitates, quas dixi, non ſunt inter ſe, uti $\sqrt{Af}$, & $\sqrt{Ce}$; anguli Ihp, Lms æquales eſſe non poterunt.

Demonſtro primum. Si velocitas, qua percurritur Af, eſt ad velocitatem, qua percurritur Ce, uti $\sqrt{Af}$ ad $\sqrt{Ce}$; erit iam ex his, quæ diximus, etiam velocitas, qua globus labitur per Ih, ad velocitatem, qua labitur per Lm, uti $\sqrt{Ih}$ ad $\sqrt{Lm}$; atqui illa velocitas eſt ad hanc, etiam ut $\sqrt{Ip}$ ad $\sqrt{Ls}$; erit ergo $\sqrt{Ih}, \sqrt{Lm} :: \sqrt{Ip}, \sqrt{Ls}$, & Ih, Lm :: Ip, Ls; ideoque propter æqualitatem angulorum Iph, Lsm, qui recti ſunt, ſimilia erunt triangula Iph, Lsm, & anguli Ihp, Lms æquales.

De-

Demonſtro ſecundum. Si velocitas, qua percurritur Af, non eſt ad velocitatem, qua percurritur Ce, uti $\sqrt{Af}$ ad $\sqrt{Ce}$; ne velocitas quidem, qua globus labitur per Ih, erit ad velocitatem, qua labitur per Lm, uti $\sqrt{Ih}$ ad $\sqrt{Lm}$; atqui tamen velocitas illa eſt utique ad hanc, uti $\sqrt{Ip}$ ad $\sqrt{Ls}$; non erit ergo $\sqrt{Ih}$, $\sqrt{Lm}$: : $\sqrt{Ip}$, $\sqrt{Ls}$, neque Ih, Lm : : Ip, Ls; neque triangula Iph, Lsm ſimilia erunt, neque anguli Ihp, Lms æquales.

Aequalitatem igitur angulorum Ihp, Lms ſupponere nullo modo licet, niſi ſi prius ſupponatur, velocitates, quibus globi ex elaſtrorum pulſu percurrunt lineolas Af, Ce, eſſe inter ſe, uti $\sqrt{Af}$, & $\sqrt{Ce}$, ideſt uti radices longitudinum AB, CD. Atqui id ſupponere Camuſio non licet; ſi id enim ſupponat, id ſupponat, quod maxime in quæſtione eſt; non igitur Camuſio licet, angulorum Ihp, Lms æqualitatem ſupponere. Ac ſi hanc non ſupponit, ne curvas quidem lineas IK, LM (quocumque tandem modo conſtructæ ſint) pro ſimilibus, & ſimiliter poſitis habere poteſt.

De ipſa Camuſiani argumenti forma.

HAec ſunt, Sodales optimi, quæ me primum, cum in illum Camuſii ſermonem incidiſſem, quamvis nondum ſatis perſpecta animo haberem & cognita, fecerunt tamen, propter obſcuritatem neſcio quam, ut elegantiſſimæ, ingenioſiſſimæque demonſtrationi minus aſſentirer; poſtea ſtudio adhibito rem totam evolvere conatus ſum, quæ tamen & apertior fuiſſet, & ſe ſe citius prodidiſſet, ſi Camuſius quidem argumentum ſuum ad dialecticorum leges conformaſſet, & minus timide concluſiſſet.

Non enim ille, tamquam dialecticus aliquis ſtrenuus, atque audax, ſic ponit: *Si curvæ duæ id habent, ut velocitates cadentium in ſimilibus quibuſque partibus proportionales ſint; ſunt ſimiles: hæ curvæ id habent: ergo ſunt ſimiles:* ſed cum primum poſuerit: *hæ curvæ id habent:* ad earum ſimilitudinem colligendam ſtatim addit: *ſi ſimiles ſunt, id habent:* in

in quo videtur dialecticos audire noluiſſe, quorum vetus præceptum eſt, iam inde ab Ariſtotele profectum, & græcis, romaniſque oratoribus probatiſſimum, ut conditione poſita id colligatur, quod ſequitur; non ex eo, quod ſequitur, colligatur conditio ipſa.

Idque videtur Camuſius contemſiſſe magis, quam non vidiſſe; itaque rationem concludit timidius; non enim ſic colligit: *ergo curvæ ſunt ſimiles*: ſed: *ergo pro ſimilibus haberi poſſunt*; perinde ut ſi poſſint eſſe, & poſſint etiam non eſſe ſimiles; liberum autem cuique ſit eas ſumere, ut lubet. Quam libertatem ſi ille cuivis concedit, miror. Etenim ſi curvæ ſimiles plane ſint, theorema illud colligitur, quod ipſe vult; ſin autem non ſint, colligi poteſt contrarium; ut certe videatur non fuiſſe hic locus cuiuſquam libertati committendus.

Hæc dixi, Sodales optimi, ne cum doctiſſimi, ingenioſiſſimique mathematici ſententiam non amplecterer, demonſtrationem viderer aſpernari; quam ego quidem ſummopere admiror; ſed curare tamen debui, ut, ſi poſſem, refellerem; eſt enim ſuperbum, atque arrogans magnorum hominum opiniones reiicere, rationibus non reſpondere.

Fig. 1.

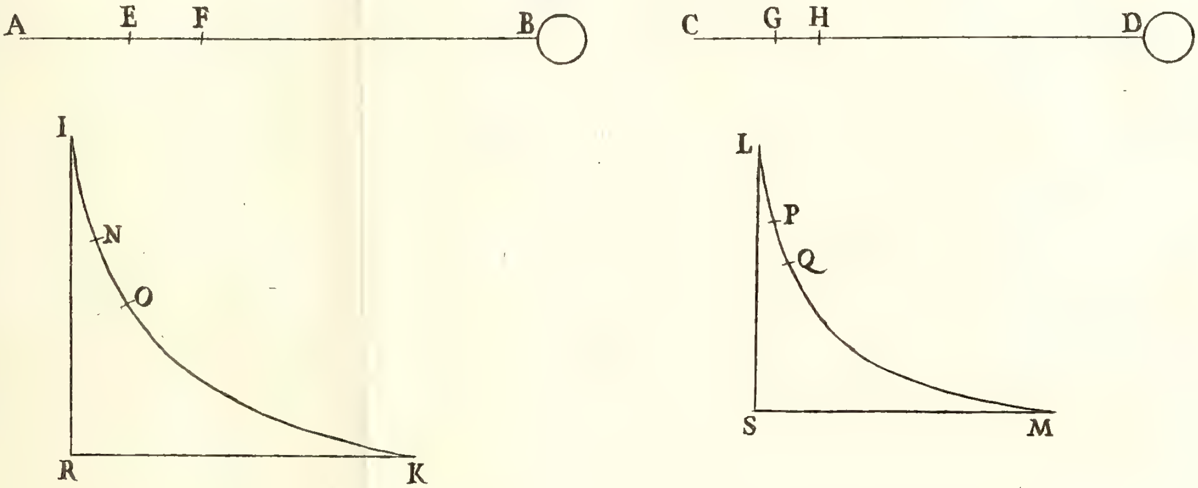
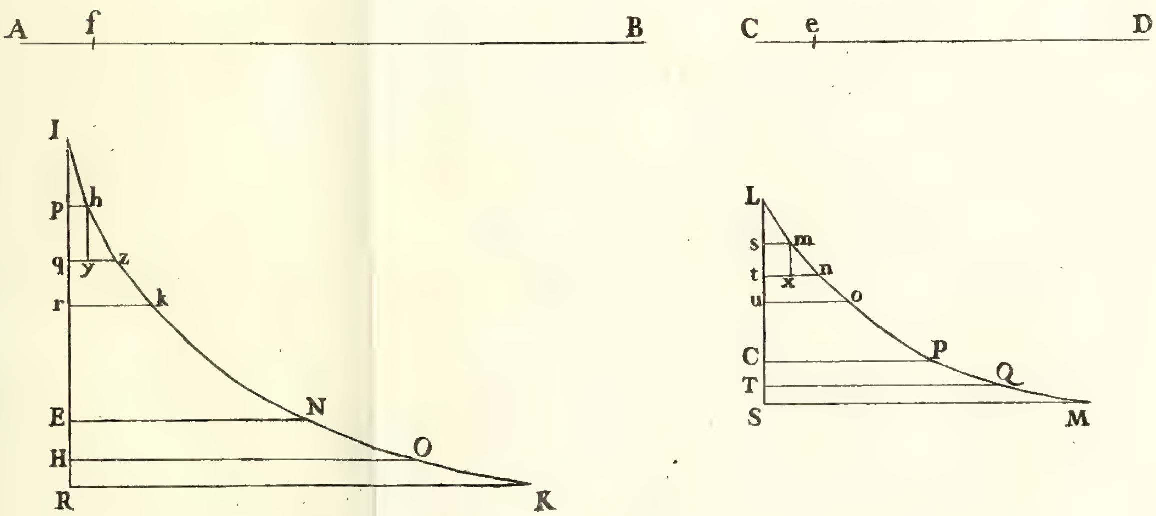

A
E
F
B
C
G
H
D
I
N
O
R
K
L
P
Q
S
M

Fig. 2.


A
f
B
C
e
D
I
p
h
q
y
z
r
k
E
N
H
O
R
K
L
s
m
t
x
n
u
o
C
P
T
Q
S
M

VINCENTII MENGHINI

De ferrearum particularum progreſſu in ſanguinem.

Ante plures annos conſtitueram in martialium medicamentorum effectus, & agendi modum, inquirere, præſertim cum ſingularis eorum efficacitas ad quamplurimos morbos curandos, tum priſcis, tum recentioribus medicis ſemper fuerit admirationi. Ad quam inquiſitionem rite inſtituendam, illud mihi præſtandum videbatur, ut prius multis, & accuratis experimentis certior fierem, an vere metallica hæc ſubſtantia in ſtomacho, & inteſtinis ſubacta ad vias ſanguinis progrederetur. Id cum anno proximo ſuperiore fuiſſem aggreſſus, accidit, ut nonnulla phænomena inter experiundum a me viſa, ab hoc ferri tranſitu in ſanguinem explorando me avocarent, & ad aliam prorſus diverſam indaginem allicerent, nimirum, ut cognoſcerem quodnam eſſet proprium ferri domicilium in viventium corporibus, quod memineritis, puto, me tandem fuiſſe aliqua ex parte aſſequutum. Iam ergo, Sodales optimi, ad intermiſſam inveſtigationem rediens, meorum laborum eventum maiori, qua potero, perſpicuitate, vobiſcum communicabo. Itaque & ferri progreſſum in ſanguinem, de quo diſputatio eſt inter medicos, & eiuſdem metalli præcipuos, & magis conſtantes effectus, quos, occaſione huius inveſtigationis, mihi contigit obſervare, paucis dicam.

Iam vero cum ferrum pro varia ſuarum partium habitudine, modo magis, modo minus aptum videretur ad lacteos ductus ſubeundos, hinc operæ pretium duxi, metalli huius multiplices formas, omnino ſex, quas ſtatim enumerabo, mihi in ipſo experimentorum aditu comparare: ſcilicet, primum vulgaris ferri ſcobem nullo artificio tractatam, ſed tantum ſetaceo traiectam in promptu habui: de-

inde ſcobem diuturno lapidis porphyrites attritu præparatam: mox hanc ipſam ſcobem muſto ad mellis conſiſtentiam excoctam (quod compoſitum magni eſt uſus apud pleroſque florentinos, qui illud ferri ſpumam appellant): præterea mineram crudam in pollinem redactam; denique duas medicis notiſſimas ferri præparationes, crocum nempe, & tincturam; crocum quidem, quem vocant aperitivum ſubtilius contritum; tincturam vero, forma liquaminis cuiuſdam ad guttas aliquot exhibendi. Porro unamquamque ex iſtis ſex ſubſtantiis in diverſis animantium generibus adhibui, videlicet in canibus, in ſuibus, in pullis, in hominibus, & quidem ſingulas in pleriſque; tempus adminiſtrationis fuit in omnibus idem, nimirum dierum ſaltem quadraginta: quod attinet doſim, hæc varia fuit pro varia animantium corporis magnitudine, ſed eadem in genere eodem: erat quippe rationi maxime conſentaneum pullis minimum pondus, canibus paulo maius, ſuibus adhuc maius, hominibus denique illud, quod praxis probabat, exhibere: atque ut ſanguinis ſtatum in cunctis hiſce animantium generibus, poſt aſſumptum metallum, intimius cognoſcerem, curavi, ut antequam hoc ſumerent, ſingulorum ſanguinem exploratum haberem, aut ſi quando id, vel propter viventium exiguitatem, ut in pullis, vel propter eorum feritatem, ut in ſuibus, inſtituere non licuiſſet, ſaltem id mihi ſolemne fuit, ut eiuſdem generis ſanguis præſto eſſet, qui cum homogeneo ſanguine ex ferro nutrito, ubi occaſio daretur, poſſet pro lubitu comparari.

Ut autem accuratiora, magiſque accepta mea forent experimenta, duorum ſolertiſſimorum virorum adiumento in ſingulis uſus ſum: nempe medici, & in anatomicis ſectionibus exercitatiſſimi Fabii Vignaferri, qui dicta animalia modo adhuc viventia, modo mortua ſumma dexteritate diſſecuit; itemque præſtantiſſimi viri Herculis Lelli, qui in experimentis conficiendis non ſolum conſilium, atque incitamentum, ſed & opem, & diligentiam præſtitit incredibilem; ut nihil dicam de Iacobo Conti, cuius in hac re tantum diligentia, & opera uſus ſum, quantum amicitia utor in omnibus, ideſt commodiſſime; nam cum ad propoſitum mihi finem duplici potiſſimum examine opus eſſe intelligerem, altero chymico, quo ſanguinem, altero anatomico,

tomico, quo vaſa, & partes animalium ſolidas explorarem, nempe eo conſilio, primum, ut martialis ſubſtantia in viventium ſanguinem, ſi qua eſſet ingreſſa, perſpicue appareret, tum eiuſdem martis tranſitus a lacteis in ductus ſanguiferos manifeſto cognoſceretur: hinc veluti duplex experimentorum claſſis exorta eſt, in quarum utraque dictorum peritiſſimorum virorum induſtria erat mihi opportuniſſima.

Exordiar igitur a ſanguine: quod antequam facio, ſinite, ut diſtinctionem illam ferrearum particularum in duo ſumma genera, quam anno elapſo inſtitui, quam breviſſime commemorem. Vocavi particulas primi generis illas, quæ ab invicem ſunt ſolutæ, & quamquam paulo remotius a magnete, ad illum tamen confeſtim accurrunt: ſecundi generis, quæ confertim, & quaſi glebularum forma cultro magnetico adhærent, modo propius ad illas admoveatur. Iam ergo ſanguinis examen chymicum eo ferme modo, quo ſuperiore anno audiviſtis, ſic peractum eſt. Extractis ſeparatim ex animantibus pluribus ferro minime nutritis, ſcilicet ex homine, cane, ſue, quinque unciis ſanguinis, iiſque ad ignem exſiccatis, & ad ſcrupuli unius pondus redactis, diligenter exploravimus, quot ferreæ moleculæ, ſive primi, ſive ſecundi generis, in eo continerentur: ſimiliter in totidem unciis ſanguinis eiuſdem ſpeciei, ſed aliqua ex ſupra recenſitis ferreis præparationibus quadraginta dies nutriti, & ad ſcrupuli pariter pondus redacti, latentis ferri copiam inveſtigavimus; & quoniam in avibus ob ſanguinis inopiam, tantumdem colligi non potuit, eamdem tamen proportionem, ſcilicet ut quo minus erat extracti ſanguinis pondus, eo minor quoque foret exſiccati pulveris quantitas, ubique ſervavimus. Quod cum reſpectu prædictarum ſex martialium præparationum ſingillatim in memoratis animalium ſpeciebus iterum, ac ſæpius præſtitum fuerit, vix audeo dicere, quanta experimentorum ſeges mihi ſe ſe obtulerit, quantuſque labor fuerit ſubeundus. Mitto dicere ea omnia, quæ in animalium delectu, & nutritione fuerunt obſervata: nam primum quantum ad homines, in quibus, ſolius morbi occaſione, martialia medicamenta præbere datum erat, illos elegimus, qui morbo non admodum diſſimili laborarent: quantum ad bruta;

hæc, quoad fieri poterat, ætate, viribus, ſtatura, paria deligebantur. Horum pondera, antequam ferreum alimentum præberetur, accurate notabantur: notabatur omnium aſpectus, oculorum nitor, alacritas, in cibo, ac potu capiundo faſtidium, aut promptitudo, excrementorum ſtatus; denique ſymptomata, aut qualitatum quarumcumque mutationes, quæ de individui ſalute, aut morbo nos poſſent admonere; præcipue vero pulſus ratio habita eſt, adeo ut de ſingulis prædictis viventibus, demptis avibus, & ſuibus, innoteſceret, quot ictus in unoquoque horæ minuto, tam ante, quam poſt peractam ferream diœtam numerarentur. Ut igitur primum, quæ in hominibus obſervare contigit, vobiſcum communicem, ſcire oportet, ex ſex illis ferreis ſubſtantiis tres tantummodo in quatuor ægrotantibus fuiſſe adhibitas; nempe tum in muliere chloroſi affecta, tum in viro hypocondriaco ferream ſcobem porphyrite ſubactam: in altera muliere maſenterii obſtructionibus detenta, ſpumam ferri; denique in homine altero hypocondriaco, crocum martis aperitivum. Iam, quæ obſervando didicimus, huc redeunt. Urinæ, quas prædicti quatuor ægroti egeſſerunt, aut eumdem ferrearum particularum exiguum numerum, tam ante, quam poſt ferri uſum habuerunt, aut vix tantillo maiorem habuit eius mulieris lotium, cui ſpuma data eſt. Contra vero pulſationum arteriæ numerus in omnibus aliquantiſper eſt auctus; & in muliere quidem chloroſi affecta, itemque in viro hypocondriaco, qui ambo ſcobe utebantur, magis inſigniter; in illa, ex quinquaginta duabus, ad ſexaginta quatuor minuti intervallo; in hoc a ſeptuaginta, fere ad octoginta: neque eſt prætereundum, eidem mulieri & vultus colorem, & cathameniorum fluxum per id curationis tempus rediiſſe. Reliquos duos ægros quod attinet, in his quoque factum eſt aliquod in pulſationum arteriæ numero incrementum, ſed minus, quam in prioribus. Manifeſtum quoque diſcrimen indicavit ſanguinis analyſis. Nam is ad ignem de more excoctus, & in viro, & in muliere, poſt ſumptam ſcobem ferream, profecto plures ferreas primi generis atomos, quam ante, nobis obtulit: alter vero ægrotus croco curatus, licet ſanguinis calcem habuerit ferro refertiorem, quam antea, habuit tamen copia paulo minore: adhuc longe minore habuit eius mulie-

mulieris ſanguis, cui ferri ſpuma medebamur. Eſt etiam animadverſione dignum, quod tam in humano, quam in aliorum animantium ſanguine ſolet deprehendi, videlicet quo plures inſunt in eo metalli particulæ, eiuſque uſus fuit diuturnior, plerumque colorem præſeferre intenſius rubicundum, ac ferme coccineum, & ſerum in ipſo ad reliquas partes maiorem habere proportionem.

Ab hominibus ad bruta tranſeuntes, in horum hiſtoria erimus paulo prolixiores: nam quod in hominibus non licuit, datum eſt pluribus, ac diverſis modis periclitari in canibus, quorum circiter decem, & octo ferreo hoc regimine, ea, quam ſupra innui, diligentia, & diuturnitate tractavimus. Omnium ſanguis poſt illud regimen, quamquam non ſemper æque dives ferro apparuerit, ſemper tamen aliquantiſper ditior fuit, quam ante.

Ex his vero ſex præſertim memoria digni viſi ſunt. Horum bini, ambo venatici, veſci coacti ſunt cibo plurima ſcobe ferri imbuto per ſetaceum traiecta: bini non venatici minera cruda; quintus croco; ſextus demum ſcobe eadem porphyrite lævigata. Primis diebus alii alimentum huiuſmodi faſtidiebant: vomebant alii, alii latratibus, anxietate, gemitibus, interiorem corporis perturbationem manifeſtabant, minus tamen ii, qui minera veſcebantur. Deſierunt autem abhorrere ab huiuſmodi alimentis circa quintam diem, ſcilicet oborta fame, & nigris apparentibus alvinis fœcibus: progrediente vero curatione, ſenſim cibum, a quo abhorruerant, cœperunt avide ingurgitare, tum fieri alacriores, ad motum promptiores, robuſti magis, ac carceris impatientes: quin tractu temporis omnium pulſus frequentior, quam ante, obſervatus eſt, & quidem priores duo venatici, qui ſcobe rudi utebantur, quive & oculis ſanguineis, & truci aſpectu, & ſiti, & voracitate, & inquietudine ceteris præcellebant, pulſum habuerunt minuti intervallo ſexdecim fere ictibus celeriorem. In quatuor reliquis canibus pulſus frequentia ad tale incrementum non pervenit. Porro cum abſoluta iam ferrea diœta omnium, quotquot alebamus, canum pondus ad ſtateram metiri conſueverimus, repertum eſt in ſingulis librarum aliquot incrementum, præcipueque in iis, qui mineram accipiebant, dempto ex prædictis ſex illo, cui crocus datus eſt;

huic

huic enim contra, pondus una, vel altera libra imminutum eſt: fortaſſe quia circa diœtæ medium fœdis puſtulis in dorſo cœpit ægrotare. Similiter omnium octodecim ſanguis, uti initio indicavi, peracta iam diœta, paulo plus, quam ea nondum incœpta, ferro ſcatens obſervatus eſt: omnium autem minime eorum ſanguis, in quibus ſcobs rudis, & crocus adhibitus eſt; paulo magis, in quibus ſcobs læviga. ta; adhuc magis, in quibus minera.

Iam experimenta in gallinaceo genere ſuſcepta per ſumma capita recitabo. Ex his avibus ſex aluimus ſcobe ſimpliciſſima, ſex eadem ſcobe, ſed lævigata, ſex minera, duas ſpuma, itemque duas tinctura. Commiſcebantur martialia hæc medicamenta cum pulticula ex tritici flore, & iuſculo confecta, quam etſi primis diebus reſpuiſſent, tamen compellente fame, eidem ſenſim & ipſæ aſſueverunt. Poſt aliquot dies nigerrimas fœces egerere, avidius cibum roſtro arripere, argutule vociferare, inter cavearum anguſtias, quibus includebantur, impatientes moveri, appropinquante vero ferreæ diœtæ fine, rubicundiores in illis fieri cryſtu. las, oculoſque deprehendimus; præſertim in illis, quæ ſcobem ſimplicem comedebant, quarum tres ſitiebant ma. gis, magis loci anguſtiam faſtidiebant, eſcam demum por. rigentibus, erectis præter modum, & vivacibus cryſtulis iraſcebantur: ex reliquis tribus una quædam, incœpta vix diœta, ægrotare viſa eſt. Nam & alvinæ deiectiones defe. cerunt, & intumuit inſigniter ingluvies: hinc ſitis ingens, hinc cryſtarum pallor, in motu ſegnities, in cibo faſtidium. Huic tamen auxilio fuit rhabarbarum pulticulæ martiali additum, quo medicamento cum recreari paululum avem, ſubducta alvo, & detumeſcente ingluvie, cognoſcerem, eodem per univerſum curationis tempus uſus ſum. Quibus ſic procedentibus, earum corpora ad ſtateram exacta ſunt; conſtititque in aliquibus duarum, in aliis trium unciarum, quin etiam quatuor in una, vel altera mineram aſſumente, factum fuiſſe ponderis augmentum. Quid tandem harum avium ſanguis poſt talem eſcam oſtenderit, res tota ita fer. me ceſſit, ut in canino ſanguine ſupra indicatum eſt. Fer. reæ particulæ copioſiores ad cultrum magneticum accurre. bant in his, quæ ſcobem porphyrite tritam voraverant, in his vero adhuc multo plures, quæ mineram; porro in his,

quæ

quæ crocum, aut ſcobem rudem acceperant, pauciores; pauciſſimæ in his, quæ ſpumam, & tincturam; vix aliquas vero in ea ave deprehendimus, cuius ægritudini rhabarbaro occurſum erat.

Cum hactenus recenſita experimenta in triplici animantium genere, videlicet in hominibus, in canibus, in pullis habita, multiplici conſenſione declarent, ex ſex iam dictis ferreis præparationibus, duas præ reliquis, ſcobem nempe lævigatam, & multo etiam magis mineram, huius metalli copiam ſanguini impertiri, operæ pretium viſum eſt in hanc rem penitius inquirere, eamque tum in aliis etiam canibus, tum in ſuibus iterum periclitari. Itaque quatuor adhuc canes eidem experimento ſubiecimus; duos nimirum ſcobe lævigata, duos contra minera nutrivimus: nutrivimus præterea duos porcos, alterum minera, alterum eadem ſcobe. In omnibus ferri doſis fuit unciæ unius; tempus dierum quadraginta: qui minera paſcebantur, ſive ſues, ſive canes, nullam ægritudinis notam præbuerunt, quin in dies fiebant promptiores ad cibum, & obæſiores. At qui ſcobem edebant, tum ſues, tum canes, quamquam non ſecus ac quibus minera dabatur, admodum eſſent voraces, vegeti, & obæſi, tamen & diœtæ initio, & verſus finem modo vomendi conatibus, modo vomitu ipſo tenebantur: habuerunt etiam id peculiare, ut oculis valde ruberent. Ceterum neque in his, neque in illis unquam fuit alvus adſtricta: fœces quippe copioſiſſimæ egerebantur quotidie, & nigerrimæ. Videbatur autem e re noſtra maxime futurum, ſi ex comparatione ſanguinis naturalis cum eo, in quem ſcobs, aut minera eſſet ingreſſa, perſpectum haberemus, quanta facta eſſet additio ferri. Quam obſervationem ſic ſumus aggreſſi.

Tam ex uno cane, quam ex ſue, in quorum utroque minera ſtatuto tempore adhibita fuerat, ſectis in iugulo ſanguiferis vaſis extraximus pares cruoris portiones, & ex harum portionum unaquaque, detracto omni ſero, libram unam ſepoſuimus. Idem penitus peractum eſt in alio ſue, & in alio cane, quorum uterque tenuiſſimam ſcobem ſumpſerat: denique idem iterum fecimus in tertio ſue, itemque in tertio cane, quorum neuter ulla ferrea ſubſtantia uſus fuerat. Sex haſce ſanguinis libras, ſeorſim in totidem

ſictilibus iam ſepoſitas, ad eumdem ignis gradum, & per idem tempus admovimus, ut exſiccarentur. Libra porcini, itemque libra canini ſanguinis minera imbuti, ad idem ferme pondus, ideſt ad drackmas octo utraque exſiccando decrevit: altera libra porcini, & canini ſanguinis ſcobem continentis, utraque licet eodem igne, eodemque tempore exſiccationem paſſa, tamen nonniſi drackmas circiter quatuor cum dimidio reliquit. Tertia demum libra porcini, & canini ſanguinis nullo ferro paſti, utraque ad drackmas tres eſt imminuta.

Iam pulveres hoſce tres, primum, ſecundum, & tertium, quorum unuſquiſque duo ſanguinis genera ſeparatim habebat, ideſt porcinum, & caninum, vehementiori igni commiſimus, uſque dum pariter incandeſcerent, & in calcem converterentur: ad nos quippe maxime pertinebat de ferro latente intimius cognoſcere.

Igitur calces haſce omnes prius multa aqua perfuſas, ut ab extraneis partibus expurgarentur, iterum ſiccavimus. Ex novo hoc proceſſu facta eſt ſingularum proportionata ponderis iactura. Nam primus pulvis, cuius pars una porcini, altera canini ſanguinis unciam ſeparatim continebat, repertus eſt in utraque parte ſcrupulorum decem cum dimidio: ſecundus in utraque paulo plus quam ſcrupulorum quatuor: tertius denique in utraque ſcrupulorum duorum cum dimidio.

Promota iam analyſi ad hunc terminum, non potui me continere, quin confeſtim experirer cum Lellio, quæ eſſet in dictis tribus calcis generibus ferri proportio. Primi generis calx, quæ mineræ ferreæ ſubſtantiam ſecum gerebat, tam in ſuilla, quam in canina portione, uberiorem ferri copiam ſuppeditavit; non adeo uberem calx ſecundi generis, in qua inerat ſcobs lævigata; minus adhuc uberem calx tertii generis, quam nulla ferrea præparatio infecerat; adeo ut hoc ipſum examen nobis adhuc plenius ſuaſerit, ferri mineram præ ceteris martialibus ſubſtantiis abundantius in ſanguinem transferri.

Verum ut proximius optatum finem aſſequeremur, & quidquid ferreas particulas in calcibus abſconditas adhuc obvolvebat, penitus removeretur, iterum calces vehementiſſimo fuſionis igni obiecimus. Dum igne torquebantur

prio-

priores duæ mineram abſcondentes, ebullire vehementius, quam reliquæ omnes, & flammam præ omnibus reliquis intenſe cæruleam emittere viſæ ſunt. Ex quo iam apparet id eſſe peculiare martiali mineræ, ut ſecum in ſanguinem vehat non modicam vim ſulphurearum particularum. Abſoluta iam fuſione, calces ſingulas in marmoream tabulam effudimus. Priores duas, ſingulas grana octoginta ſex circiter invenimus pependiſſe: ſecundas, grana quadraginta duo: tertias demum, paulo plus, quam triginta.

Fuit autem nobis prorſus iucundum invenire in prioribus metallicos globulos magnitudine milii ſeminibus aliquantulum maiores; ubi autem magnetem adhibuimus, tum hi, tum reliqua materies omnino, uti particulæ primi generis, demptis paucioribus ſecundi generis, ipſum promptiſſime ſecuti ſunt. Inerant ergo tum in ſuillo, tum in canino ſanguine minera nutrito, metalli huius grana octoginta ſex: quantum ad ſuillum, & caninum ſcobe tenuiſſima nutritum, in hoc pariter quidquid ex fuſione reſiduum fuit, totum ferreum partim primi, partim ſecundi generis comparuit, ſed ferreos illos globulos nullos confecerat, & iam, ut audiviſtis, erat granorum tantummodo quadraginta duorum, nempe dimidium præcedentis. Denique ſuillus, & caninus, quos ambos a ferri eſu prohibueramus, utriuſque generis moleculas continebat, ſed, uti iam dictum eſt, vix paulo plus, quam trientem eius ponderis æquabat, quod in primo illo ſanguine repertum eſt.

Ad analyſis noſtræ complementum, libuit præterea experiri, an acidorum liquorum miſcela, repertarum martialium particularum convenientiam aliquam cum ferreis ſubſtantiis a nobis exhibitis, luculentius manifeſtaret.

Igitur in æquas portiones calcium ſex, poſtremo loco dictarum, quas vitreis vaſis exceperamus, infudimus guttulas numero pares aquæ fortis. Eventus autem fuit omnino diverſus in omnibus.

Primæ duæ calces, in quibus latebat minera, ab affuſo acido odorem emiſerunt nonnihil moleſtum, & mediocri ebullitione commotæ ſunt. Qui odor, & ebullitio paulo ſenſibiliores ſunt, quam ubi fit eadem aquæ fortis inſtillatio in mineram nativam.

Calces duæ ſecundæ limato ferro, ſubtiliterque trito

ſcatentes, longe graviorem odorem cum ſibilo, & diuturniori effervefcentia emiſerunt; qui effectus, illos ferme æmulatur, qui acidorum ſpirituum affuſionem in ferrum limatum conſequuntur.

Ex ultimis duabus, cum nullum adventitium ferrum abſconderent, vix aliquis odor excitatus eſt, & nulla vera ebullitio; utique vero vapor quidam tenuiſſimus ad inſtar fumi, illum prorſus æmulantis, qui ab acidorum congreſſu cum minera ignem nondum paſſa, ſolet emanare: quod ideo monendum duxi, quia id confirmare videtur, ferrum illud, quod ex naturæ inſtituto ineſt in ſanguineis globulis, ſimillimum eſſe ipſi mineræ.

Sed iam ab obſervationibus expediti, quæ ad chymicum examen ſpectant, ſermonem noſtrum ad alias, quæ anatomici iuris ſunt, convertamus. Contraham vero in unam veluti ſummam quidquid in canibus, in ſuibus, in pullis anatomica inſpectio oſtendit, ne ſcilicet prolixa tot anatomicarum ſectionum hiſtoria, veſtra, viri doctiſſimi, abutar humanitate. Scire autem in primis convenit, id a nobis ſemper fuiſſe ſervatum, ut qua die alicuius animantis ſectio erat inſtituenda, ferrum affatim, & per intervalla eidem exhiberetur, eo nempe conſilio, ut quacumque hora libuiſſet in lacteorum vaſorum ſtatum inquirere, poſſet promptius, ſi qua exiſteret ferrea materies, ſe ſe manifeſtare. Id etiam ſervatum eſt ſemper, ut ſingula animantia eodem mortis genere necarentur, nimirum diſſectis omnium iugularibus venis, & carotidibus; hoc enim pacto præſto erat nobis ea ſanguinis copia, qua ad chymicum examen inſtituendum indigebamus: id demum cautum eſt, ne animalia hæc diu poſt mortem, quin immo viventia, & effluente adhuc ex reciſis venis ſanguine, cultro anatomico ſubiicerentur.

Aptatis ergo, ut mos eſt, ſupra tabulam iis animantibus, quorum chyli ductus luſtrare volebamus, protinus aperto imo ventre, quotquot aderant obſervatorum oculi, ad meſenterium, & circumpoſita viſcera intendebantur.

Chyliferorum facies in unoquoque ſubiecto fuit prorſus eadem: nam in canibus, porciſque fuit ſemper conſpicuus, atque pulcherrimus eorum ductuum reptatus: erant quippe omnes candidiſſimo liquore adeo turgidi, ut is,

pre-

premente digito, in ſuo itinere manifeſte poſſet promoveri.

Quantum ad aves, quarum lactea anatomicis nondum ſunt perſpecta, in his nulla chyli veſtigia, ſed ſola vaſa ſanguifera paulo patentiora, & turgidula comparuerunt.

Ex quarum obſervationum conſenſione, cum nullibi, neque in quadrupedibus, neque in avibus, latentis ferri colorem deprehenderemus, prope fuit, ut animum deſponderemus de videndo ferri traiectu ab inteſtinis in ſanguinem. Verum ſpem noſtram mirifice erexit eorum animalium obſervatio, præcipue vero avium, quas minera nutrivimus. Harum ſex quæſitum a nobis ferri iter in ſanguinem conſtanter indicaverunt.

Erat enim in his meſeraicarum venarum reptatus omnino notabilis propter ferrugineum colorem, quo earum ſurculi ab invicem diſtinguebantur, præſertim in eo loco, ubi vaſa hæc, a tubo inteſtinali ad meſenterium diſtribuuntur.

Materia, quæ dictum colorem hiſce vaſis impertiebatur, uberior erat in maioribus truncis, & adhibito tum a me, tum a laudatis ſupra viris microſcopio, opportune a ſolertiſſimo Lellio parato, conſpeximus ferruginoſam illam materiem pluribus in locis hærentem, & minutiſſimis micantem atomis, non ſecus ac eveniat mineræ ipſi. Non præteribo rem, quæ mihi haud prorſus contemnenda viſa eſt: ſcilicet vaſa hæc, hoc modo a ferrea ſubſtantia colorata, eo ſemper in loco apparuiſſe, in quo eadem oriri videbantur ab iis inteſtinis, quæ adhuc contento intus chylo diſtenta erant: in iis vero, quæ iam fuerant eodem depleta, nullus erat huiuſmodi color in dicto confinio; utique vero paulo remotius ab ipſo: ideſt verſus meſenterii centrum, ubi corpuſcula ferruginea ſecundum vaſorum directionem diſpoſita intuebamur. Quæ res facit, ut pariſienſium obſervationibus, Bruneri etiam, & Peyeri libentius aſſentiamur: nam hi duo poſteriores in anſere, & gallina, primi vero, ideſt pariſienſes, in ciconia ex iniectis in vaſa meſeraica liquoribus, certiores facti ſunt, chylum ab inteſtinis, non in vaſa chylifera, quæ nulla ſunt, ſed in meſeraicas venas immediate transferri: itaque quod his auctoribus iniectionum ſuarum præſidio, nobis nullo artificio,

ſed

ſed ſola conſuetudinis naturæ inſpectione, contigit invenire.

Eſt aliud quoque diſcrimen inter eorum animantium viſcera, quæ minera, ac quæ reliquis quinque ferreis præparationibus alebantur.

Ab uſu ſiquidem ſcobis rudioris plerumque, tum in canibus, tum in pullis, mirum in modum turgent vaſa ſanguinea, tenuium præſertim inteſtinorum, quin etiam ſubſtantia ipſa eiuſdem tubi ſubinde coccineo colore infecta, atque inflammationi proxima deprehenditur: turgent etiam vaſa minima, quæ per cerebri membranas vagantur. Quod magis declarat vim ſtimuli, & contractionis ab hoc medicamento in minimis vaſculis excitatæ, præſertim cum debuiſſent poſt mortem vaſa eadem detumeſcere, exhauſto nimirum ſanguine ob præviam iugularium vaſorum diſſectionem. Ceterum in aliis dictorum animantium viſceribus, aut liquoribus nullum offendi ſolet vitium; hoc uno dempto, quod bilis colorem præſefert nonnihil dilutiorem, itemque fluidiorem conſiſtentiam: fatendum tamen eſt hanc bilis mutationem non iis ſolum viventibus accidere, quibus ſcobs ſimplex, ſed aliis etiam, quibus ſive minera, ſive ſcobs lævigata, aut alia quævis ex recenſitis martialibus præparationibus data eſt. Videntur enim omnia huiuſce generis medicamenta bilem fere ſemper reddere dilutiorem.

Quantum ad alium effectum, ideſt ad vaſorum capitalium, & meſeraicorum turgentiam, hæc longe minor eſt ab aliarum præparationum, quam a rudioris ſcobis uſu: a minera autem nullam prorſus effici perpetuo obſervavimus: tamen non reticebo hiſtoriam ſuis, cui non ad diem tantum quadrageſimum, uti in ceteris præſtitum eſt, ſed uſque ad centeſimum, unciam mineræ alimentis mixtam obtulimus; eo nempe conſilio, ut nobis innoteſceret, an ultra illud tempus liceret mineram ſine aſſumentis noxa uſurpare. Hic fuit toto hoc temporis intervallo, de more reliquorum ſui generis animantium edaciſſimus; auctus eſt mole ultra ceteros: erat vegetus, & in motu expeditiſſimus, ut omnium ſaniſſimus nobis videretur. In hoc, diſſecto tum medio, tum infimo ventre, non levis ſe ſe obtulit in muſculorum fere omnium interſtitiis, aquarum colluvies; ſcilicet cum pæritoneum, & muſculi circa hanc membranam circumpoſiti,

ſiti, eſſent fere omnes ædematoſi, inter diſſecandum aqua undequaque ſtillabant: dixiſſes, hoc animal, dum viveret, anaſarca laboraſſe: ſanguis erat dilutus, & in vas receptus poſt aliquot horas copioſum, & flavum ſerum a ſe dimiſit: vaſa meſeraica, & inteſtinorum erant turgida, ſed non inflammata. Obſervatio hæc, ſi cum iis præſertim iungatur, quæ de bile in animalibus ferro paſtis præ ſolito dilutiore, ſeroque ſanguineo maiorem cum aliis partibus proportionem habente, ſupra indicavimus, haud multum conſentit cum quorumdam virorum experimentis, ex quibus colligunt martialia, nulla vi fundente, aut colliquante, utique vero adſtringente, prædita eſſe.

Hæc igitur ea ſunt, quæ noſtrarum obſervationum ſeries nos docuit de ingreſſu in ſanguinem, ſive mineræ, ſive aliarum ferri præparationum, deque effectibus ceteris earumdem.

Videtur enim in aperto poſitum eſſe, ferrum ſicuti a medicis ſolet uſurpari, ab officina chyli (ſecus ac plures antea exiſtimaverint) in ſanguinem migrare: forte enim huius ſententiæ auctores ducuntur a communiſſima illa obſervatione, qua conſtat, ab aſſumpto ferro, fœces atro colore infectas prodire, & eo colore non apparente, plura gigni ægritudinum genera.

Videntur præterea hæc noſtra experimenta probare, mineram melius, & uberius præ ceteris ferri præparationibus ſe ſe in ſanguinem immittere, eiuſque immiſſionem, neque vaſorum plenitudinem, neque ſymptomata ulla noxia inducere; nam etſi quis fortaſſe ſuſpicetur, porcum illum per centum dies minera nutritum, de quo poſtremo loco dictum eſt, ab hac mineræ adminiſtratione læſum fuiſſe, tamen, ut opinor, hinc colligere nequaquam poterit, hanc martialis medicamenti ſpeciem, eſſe, natura ſua, viventibus infenſam, ſed utique exiſtimabit, nimietati potius, ac prædiuturno eius uſui, morbum, ſi modo erat, in eo animali obſervatum, fore tribuendum.

Id quoque docemur, ſcobem lævigatam non ita copioſe admitti in ſanguinem; parum refert, vaſa ſanguifera poſt eius uſum, plenitudinem aliquam accuſare: reliquas etiam præparationes parcius ad ſanguinem pervenire, quamquam hunc paulo magis turgere faciant. Inter has crocus mini-

mum

mum præ ceteris commercium cum ſanguine habere videtur; quamobrem iure doctiſſimus Lemeryus in commentariis ſcientiarum regiæ academiæ, improbat cuiuſvis croci ferrei in medicina facienda uſum, his fere verbis: *Qualibet croci præparatio omnem ſulphuream materiam a ferro abigit, & diſperdit, adeo ut a nullo liquore acido ſubigatur; hinc in ſtomachum admiſſus cum nequeat ab exiſtentibus in eo ſuccis diſſolvi, ad ſanguinem non tranſmittitur.* Quod Lemeryanum monitum aliqua ratione obſervationibus hiſce noſtris tum in canibus, tum in pullis, tum in hominibus habitis confirmatur.

Quod ſi ergo tutiſſimam ferri ſubſtantiam ſeligere ad uſum medicum debeamus, profecto nulla videtur mineræ nativæ anteferenda: ego quidem in hiſce experimentis ſemper illam uſurpavi, quæ ab ilva inſula ad nos fertur, & quæ ferro dives, ac ceterarum omnium, quæ in italia ſunt, puriſſima exiſtimatur: quam nullus dubito, quin adhuc præſtantiorem, ac arti medicæ opportuniorem ſit redditurus, qui eam ſimplicis aquæ affuſione, & ſolerti, & longa lævigatione præparaverit: hæc enim & innocua eſt, & liberius in ſanguinem vehitur, & eſt maxime homogenea nativo illi ferro, quod in huius globulis a natura inſitum fuit.

Hinc veritati conſentaneum eſſe deprehenditur, quod, in ea diſſertatione, quam conſcripſit Sydenhamius ad Guilielmum Cole, de anonymo quodam auctore ita legitur: *Mineram ipſam, prout a terræ viſceribus effoditur, crudam, efficacius in ſubiugandis morbis operari, quam ferrum ignem paſſum, & fuſione depuratum.*

Verum de his interim haud plura.

EUSTACHII ZANOTTI

De quibuſdam luminibus ſeptemtrionalibus anno MDCCXXX *menſe martii obſervatis.*

DIe 11 martii hora 9 defecto penitus veſpertino lumine borealem auroram deprehendimus in ſeptemtrionali cardine, quæ ad quinque, aut ſex gradus altitudinis extendebatur, & ad tres, aut quatuor gradus iuxta circulum horizonti parallelum. Circumquaque ſpiſſa nebula horizontem occupabat, quæ fortaſſe in cauſa erat, cur phænomenon tenuiſſimum lumen tranſmitteret: elapſis minutis decem nullum amplius phænomeni veſtigium apparebat, vel quod revera extinctum eſſet, vel quod in vaporibus deliteſceret. Poſt aliqua minuta ad priſtinam lucem reverſum eſt, in eoque ſtatu ſex minuta perduravit. Tandem hora 9. 36 cum vapores denſiores fierent, prorſus evanuit. Cælum undique nubibus obtenebratum eſt, & fulgura ad meridiem ſub ſtellis navis argu obſervata ſunt.

Die 13 martii hora 7 inter orientem, & ſeptemtrionem in azimutali circulo quadraginta gradus a cardine ſeptemtrionali diſſito lumen ſe ſe nobis obtulit. Altitudo erat octo ferme graduum, latitudo vero multo minor. Decem & ſeptem minutis vertentibus, etſi phænomeni extenſio eadem manſerit, lumen adeo crevit, ut eas flammas æmularetur, quas ab agricolis ad conſumendas ſtipulas & ſtramenta excitatas e longinquo ſpectare ſolemus, in eoque ſtatu quadraginta quinque minuta perduravit. Poſtea vero cum phænomenon ſe ſe dilataverit, tractus quidam niger horizontalis ſe prodidit, qui totum lumen in duas partes diſcriminabat; maculæ præterea apparuerunt nigræ, & obſcuræ, quarum nonnullæ ita illi tractui adhærebant, ut eius figuram omnino irregularem redderent. Hora 7. 45 lumen coarctari

 cœpit,

cœpit, & maculæ, & tractus niger diſparuerunt, ac demum brevi temporis ſpatio ita coarctatum eſt, ut ſimilitudinem lunæ haberet, cum in horizonte exiſtit. Hora decima prorſus evanuit, cum plures antea viciſſitudines habuerit; etenim modo tamquam cometæ cauda horizonti adiacens viſebatur, modo tamquam globus igneus; quandoque autem nihil aliud dignoſcebatur præter lumen tenuiſſimum.

Die 18 hora 7 prope cardinem ſeptemtrionalem boreale lumen effulſit, quod ab ipſo cardine declinabat ad orientem gradus fere ſex; altitudo erat quatuor graduum, latitudo ſex. Interea dum lumen magis, magiſque exardeſcere videbatur, tractus quidam niger latitudine æquans dimidium gradum in medio ſe ſe protulit, qui phœnomenon in duas æquales partes horizontaliter dividebat; deinceps lumine paulatim deficiente prope horam 8 vix ullum eius veſtigium apparebat. Interea nihil notatum eſt animadverſione dignum. Hora 8. 18 lumen reviviſcere viſum eſt, & tunc horizonti tractus lucidus inhærebat, qui ab alio tractu nigro in duas partes dividebatur. Cum hæc apparuiſſent, ſtatim auroræ finis fuit.

Dies 21 martii auroram habuit omnium, quas hactenus retulimus, ſplendidiſſimam. Hora *6* ea cæli plaga, quæ a ſeptemtrione ad orientem vergit octo gradus, tenui quadam albicante luce diſtincta erat, quæ ingruente nocte magis, magiſque vigebat. Elapſis minutis circiter 20 rubeum, & flagrantem ignem æmulabatur, tantumque lumen undequaque diffundebat, quantum ſatis eſſet, ut obiecta circumpoſita luceſcerent, quæ per eam noctis caliginem cerni non potuiſſent. Id viſum eſt & Franciſco Vandellio, & Ioſepho Roverſcio, quos obſervationis ſocios habuimus. Dum tantæ lucis erat phænomenon, globus igneus horizonti adhærens in medio enituit adeo ſplendidus, ut ſolus ſpectantium oculos ad ſe converteret; atque ut ea referam, quæ ad oculi iudicium pertinent, nihil enim de re ipſa affirmare auſim, videbatur reliquum phænomeni lumen ab eo globo dumtaxat profluere, & in capillicii formam circa illum accommodari. Quod quidem diverſis modis accidere potuiſſet, vel ſi globus inter craſſiores vapores conſtitiſſet; hos enim irradians eam ſibi lucis coronam comparaſſet, non ſecus ac videmus flammas ſpiſſa nebula circumfuſas lucida

qua-

quadam atmoſphera, & eo ſane vividiori, quo nebula denſior eſt, ambiri; vel ſi globus longius abfuiſſet, & radios luminis per vapores tranſmittens lucem eis attuliſſet, quemadmodum evenire putamus, ſi coronæ, & halones circa lunam efformantur, dum cælum tenui quadam nebula obducitur. Hæc, cum ita apparuerint, opinioni illorum favere videntur, qui putant in hiſce phænomenis principium quoddam inſidere, a quo tota lux propagatur, atque diffunditur; cui opinioni hac ſuadente aurora aſſentirer, ſi quod uni phænomeno explicando accommodatur, idem liceret transferre ad omnia. Permanente adhuc globo, & luce circumambiente, cuius diameter erat quatuor graduum, nubecula ſupereminens ſe protulit, quæ inferius colore rubeo, & vivido ſic clarebat, ut videretur & ipſa a globo lumen mutuari. In hoc ſtatu aurora borealis horam integram perduravit, qua elapſa formam omnino mutavit, & nubem, & globum amiſimus. Hora 7. 39 ad altitudinem duodecim graduum extendebatur, & a duobus tractibus nigris horizontalibus diſiungebatur, quorum alter, qui horizonti propior erat, latitudinem unius gradus habebat, ſuperior vero quadruplo maior erat. Hora 7. 43 lumen cogi, & evaneſcere cœpit. Hora 8 ne ullum quidem luminis veſtigium apparebat. Hæc aurora ultima fuit ex iis, quæ menſe martio apparuerunt: quis ſcit an aliæ multæ extiterint, quæ propter temporum inconſtantiam, & frequentes nubes obſervari nequiverint?

Hactenus auroras deſcripſimus; nunc ea breviter commonebimus, quæ ſingulis communia deprehendimus; non ut quidquam ſtatuamus, quod auroris omnibus conveniat, ſed potius ut oſtendamus maximam inter eas, quæ hac tempeſtate apparuerunt, ſimilitudinem fuiſſe, quæ ſane tanta fuit, ut videatur una, eademque aurora per totum illud tempus permanſiſſe, & per vices tantum prodiiſſe. Quod ad colorem attinet, is ad rubrum vergebat in omnibus, quamquam modo intenſior erat, modo dilutior. Singulæ auroræ tractibus nigris fuerunt diſtinctæ, qui tunc ſolum exoriri videbantur, cum aliqua phænomeno occurreret viciſſitudo, per quam vel extenſio mutaretur, vel lumen. Columnæ, ſeu trabes, quos huiuſmodi phænomenis ſæpe adiunctos obſervamus, nulli umquam apparuerunt. Præte-

rea notari volo, nos in deſcribendis auroris tunc ſolum de nebulis, & nubibus admonuiſſe, cum illæ boreali lumini adhærebant, & ad illud quodammodo pertinebant; verum enim vero nubes cunctis noctibus extiterunt, atque eæ præſertim, quæ ad inſtar virgarum horizontalium permanentes, ac immobiles conſpiciuntur. Demum ſingulæ horizonte terminabantur, neque unquam ſitu dimovebantur, eumdemque cæli quadrantem obtinuerunt, qui inter ſeptemtrionalem cardinem, & orientalem extenditur.

IOSEPHI VERATTI

De aurora boreali anni MDCCXXXII.

PRoximo anno milleſimo ſeptingenteſimo trigeſimo ſecundo ſeptembri menſe phænomenon quodpiam in cælo mihi obſervare contigit, quod ad luces boreales referendum eſſe cognovi, quodve iam tum vobiſcum, ſi per vos tamen liceret, communicare decrevi.

Dies erat eius menſis decima octava, hora vero ferme ſecunda veſpertina, cum in ea parte horizontis, quæ inter ſeptemtrionem, & occidentem ſolem eſt, lux quædam apparuit, initio quidem ad parvam altitudinem trium, vel quatuor graduum elevata. Atque hæc minima inter altitudines, quas porro ſæpe mutavit, æſtimata eſt. Arcus in modum curvata erat, cuius arcus crura ſeptem graduum ſpatium in horizonte comprehendebant, propterea quod a ſeptemtrione gradus quadraginta quinque, ab occidente triginta & octo diſtare compertum eſt. Color huius lucis crepuſculi colorem æmulabatur, candidus vero, & mirum in modum nitens. Nullus præceſſerat in horizonte vapor, qui huius eſſet ſimilis.

Inconſtans erat eiuſmodi ſplendor, modo enim evaneſcebat, modo apparebat iterum, aſſurgens videlicet alterne, quo tempore extendebatur etiam in latum, alterne ſe contrahens ſecundum omnes dimenſiones. Si quid viſui tribui poterat, apparebat in modum rei, quæ modo ſupra horizontem emergeret, modo infra ipſum ſubſideret. Octo immerſiones, totidemque emerſiones intra viginti minutorum tempus obſervare potui. Quemadmodum & hoc notare licuit neque in omnibus emerſionibus æqualem fuiſſe phænomeni altitudinem, & latitudinem, neque æqualem durationem; coloris tamen, & claritatis æqualem fuiſſe modum.

Poſt octavam immerſionem, quam modo memoravimus, nova emerſio ſucceſſit, in qua claritas illa multo maiorem

iorem altitudinem, amplitudinemque obtinuit, quam antea eſſet aſſecuta. Altitudo enim ſex gradus æquabat, baſis vero patebat quindecim, atque hic animadverſum eſt latitudinis huius partem magis ad ſeptemtrionem, quam ad occidentem procurriſſe, ut propterea a boreali polo quadraginta quinque, ab occaſu ſolum triginta diſtaverit; minuſque curvata, & magis a circulari forma deflectens effecta fuerit phænomeni figura. Poſt nonam iſtam emerſionem, eique ſuccedentem depreſſionem, quæ deinceps ſecutæ ſunt, minores uſque, & uſque dimenſiones lumini attulerunt, quod ita paulatim diminutum eſt, ut quaſi extinctum videretur.

Cum igitur leve tantum ſuperſtes eſſet eius veſtigium, ecce ad diſtantiam quatuordecim graduum a ſeptemtrione novus fulgor exoritur, cuius baſis decem graduum erat, altera proinde ſui extremitate ab occidente gradus ſexaginta ſex diſtans. Altitudo autem ipſius varia fuit, alterne enim & ipſe aſſurgens, ac ſubſidens non eoſdem ſemper limites attingebat. Summa inter haſce altitudines triginta graduum fuit, minima non infra octo. Figura eius ſemper fuit acuminata, & quaſi ad perpendiculum erecta. Quamquam apex modo obtuſior, modo acutior erat, neque enim aliter fieri neceſſe erat, quod eadem ſemper manebat baſis. Scire autem licet paulo poſt exortum novæ huius lucis primam illam, quam fere extingui viſam fuiſſe diximus, micaſſe denuo, atque cum hac nova corruſcationes ſuas alternaſſe, huic tamen poſteriori fulgore imparem, magnitudine, & diuturnitate; non enim multo poſt evaneſcere viſa eſt. Sic quoque ſecunda hæc lux, poſtquam quindecim fere minuta fulgorem ſuum integrum ſervaſſet, langueſcere ſenſim cœpit, & quinque aliorum minutorum ſpatio extincta eſt.

Et iam rediiſſe cælum ad conſuetam ſuam faciem videbatur, cum a ſecundæ illius lucis extinctione, exactis fere minutis quindecim, repente non procul ab occidentali cardine nova lux effulſit, irregularis omnino figuræ, quam tamen ad quadrilateram propius accedere dixiſſem, ſi angulos exactius formatos, & latera minus intorta habuiſſet. Hanc neque ſplendore, neque colore ab iis, quæ deſcriptæ ſunt, diferre vidimus, ſiquidem ad horizontem cælum albeſce-

beſcebat magno cum nitore. Baſis eius ſeptemdecim graduum erat, altitudo novem, diſtantia ab occidente graduum octo; alterius autem extremi a ſeptemtrione ſexaginta quinque.

Extemplo autem nitidiſſimus ille albor in flammeum ruborem converſus eſt. Ac fere ſtatim ab extremo ſeptemtrionali phænomeni columna aſcendit, & ipſa flammea. Huic ad verticem quaſi adnaſci viſæ ſunt duæ aliæ flammæ, altera ad ſeptemtrionem, altera ad occidentem deflectens. Ambæ fumum quemdam exhalare videbantur rarum, ſubalbidum, atque verſus ſeptemtrionem ſe diffundentem, fortaſſe quod ventus, qui per id tempus flabat, ex auſtro ipſum in oppoſitam plagam ferret. Illud vero admirationem faciebat, quod magna ſcintillarum copia ab huiuſmodi flammis eructabatur, quæ in altum evectæ, & verſus ſeptemtrionem diſperſæ tandem evaneſcebant. Fulgor tantus erat, ut facile ædificia etiam procul diſſita diſcernerentur, ſed tribus vix elapſis minutis columna paulatim decreſcens fere momento extincta eſt, nihilque aliud remanſit quam nitor ille flammeus, quem antea conſtitiſſe diximus.

Verum dum oculos in illum nitorem defixos habeo, altera columna colore igneo ad occidentale eius extremum ſimiliter prorupit, copiam fumi, nubium inſtar, & ipſa eructans; qui ſimiliter interrupto itinere in ſeptemtrionem contendebat; reliquorum vaporum more attenuabatur ſic, ut ſydera neſcio quæ ad occaſum properantia conſpici potuerint. Dum hæc mirabar, ex inſperato novum ſpectaculum ſe mihi exhibuit.

E media enim baſi phænomeni igneum quoddam corpus ovalis figuræ apparuit ſolis ad occaſum vergentis diametrum æquans. Fulgore erat, quem pulvis pyrius accenſus exhibet; nullus tamen vapor, nullus fumus attollebatur; ſcintillæ tantum earum inſtar, quas pyrius pulvis ſolet emittere, magno impetu proſiliebant; ſed breviſſimum fuit durationis tempus, vix enim integrum minutum æquavit. Tum vero meteori color igneus in flavo album, ſed coruſcantem converſus eſt, qui & ipſe ſenſim palleſcens ſub horizontem deprimi, & contrahi viſus eſt, donec eo extincto nullum amplius fulgoris ſignum remanſerit. Erat tunc hora noctis tertia cum quadrante.

PE-

PETRONII MATTEUCCII

De aurora boreali anni MDCCXXXVIIII.

NOcte inſequente diem ſecundam menſis iunii, anni milleſimi ſeptingenteſimi trigeſimi noni aurora borealis apparuit. Initium ad horam nonam poſt meridiem obſervatum eſt, antequam crepuſculi dubium lumen evaneſceret. Borealem cardinem auroræ centrum fere occupabat, huncque poſitum ad tempus habuit, nulla interim ſingulari facta mutatione.

Hora 11. 40 boreale lumen repente vividius factum, quaſi ignis, exarſit: nonnulli lucentes, rubeique materiæ iactus apparuerunt; arcus tamen, qui horum extrema, qua parte horizontem reſpiciunt, occupare ſolet, non apparuit.

Hora 11. 55 ita ſe habebant. Ad 40 gradus aſſurgebat iactus quidam verticalis ſeptem prope gradus latitudinis complectens, varie, variis ſubalbidi luminis tractibus diſtinctus, huius medium fere cometæ tunc apparentis ſplendor traiiciebat; ad ſeptemtrionem alii duo aſcendebant iactus, duos gradus lati, eodemque intervallo inter ſe diſtantes; horum altitudinem prioris altitudo ſuperabat: ad occidentem alius aſſurgebat ſtellam o maioris urſæ prætergrediens, rubrum cæli lumen partem illam occupans fulgore ſuo longe ſuperans; huic ad eamdem plagam intervallo quatuor, aut quinque graduum ſuccedebat iactus alius ſtellas κ, & ι maioris urſæ prætervadens; poſt alius occidentalior duas eiuſdem aſteriſmi ſtellas μ, & λ perſtringebat.

Prope horizontem caligo obſcura apparebat, cuius ſupremam partem clarum quoddam lumen, velut ſplendentis nebulæ, colluſtrabat.

Emiſſorum iactuum alius alio erat altior, neque eamdem omnes ab horizonte menſuram obſervabant. Altior fuit ille, qui cometam offendebat, minuſque aberat ab hori-

horizonte, alii ex utraque parte huic ſuccedentes præterquamquod longius ab horizonte, longius quoque a vertice abeſſe viſi ſunt, hac tamen ratione, ut horum altitudo eo minor fieret, quo maius ab altiori intervallum.

Poſt hæc ferme extemplo boreale lumen evanuit, ſuperſtite dumtaxat uſque ad horam decimam quartam prope horizontem debiliori aliquo, & incerto.

IACOBI BARTHOLOMAEI BECCARII

De quamplurimis phoſphoris nunc primum detectis

COMMENTARIUS ALTER.

Conspectus hujus secundi Commentarii.

I. Accuratior Phoſphoros obſervandi ratio poſt editum primum Commentarium inventa. II. Per eam certo illud cognitum eſt, quod ante ſolum dubitanter propoſitum fuerat, omnia naturalia corpora ab externæ lucis aſpectu lumen concipere, atque in tenebris aliquandiu conſervare. III. Incommoda, quibus obnoxia erat prima obſervandi ratio. IV. Quomodo his per novam hanc proviſum fuerit. V. Alia quædam in his obſervationibus animadvertenda: & primum de luce, in qua obſervanda corpora ſtatui debent. VI. 2. De apta eorumdem adverſus ipſam lucem. VII. 3. Et obſervatorem in tenebris latentem poſitione. VIII. 4. Quid faciendum, ſi pulveris forma ſint, vel liquoris. IX. 5. Maiores corporum moles ad obſervandum minoribus eſſe præferendas. X. 6. Minuſcula corpora quomodo commode obſerventur. XI. Utilitas harum cautionum iterum explicata. XII. Incipit novorum phoſphororum recenſio a foſſilibus, & primum a terris, quæ lucent omnes etiamſi obſcuri ſint coloris. XIII. Idem quoque in arenis obſervatum eſt. XIV. Itemque in marmoribus etiam duriſſimis, quæ ante obſcuris corporibus annumerata fuerant. XV. Ex lapidibus mole minoribus, qui marmore duriores non ſunt, lucem concipiunt univerſi, etiam ii qui nominatim e phoſphororum cenſu excluſi alias fuerunt, uti amiantus, & talcum. XVI. Similiter qui marmore

more duriores ſunt, ſive opaci ſint, ut malachites, & iaſpides; XVII. Sive medio inter opacos, & pellucidos loco, uti achates, opali, onyces, & alii; XVIII. Sive demum pellucidi, ut cryſtallus, & gemmæ, ſolare lumen ſi minus ſimplex, at certe vitrea lente collectum admittunt. XIX. Metalla vero etiam his novis obſervationibus obſcura eſſe pergunt. XX. Cinnabaris item, zincum, & marchaſitæ. Contra lapis calaminaris, magnes & alia nonnulla, etiamſi metallica ſint mixtura, & atro colore. XXI. Terreſtres ſucci denuo examinantur. Salſi omnes phoſphori ſunt, ne ipſo quidem excepto vitriolo. XXII. Similiter pingues, & ſpeciatim ſuccinum, & ſulphur, quæ alias obſcura viſa ſunt. XXIII. Coniectura olim propoſita de phoſphororum non parvo numero in vegetantium genere, his novis obſervationibus confirmatur; & cauſa probabilis affertur, cur eo in genere pauci eſſe videantur. XXIV. Enumerantur ſtirpium partes, notata luminis menſura, quod ſingulæ concipiunt. XXV. Nuclei, farinæ, amylum ipſum etſi non torrefacta ſplendeſcunt. Omnino quæ olim inter phoſphoros tantummodo artificioſos numerata fuerunt, naturalibus ſunt accenſenda. XXVI. Ex vegetantium ſuccis poſt ſaccharum, manna, & mel, itemque gummi omne lucem aſſumit. XXVII. Reſinæ quoque. XXVIII. Imo & olea ſive preſſu, ſive diſtillando elicita. XXIX. In animantium genere nihil e phoſphororum numero excipiendum eſt. Hinc quæ olim excepta ſunt, haberi debent tantummodo pro minus lucentibus, non pro vere obſcuris. Eiuſmodi ſunt inter alia ungulæ, cornua, & pili. XXX. Quidquid membraneum eſt, & nervoſum: in genere quidquid ad glutinis naturam accedit, etiam ſine ulla præparatione ſplendet. XXXI. Carnes quoque lucent, ſaltem lentis foco percuſſæ, aut convenienter ſiccatæ. Quæ duo etiam reliquas partes ad lucendum plurimum iuvant. XXXII. Animantium ſuccos phoſphoros eſſe, lactis, & adipis exemplo ſuadetur. XXXIII. Suſpicio de luce animalium adhuc viventium. XXXIV. Lux aliqua in manu obſervatoris primum viſa = XXXV. De qua dubitatum eſt diu, an in extraneo aliquo, an in manu ipſa reſideret. XXXVI. Hoc poſtremum nonnullis obſervationibus probabile redditum fuit. XXXVII. Alia quadam pene certum. XXXVIII. Recenſionis huius concluſio. Sequentur deinde generales quædam propoſitiones, ad phoſphororum præſertim doctrinam ſpectantes, & alia non pauca res hactenus propoſitas conſequentia, vel facile ab iis deducenda.

 I. Quod

I. Quod pleriſque eorum accidere ſolet, qui novum aliquid inveſtigare aggrediuntur, ut inter initia laboris ſui multa non videant, quæ poſtquam aliquanto longius in eo progreſſi fuerint, ſe multo prius non vidiſſe mirentur; id mihi quoque accidit admirabilem illam, & ante inauditam lucis facultatem primum obſervanti, qua obiectis corporibus ſe ſe adiungit, & aliquandiu, poſt eorum quoque receſſum in tenebras, inhæreſcit. Quanquam enim ad eiuſmodi ſtudium tantam diligentiam attuli, quantam afferri poſſe ad ſubtiliſſimam quamvis inveſtigationem exiſtimabam; non pauca tamen relinquere coactus ſum, quæ aut attingere obſervando non valui, aut expoliendo perficere. Neque vero ad hæc præſtanda exquiſitius aliquod artificium, aut ſingularis quædam obſervatoris induſtria, ſed paucarum tantummodo rerum, atque in ſpeciem leviſſimarum animadverſio requirebatur. Mihi porro eiuſmodi res niſi poſt editum a me de hiſce phoſphoris commentarium in mentem non venerunt. Venerunt autem ſua quaſi ſponte, aut certe nulla ingenii contentione quæſitæ; ut propterea miratus ſim, atque adeo ægre tulerim, ac pene ipſe mihi ſuccenſuerim, quod animum ceteroquin experiundi cupidiſſimum ad præſidia, quæ ita in promptu eſſent, ſatis cito non advertiſſem.

II. Accuratiore igitur obſervandi ratione inſtructus iterum ad priora ſtudia me contuli, quæ ſuperioribus menſibus inſtaurata uſque ad hodiernum diem non intermiſi. Semper enim de phyſicis ſtudiis ita ſenſi, ea raro quidem ſine magno ſtudentis incommodo, nunquam vero ſine aliquo naturalis ſcientiæ detrimento intermitti. Namque ex una parte multo facilius eſt opus ſemel incœptum urgere, quam intermiſſum redintegrare; ex altera vero niſi qui ſtudium aliquod ſuſcepit conetur etiam perficere, is vel nullum in eodem labore, vel ſerum habebit ſucceſſorem. Quo magis mihi condonari poſſe exiſtimo, quod iterum ad meos phoſphoros biennium, & eo amplius relictos ſim reverſus. Eo autem facilius hanc veniam me impetraturum eſſe confido, quod ſtudii huius intermiſſio incredibili novorum phoſphororum ad veteres illos, & iam in priore commentario deſcriptos acceſſione ſit compenſata. Siquidem affirmare

ſine

ſine arrogantia poſſum, me qualicumque hac induſtria mea lucis dominatum ita amplificaſſe, ut nullum corpus in hac rerum univerſitate iam reperire liceat, ſi pauca quædam tantummodo excipiamus, quod luci obiectum eamdem in ſinum ſuum admittere non cogatur, & quandiu ipſius agilitas patitur, retinere. Hanc equidem ſive lucis, ſive univerſæ corporeæ naturæ proprietatem novam ſane, ac ſingularem in ſcripto illo denuntiavi, ſed timide, ac dubitanter, ut eum ſcilicet decebat, qui ad eam proponendam opinione tantum, aut coniectura duceretur. Cui ſane coniecturæ uti plurimum favere poterat incredibilis illa corporum multitudo, quæ alienam lucem ſibi arripere deprehendi, ita non parum obſtare videbantur alia non pauca, quæ ab externa claritate viſa ſunt obſcura diſcedere. Nunc vero nullus dubitationi, aut timori locus relictus eſt, poſtquam hæc ipſa corpora lucis vi tandem ceſſiſſe per iteratas, certiſſimaſque obſervationes cognovi. Modo haſce obſervationes, omnemque earum ordinem explicatius tradere operæ pretium exiſtimo, quo & maior dictis fides habeatur, & aliis ad eaſdem obſervationes tutum, & expeditum iter præmonſtretur.

III. Quoniam igitur de iis tantummodo phoſphoris nunc agitur, qui ab aliena luce ſplendorem ſuum mutuantur, eædem præceptiones hic quoque locum habebunt, quæ in priore meo commentario propoſitæ ſunt. Namque & univerſus ille ſermo circa hoc idem phoſphororum genus verſatus eſt, & omnis in eo tradita obſervandi ratio ad hoc unum fuit comparata. Cum ergo plura ex his corporibus a luce, cui expoſita ſunt, pertenue lumen ſibi aſſumant, aſſumptum autem citiſſime deponant, his duobus incommodis, quæ obſervationem omnem turbare potuiſſent, remedio fore diximus, alteri quidem, ſi obſervator eouſque in tenebroſo loco moraretur, dum omnis a prægreſſa luce commotio in eius oculis ſedata eſſet; alteri vero, ſi corpus, de quo periculum facere inſtituiſſet, ab exteriore luce ad obſcuritatem, in qua ille ſe contineret, quam citiſſime, ac ſine ulla externæ ipſius lucis admiſſione transferretur. De longa illa in tenebris mora nihil eſt, quod addam ad ea, quæ & ipſe alias, & ante me Fayus monuit, qui hanc unam rem tanti fecit, ut in ea totam propemodum ad

eiuſ-

eiuſmodi obſervationes præparationem contineri exiſtimaverit. Potius dicendum erit de corporum ab exteriore luce ad interiorem obſcuritatem translatione. Quam etſi percelerem in primis illis obſervationibus mihi reddere conatus ſum, artificio quodam ad id ſatis commode, ut mihi videbatur, excogitato, minore tamen opere in ſubſequentibus tentaminibus multo celeriorem, aut certe obſervanti commodiorem effeci. Memineritis proculdubio, me tunc geſtatoriam cellulam mihi comparaſſe, in qua phoſphoros meos ab omni externo lumine tutiſſimus contemplarer; cellulæ autem huius feneſtræ aptatum fuiſſe verſatile tympanum, cui res obſervandæ imponerentur; has demum, cum eſſent iam exteriore lumine ſaturatæ, unico tympani circumactu obſervatori intra cellulam latitanti, ſine ullo externæ lucis illapſu, obverti potuiſſe. Hæc ſane videbantur ad requiſitam celeritatem opportuniſſime excogitata. Verum perſæpe accidebat, ut neque is, qui exploranda corpora tympano imponere debuiſſet, ſatis promptus eſſet ad officium ſuum; neque ipſe obſervator res ſibi obverſas arriperet ſatis cito. Interea vero dum alteruter, vel ambo morabantur, quantumvis parva fuiſſet ea mora, conceptus ſplendor e corpore decedebat, quod idcirco intuentis oculos non percellens, ipſius iudicio, e phoſphororum claſſe detrudendum videbatur.

IV. Cum ergo in huius erroris cognitionem veniſſem, rem aliter expedire opus fuit. Itaque ſuperiori margini feneſtræ nunc memoratæ duo ſiparia ex nigro, denſoque panno appendi, alterum quidem ad exteriorem eius faciem, alterum ad interiorem; ambo autem tam lata, ut circumquaque totos ſex digitos feneſtræ ambitum excederent. Cum ergo deorſum libere propenderent, atque ad feneſtræ margines ſatis per ſe applicarentur, omne externum lumen a cellula excludebant. Licebat autem obſervatori nonnihil elevatis inferioribus ſipariorum oris, corpus quodvis manu prehenſum in exteriorem claritatem proferre, brachio, quantum opus eſſet, extento, eodemque viciſſim retracto ſuiſmet oculis admovere. Interea dum hæc faceret, oportebat eum clauſis oculis eſſe, ne irrepente lumine perſtringeretur. Retracta manu, & ſipariis ſponte collapſis, quæ duo minimo temporis momento fiebant, cum ſic obducta

fene-

feneſtra iam nihil ipſi eſſet ab irrepente luce metuendum, continuo poterat oculos in obiectum corpus intendere, ac de ipſius ſplendore, aut obſcuritate iudicare.

V. Atque ita præcipuis incommodis, quæ in prioribus meis obſervationibus mihi obvenerant, proviſum eſt. Sed experientia edoctus ſum alia quædam animadverti oportere, quæ ſi negligantur, perſæpe fallax, nedum difficile futurum ſit de his phoſphoris iudicium. Ac primum quidem ſciendum eſt, eos in clariſſima luce omnino eſſe ſtatuendos. Inutile cuipiam videri poterit id monere. Quis enim in eam ſententiam facile non veniat, corpora, quibus nitidius lumen haurire datum fuerit, nitidius itidem fore, ut refulgeant? Sed aliter fortaſſe alii ſentient, in primis ii, quibus viſum eſt, nonnullos phoſphoros melius nubiloſo cælo, quam ſereno, imo ſub ipſo ſolis radio inclarere. Cuius etiam rei non improbabiles rationes afferunt. Idcirco aperte monendum erat, mihi aliter in hiſce phoſphoris, quam illis in lapide bononienſi, de quo præcipue loquuntur, eam rem obſervare contigiſſe. Ac ſi aliquid in admittenda luce differrent hæc corpora, facile id poſſet diſpari eorum ingenio attribui. Noſtri quippe phoſphori ab ipſa natura; ab arte vero per ſummam ignis vehementiam bononienſis lapis, & alii eius ſimiles, hanc ſplendendi facultatem acceperunt. Omnino autem naturalibus illis phoſphoris nunquam vidi ſolare lumen nocuiſſe. Quin etiam in eo genere quidam ſunt uſque adeo moroſi, ut vel minimas tantæ lucis differentias ſentire videantur; neque ab ea, niſi ab omni vaporum labe puriſſima ſit, ad fulgendum excitentur. Sunt quoque alii non pauci, quibus neque ſufficit clariſſimum ſolem aſpectaſſe. Hi uſque obſcuri erunt, dum collectis per vitream lentem ſyderis eius radiis ad lucis amplexum adigantur.

VI. Non ſolum autem conſiderandum eſt, quo in lumine, ſed quo etiam modo phoſphori noſtri collocentur. Sunt enim nonnulli, qui ad idem lumen ſub uno poſitu, quam ſub alio quovis, melius illuſtrentur. Difficile eſt autem ea de re certum aliquod, & generale conſilium dare; propterea quod & ſuperficies, & figura corporis, & diverſa componentium partium natura, & alia fortaſſe plura externi luminis admiſſionem variare ſolent. Quæ ſingula vix prævideri, ſed univerſa ne vix quidem poſſunt. In genere

autem

autem ea poſitio cenſenda eſt aptiſſima, ſub qua plurimum luminis e radiante corpore in corpus eidem obiectum incidat. Plus vero incidet in ſuperficiem, quæ ſcabra ſit, quam in politam: hæc enim ex opticæ legibus magnam partem appellentis lucis ante reflectet, quam ab ea ſe tangi ſinat. Item ſi foveis, & eminentiis interrupta ſit corporis ſuperficies, curandum eſt, ut omnia, quantum fieri poteſt, æque illuſtrentur. Nam ſæpe quæ partes ſupra ceteras extant, ſui umbram in has ita proiiciunt, ut magna pars corporis vel ſub ipſa clariſſima luce obſcura maneat. Idcirco totum itidem corpus obſcurum apparebit, præſertim ſi viribus imbecillum ſit ad lumen attrahendum. Tenuis enim lux, ſi etiam fuerit interrupta, nec oculos ſpectatoris ſatis percellit, & obſcuritatis potius ſpeciem exhibet, quam fulgoris. Sæpe etiam continget experimentum ſumi de corporibus, quorum partes ſint natura, & qualitatibus diſcrepantes. Tunc ipſa res teſtatur, eas partes luci obvertendas eſſe, quæ magis eidem ſint amicæ. Igitur albæ præ fuſcis, præ humidis ſicciores, & opacæ potius, quam pellucidæ. Sed quoniam id non ſemper licet ante experimentum cognoſcere, iuvabit corpus ſubinde verſando aliter, atque aliter conſtituere, ſi forte locus inveniatur, in quo lucem haud in gratiis excipiat. Quod præceptum non raro etiam valere poterit in iis corporibus, quæ ſibi ubique ſimilia videntur. Id equidem in vitreo ſcypho expertus ſum, figuræ conicæ, qui luci ſic obverſus, ut axe horizonti parallelo eſſet, fulgenti quodam tractu, & horizonti ſimiliter parallelo ornabatur; in alio quovis poſitu lumen omne reſpuebat.

VII. Ad rectam quoque collocationem pertinere videtur, ut eas partes, quæ illuſtratæ ſunt, ſpectator ſibi exacte obvertat, non alias. In quo errare difficile videri poteſt, ſed multo ſæpius re ipſa erratur, quam quis putaret. Manus enim, quæ ad quotidianos motus a viſu dirigi conſueverunt, hoc ſubſidio in tanta obſcuritate deſtitutæ non raro falluntur.

VIII. Sed alia quædam accidere poteſt ſitus mutatio, qua partes corporis, illuſtratæ cum fuerint, ſpectatori tamen non obiiciantur. Accidit ea corporibus in parvas glebulas, aut in pollinem comminutis. Eorum quippe a luce in tenebras retractio ſine quaſſatione aliqua, in tanta præſertim

cele-

celeritate, fieri non poteſt. Contingit ergo tum plurimas ſolutæ illius maſſæ particulas faciebus ſuis revolvi, tum alias ſuper alias prolabi. Sic earum, quæ illuſtratæ fuerunt, ſplendor omnis, obſcurarum ſuperiectu obumbratur. Eamdem ob cauſam liquorum perdifficilis eſt obſervatio. Quapropter continendi ſunt, quantum fieri poteſt, ne fluant. Id fiet ampullis ex nitidiſſimo vitro eos coercendo, quæ ſi pleniſſimæ ſint, humorem contentum nec ſuccuti, nec agitari ſinunt. Traiecta vero lux per vitrum, quod nitidum, ut diximus, & præterea tenue ſit, liquoris partes ſatis excitat ad lucendum; & ſemel ab iis recepta, cum earum nulla fiat perturbatio, quantum ad obſervationem ſatis eſt, retinetur. At vero pulveres vaſis quantumvis patulis excipiendi ſunt; deinde apprimendi ſunt ita, ut eorum granula cohæreant. Sic poſitum, ſub quo lumen receperunt, ſingula eumdem ſervabunt, atque hoc ipſum lumen ſuum obſervatori adhuc integrum exhibebunt.

IX. Poſtremo animadverti debet, melius eſſe in magnis corporibus experiri, quam in parvis. Ac ſi experimentum de tenui luce habendum ſit, non modo id melius cenſendum eſt, ſed etiam omnino neceſſarium. Manifeſtum eſt enim languida etiam luce, modo ſit in magnam ſuperficiem diffuſa, oculos poſſe commoveri, non ita vero ſi parva contineatur. Quocirca ſi nobis facultas ſit in eiuſdem generis corporibus delectum habere, præſtabit omnino ad experiendum, quæ mole maiora ſunt, adhibere. Mihi certe quorumdam corporum exigua fruſta obſervanti lucem nullam videre contigit, non ita vero parvam, ubi maiora pertentavi.

X. Verum non ſemper copia nobis datur in magnis experiendi, vel quod in eo genere nihil ſit magnum, ut in gemmis, vel quod nobis in promptu non ſit. Tunc magnitudo, quam natura, vel opportunitas non dedit, artificio eſt procuranda. Vel ergo multa eiuſmodi minuta corpuſcula ſunt compingenda, & ſuper atratæ ceræ tabellam in ſpatium tam amplum, quam fieri poteſt, ſunt ordinanda; vel ſi eorum numerus deficiat, ſubtiliter contundenda ſunt, & pollen ſuper ſimilem tabellam inducendus. Hac ratione minutulas gemmas, quæ ſingulæ obſcuræ videbantur ad lucem complectendam adduxi. Nec dubito, quin ii quoque ada-

mantes, in quibus nullum adhuc lumen a phyſicis depre-henſum eſt, ſi eodem modo in experimentum venirent, ſe minime a luce alienos eſſe declararent.

XI. Atque hæc potiſſima ſunt, quæ phoſphororum noſtrorum lucem videre cupientes obſervare decet. In quibus explicandis ſi aliquanto longior, nimius certe non fui: niſi forte nimietate peccare dicamus eum, qui res ad phyſicam aliquam inveſtigationem perneceſſarias paullo accuratius tradat. Nempe harum, quas hucuſque expoſuimus, ignoratio pulcherrimam hanc lucis facultatem uſque ad hæc noſtra tempora non ſolum obſervatoribus perſpicaciſſimis, ſed propemodum mihi ipſi, eamdem non ſuſpicanti modo, ſed enixe quærenti occultavit. Et ſane innumerabilia fere corpora, ut initio dictum eſt, ex hoc phoſphororum genere per me ante detruſa fuerunt, quæ deinceps ſubtiliore iſta obſervandi ratione convictus ad illud ipſum genus, quaſi in familiam ſuam revocare ſum coactus. Hic vero ſi eiuſmodi corpora enumerare ingredior, nolim iterum redundantiæ accuſari, proptereaquod ea enumeratio nihil adiicere novi ad illud videatur, quod generatim vel in ipſo initio ſermonis huius pronuntiavi, nullum videlicet reperiri corpus, exceptis pauciſſimis, quod luci obiectum particulam eius aliquam ſecum in obſcurum locum non aſportet. Quanquam enim hæc lucis admiſſio univerſis corporibus communis eſt, habent tamen ſingula peculiare aliquid ea in re, quod notatione ſit dignum; & hæc ipſa rerum ſingularium notatio credibiliorem facit de univerſo genere narrationem.

XII. Novæ igitur huius recenſionis idem erit ordo, quem in primo commentario ſequuti ſumus: & novos itidem phoſphoros in tres claſſes partiemur, foſſilium, vegetantium, & animalium. Inter foſſilia primum locum in eo commentario dedimus terris, ex quibus lucere quidem permultas diximus, ſed obſcuras etiam eſſe non paucas. Et quanquam nullam certam ſplendoris, aut obſcuritatis notam ex earum qualitatibus, colore præſertim, ſumi poſſe affirmavi, addidi tamen inter colores album, & qui ad ipſum propius accedunt, lucis eſſe amiciſſimos. Nunc vero poſt recentes obſervationes aio, nullam terram non lucere, ne ipſis quidem nigris, & rubris exceptis. Enimvero atras

illas,

illas, quæ noſtris pictoribus uſitatæ ſunt, tenui quidem luce, ſed minime dubia perfuſas vidi, ad margines præſertim, & angulos, ut fere in aliis permultis corporibus obſervari conſuevit. Aliquanto magis inclaruit vicetina illa fullonia, quam in ſcripto illo commemoravi, ſed luce tamen inclaruit candori ſuo minime reſpondente, ut mirum non ſit, eam cum aliis quibuſdam pro exemplo albarum, quæ lumen non admitterent, a me in eodem ſcripto fuiſſe propoſitam. Parum autem abfuit, quin etiam nunc flavam quandam terram ex romano agro ad nos in uſus pictorum allatam e phoſphororum cenſu expungerem, adeo pertinax fuit in reſpuendo vel ipſo ſolari lumine. Sed eius duriſſimum ingenium collectis per vitream lentem ſolis radiis, atque in ipſam coniectis tandem edomui.

XIII. De arenis vero, quas terris ſubiunxi, vix habeo quod addam ad priores obſervationes. Pleriſque enim, modo color non obeſſet, etiamtum ſplendendi virtutem attribui. Lutea illa, e qua vicini colles exſurgunt, etiam non abſterſa ochra, qua eius nitorem retundi aſſerui, nonnihil tamen ſplendentem ſe mihi præbuit eam denuo obſervanti. Splendentes quoque ſe præbuerunt talcoſæ illæ miculæ aurei coloris, quibus illa interſperſa eſt, quantumvis lucem omnem iiſdem olim denegaverim.

XIIII. Inter lapides mole ſpectabiliores marmoribus princeps locus profecto debetur, quod neque aliis magnitudine cedant, & præterea levitate, & nitore omnibus præſtent. Sed præſtant etiam lucendi facultate. Mollioribus fere, & candidioribus maxima videtur obtigiſſe. At non omnino deeſt aliqua præduris, & fuſcis, de quibus tamen a me olim dubitatum eſt. Porphyrites certe, ophites, & granitum, quæ tunc in exemplum adduxi, claritatem aliquam ſub ſole induerunt; maiorem vero ſub lentis foco. Sed & baſaltes æthiopicum marmoris genus duritie, & colore ferrum imitans non ſe a luce omnino averſum oſtendit, quandoquidem ſe vinci eodem foco paſſum eſt. His addi poſſunt & ægyptiacum quoddam viride, & viride item antiquum, & orientale aliud viride *della ſtella* dictum, quæ alias vel nihil, vel tantum ad margines dubio lumine refulſerunt.

XV. Lapides vero exiguos mole in ſua genera pariter

diſpeſcentes alios quidem marmoribus duritie cedere, alios quovis marmore duriores eſſe propoſuimus. Et illos iterum pro formæ diverſitate in novas claſſes, tres videlicet, diſtinximus. Primæ claſſi, quæ lapidibus omnino informibus tributa eſt, nihil modo eſt addendum. In altera lapides eos complexa, qui extrinſecus informes concinnitatem aliquam intus recondunt, & amiantum, & talci diverſas ſpecies, & narnienſem quendam ætitem obſcuris corporibus annumeravimus. Sed immerito id factum eſſe poſteriores obſervationes docuerunt; per quas manifeſtum lumen in his non modo, ſed & in aliis ad eamdem claſſem pertinentibus; præſertim vero in orientali quodam præduro ætite, imo & in ipſa ex amianto confecta charta licuit conſpicari. Poſtremam exiguorum, molliorumque lapidum claſſem corporibus intus non minus, quam extus regulari aliqua figura ſpectabilibus tributam phoſphororum ditiſſimam feci. De variolato tamen, & cruciformi dubitanter loquutus ſum: modo clarere hos quoque aſſero, nec dubitanter.

XVI. Poſt hæc ſequuti ſunt lapides marmore duriores. Ex his perpaucos primis tentaminibus inveni, qui ſplenderent in tenebris, pauciores certe quam nitor, quem oſtentant ſub dio, polliceri videatur. At ſubſequentibus ſtudiis nullum reperi, qui lucendi poteſtate non eſſet, & non luceret re ipſa, modo convenientibus auxiliis iuvaretur. Omnibus efficaciſſimum, certiſſimumque auxilium fuit ſolaris luminis per cauſticum vitrum intentio; non paucis vero, præſertim ſi minuta eſſent eorum corpuſcula, plurium eiuſdem generis fragmentorum conglutinatio, aut tritus, & comminuti pulveris, ut ante dictum eſt, in maiuſculum ſpatium ſuper atram ceram explanatio. Cum ergo genus hoc lapidum in opacos, pellucidos, & inter utrumque medios diſpartitus eſſem, percurrens deinde ſingula genera, ex opacis ſolum cyaneum lapidem in phoſphororum cenſum admiſi, ceteros autem excludendos eſſe putavi, & nominatim quidem malachitem, & iaſpides univerſos. At vero decus hoc, quod per eius temporis ſtudia his lapidibus detractum eſt, poſteriora cumulatiſſime reddiderunt. Namque, & malachites, poſtquam lentis focum ſuſtinuit, eodemque modo nephriticus lapis non dubie nobis refulſit; & iaſpides, ſive rubri, ſive obſcure virides, ſive ex multis, di-

ver-

verſiſque coloribus miſti ad lentis focum, multi etiam ad ſimplex ſolis lumen ſplenduerunt, præſertim vero ii, quibus erant albicantes venæ intermixtæ.

XVII. In altero autem pretioſorum lapidum genere, quod inter opacos, & perſpicuos medium eſt, centenos achates cum examinaverim, unum tantummodo videre obtigit, qui ad ſolare iubar etiam per lentem collectum non ſit commotus. Erat is ex multis, & obſcuris coloribus miſtus, ut ſuſpicari liceat pervicaciam tantam colori potius, quam lapidis ingenio eſſe tribuendam. Examinavi præterea in eodem genere opalos, onyces, carneolos, quos in priore ſcripto præterieram, atque hos quoque ad ſolis vel ſimplex lumen ſplendere vidi.

XVIII. Poſtremum tandem genus, quod cryſtallos, & omnes pellucidas gemmas complectitur, fuit conatibus noſtris multo obſequentius, quam expectaveram. Reſtiterant enim & Fayo eas multis modis olim tentanti, & mihi ipſi, cui ceteroquin non infelicem in eiuſmodi periculis eſſe contigerat. Verum quod primis experimentis aſſequi non licuit, id erat poſtremis reſervatum. Namque ut de cryſtallis primum loquar, multæ ſimplex ſolis lumen quaſi ſponte complexæ ſunt; difficiliores aliæ vim lentis ſuſtinere voluerunt. Omnes vero artificio non magno ad lucendum etiam ſub diurna tantum claritate adductæ ſunt. Colliſu mutuo ſubtiliſſimus pollen, albiſſimuſque ex ipſis deteritur. Hunc ſibi etiam invicem affricant, ubi præſertim magis ſcabræ ſunt, & impolitæ. Pollen hic facit, ut iis in locis ſatis nitide, atque ad lumen etiam non ſummum cryſtalli explendeſcant. Eadem res in vitro tentata, perinde mihi ceſſit, atque in cryſtallis. Quo factum eſt, ut etiam hoc nobiliſſimum artis opus ab obſcuritate, in qua huc uſque iacuerat, ad phoſphori dignitatem ſit evectum. Quod vero ad gemmas attinet, ſub lentis foco paucis exceptis nituerunt omnes. Facillime omnium ſmaragdi, quorum etiam non paucos ſimplex lumen ſolis commovit. Poſt ſmaragdos ſapphiri, præſertim candidiores; fere his pares chryſoliti. Sequuti ſunt amethyſti, & topazii; dein rubini, præſertim colore pallidiores; tandem granati, & hyacinthi. Hos poſtremos illuſtrare vix potui ſolitarios; aggregatos non ita difficile; multo difficilius tamen, quam aliud quodvis gemmarum

marum genus. Imo aliquot granatos colore, & politura nitidiſſimos, & mole conſpicuos, gemmam itidem quamdam duritie, & colore pro rubino habitam, duoſque inſignes hyacinthos illuſtrare non potui ſegregatos. Coloris naturam cauſatus ſum, nec iniuria, ut opinor. Aliis quippe obſervationibus, & quidem non paucis, compertum iamdudum eſt rubrum colorem inter ceteros luci eſſe infenſiſſimum.

XIX. Poſt gemmas in meo illo ſcripto metalla conſideravi, diviſionem ſcilicet foſſilium a Wodwardo traditam ſequutus. Multa in metallis olim molitus eſt Fayus; ego quoque deinceps non pauca. Nunquam certe deſtiti, poſt ſuſceptum hoc ſtudium ea urgere, ut votis meis obtemperarent. Sed nulla vi, artificio nullo adduci hucuſque potuerunt, ut in lucis amicitiam venirent. Durum ſane, & pervicax corporum genus, quod & lucem, & vim electricam, & ipſum quoque rorem averſetur. Hæc ſunt pauciſſima illa corpora, quæ in tota rerum harum terreſtrium univerſitate e phoſphororum numero excipienda eſſe, initio huius ſermonis pronuntiavi. Nam ſi quæ alia viſa ſunt poſt externæ lucis aſpectum adhuc obſcura remanere, non difficile fuit obſcuritatis huius aliquam cauſam, non in eorum natura, ſed in alia re quapiam iiſdem omnino extranea poſitam cogitare. At vero in metallis nondum quidquam inventum eſt ab eorum natura diſiunctum, cui tantam in lucem contumaciam probabiliter tribuamus.

XX. Eadem obſcuritate qua metalla, etiam quidquid aliquam habet cum ipſis cognationem prioribus meis obſervationibus involvi. Porro hæ nullam cinnabari, zinco, marchaſitis iniuriam fecerunt: hæc enim re ipſa lucem non admittunt. Fecerunt utique calaminari lapidi, qui ſplendorem nec ita modicum arripiens, obſcuris corporibus nunc memoratis a me accenſeri non debuiſſet. At notam hanc poſteriores obſervationes tum lapidi huic, tum aliis huius generis foſſilibus ademerunt, quæ facile in eandem notam incidere potuiſſent. Aliquot certe magnetes, quos ſolis radio expoſui tenuiſſima quadam luce nitere viſi ſunt. Erat vero lux illa per totum eorum corpus diffuſa. Nituit quoque, ſed interrupte, ferrea quædam minera. Nituit & magneſia. Nituit ſmiris, & lapis hæmatites, itemque armenus

præ-

præſertim lentis foco provocatus: ad ſimplex vero ſolis lumen nituit alius lapis colore, & pondere ferrugineus, nitoremque hunc ſuum ad latera, quæ abrupta erant, oſtendit. His ergo, & aliis non paucis, quæ non commemoro, nec metalli admiſtio, nec color, qui pleriſque ater eſt, aut obſcurus, ſic obfuerunt, ut aliquem clarorem non conceperint leviſſimum quidem, ut ante monui, ſed obſervatori, qui aliquanto diligentior fuiſſet, non elapſurum.

XXI. Poſtremum locum in foſſilium claſſe, terreſtribus ſuccis, Wodwardo auctore, aſſignavi. Quos etiam in ſalſos, & pingues diſtinxi ſuſceptam ab eo diviſionem perpetuo ſequutus. Sales in phoſphororum claſſem admiſi pene univerſos. Eos quippe tantummodo excluſi, qui ab omni admiſtione metallica non eſſent puriſſimi, experimento præſertim de vitriolo ſumpto permotus. Vitriolum enim, cuiuſcumque generis eſſet, & quantumvis pellucidum, mihi viſum fuit nihil externæ lucis ſibi adiunxiſſe. At poſtea iterato accuratius experimento, in cryſtallina huius ſalis gleba levia quædam languidæ lucis veſtigia deprehendi; pertenue item lumen, ſed latius diffuſum in vitriolo contrito, & preſſu in planam ſuperficiem expanſo; non tenue demum in alba illa calce, in quam vitriolum ſub æſtivis ſolibus dilabi conſuevit. Id lumen, quod in contrito vitriolo pertenue, ac pene incertum fuiſſe dixi, lens vitrea non dubium fecit; in vitrioli autem calce ſic etiam intendit, ut tripla vi auctum eſſe videretur.

XXII. Multo autem gravius ex commentario meo detrimentum acceperat pinguium ſuccorum genus. Ex his ne unum quidem in phoſphororum cenſum recepi. At ſuum cuique decus, & quoad licuit, per ſubſequentes obſervationes reſtitutum eſt. Reſtitutum eſt certe ſuccino, & ſulphuri tum nativo, tum fuſo. Non ita gagati, & lithanthraci. Sed his nigredo eſt tanta, ut cuivis vel lucidiſſimo corpori obſcuritatem poſſit offundere; ac propterea mirandum non ſit, ea in ſumma etiam luce non lucida permanſiſſe.

XXIII. Hactenus de foſſilibus. Sequitur ut de vegetantibus dicamus. Cum primum in his obſervationibus verſaremur, inter corpora, quæ tunc examinavimus, viſæ ſunt plantæ minime omnium lucem appetere. Non idcirco tamen earum generi lucendi facultatem, ſed potius facultati huic

robur,

robur, & alacritatem deeſſe ad ſe ſe quantum opus eſſet exſerendum exiſtimavi. Impeditam nempe eſſe, ac veluti obrutam principii alicuius lumini adverſi implicatione. Facile autem mihi fuiſſet de hoc principio coniecturam facere ex iis experimentis, quæ tum de lignis, & fibris, ex quibus plantæ omnes contexuntur, tum de artificioſis phoſphoris ceperam, quos potiſſimum ex vegetantibus confici animadverteram. Ligna enim, & fibræ cum inter ceteras ſtirpium partes ſiccioris ſint compoſitionis, etiam lucem in ſe manifeſtius trahunt; eorum vero phoſphororum præparatio omnis in eo duntaxat poſita eſt, ut convenienter ſiccentur. Ex quibus cogitare in promptu fuiſſet, inſitam quidem eſſe in plantis lucendi vim aliquam, ſed humoris, quo illæ turgent, redundantia hebetari, a quo, ſi expediretur, continuo e ſuis latebris exſiliret. Verum ut ingenio ſum minus prono ad opinandum, nec ipſe mihi paucis experimentis in novo præſertim ſtudio ſatisfacio, ab omni coniectura temperavi. Nunc vero ab ea, quæ modo indicata eſt, temperare vix poſſum. Eo quippe inclinant me, ac propemodum impellunt recentes aliæ, bene multæ, atque inter ſe conſentientes obſervationes. His certior factus ſum nihil in plantis inveniri, quod idoneum fieri non poſſit ad lumen combibendum, ſi areſcendo humorem omnem exhalarit. Plurimis ſatis eſt ſolius aeris perflatu ſiccari; alia non lucent, niſi prius fuerint excalfacta. In hoc numero vidi arundinaceas plantas nonnullas; inter ceteras tipham. Omnibus vero præſidio eſt ignis calor ad alacrius, nitidiuſque lucendum, ſed moderatiſſimus ſit oportet, & ſui ne levem quidem notam relinquens. Unam mihi ex omnibus ſtirpibus videre contigit ſanguineam betam, quæ lucis amplexum, vel ignis calore illecta recuſavit.

XXIV. Verum non ita humoris vinculis innexa eſt facultas iſta lucendi, ut exſolvi etiam non poſſit, dum plantæ virent, & ſucco turgent. Satis eſt pleriſque ad lucem aliquam concipiendam clariſſimum ſolem aſpexiſſe; obſervatori autem ad eam percipiendam ita ſe, ut initio ſermonis huius dictum eſt, præparaſſe. His rite ſervatis radices ſplendere videbimus pene omnes, modo color non officiat. Splendeſcet autem præcipue cortex; meditullium enim, ſi pulpa ſit molliore, obſcurum apparebit. At obſcuritatem,

exuet,

exuet, ſi expreſſione fiat exſuccum. Caules, & cortices partim lignorum, partim frondium ingenium ſequuntur, ut ſcilicet ad alterutram partem eorum textura magis accedit. Folia vero ſplendorem aliquem a ſole pleraque accipiunt. Omnium facillime incana, & hirſuta, & ſiccioris naturæ; in eodem vero folio ea pars, quæ humo eſt obverſa. Quod ſi nudo ſole non percellantur, traiectis per lentem radiis vix reſiſtent. Id quoque floribus excitamento erit ad lucendum. Non pauci enim in lucem difficiliores ſunt, quam ipſa folia, etiamſi colore non admodum ſint obſcuro. Non ita difficiles ſe præſtant fructus etiam molles, & ſuccoſi: multo autem facilius illuſtrantur exſiccati.

XXV. Eorum vero nuclei lumen arripiunt, nec ſiccari eos, multo minus torreri opus eſt. Perutile id quidem ipſis eſt ad vegetum lumen oſtentandum; ad aliquod, nec tamen adeo tenue concipiendum, minime neceſſarium. In quo equidem a me ipſe diſſentio, qui olim non tantum fructus, & nucleos, ſed & farinas, & ipſum candidiſſimum amylum, & omnia propemodum ſemina e naturalium phoſphororum familia ſummovere non dubitavi; locum ipſis tantummodo inter artificioſos concedens, modo tamen, ut paulo ante dictum eſt, moderato calore torrerentur. Sed æquum omnino eſt condonari hunc errorem homini, qui nondum accuratiſſimam illam obſervandi rationem calleret, nec eſſet adhuc experientia edoctus, quantopere in his corporibus lucendi vim humidi aeris attactus infringat. Nempe longe alia mihi viſa ſunt, cum denuo redii ad eorum obſervationem per æſtivos calores, ſudo cælo, & ſicco aere, omnino tempeſtate ab ea diverſiſſima, in quam incidit prima illa inveſtigatio. Lucent ergo ſatis vivide, nec arte ulla præparatæ omnis generis nuces, cerealia ſemina, & legumina, phaſeoli in primis, & ciceres, qui paucis phoſphoris nitore cedunt.

XXVI. Luce non minus vegeta plurimos vegetabilium ſuccos, omnes certe aliqua perfuſos vidi. Inter ſales principem locum olim ſaccharo dedi. Huic manna, & mel tantum ſplendore cedunt, quantum ſiccitate. Ac mel quidem vix lucem aliquam oſtendit, niſi frigore duriuſculum, & quaſi granoſum evaſerit. Gummi omne alterum vegetabilium ſuccorum genus ſplendore inſigne eſt. Arabici guttæ

quædam, nonnullæ item ex pruno collectæ mihi obtigerunt ita ſplendentes, ut nihil ſupra. Etiam tragacanthæ lux eſt non modica, niſi humiditas eius compagem laxarit. Id ſi acciderit, ſiccatio remedio eſt.

XXVII. Poſtremum genus, quod pinguium ſuccorum eſt, minus quam reliqua duo lucem admittit, omnino tamen non reſpuit. Omnes reſinarum lacrimæ plus minus ſplendent; nitidius quidem, quo puriores ſunt, albicantes magis, & ſiccioris naturæ; ſecus vero quæ contrarias habent notas. Reſina benzoe cuiuſcunque luminis vires eluſit; ac parum abfuit, quin etiam ſolare contempſerit: minimum certe nudo ſole; collectis etiam eius radiis non multum commota eſt. Non minorem lucis ignaviam in terebinthina deprehendimus. Cum liquida eſſet, nihil fulſit; aliquantulum, poſtquam frigore induruiſſet.

XXVIII. Ad pingues iſtos ſuccos referenda quoque ſunt olea. Hæc ſive e fructibus, e nucleis, e ſeminibus expreſſa fuerint, ſive chemicorum igne deſtillaverint, lucendi vi non carere exiſtimaverim, ſi duorum tantummodo exemplum aliquid valet ad coniecturam de ceteris faciendam. Alterum ex his oleis eſt, quod ex olivis per expreſſionem, alterum, quod diſtillando ex aniſi ſeminibus elicitur. Sub ſole utrumque ſplenduit manifeſto, non prius tamen, quam vi hyberni frigoris congelaſſent. Quo facile ſuſpicemur, ſi cetera olea ſimiliter concreſcerent, non diſſimilem fulgorem eſſe ſuſceptura.

XXIX. Iam vero ad animalium genus tandem veniamus. Id genus facultate iſta extranei luminis attrahendi non minus quam foſſilia, & vegetantia nobilitatum a natura fuiſſe in commentario meo pronunciavi. At appetitum eiuſmodi ad eas animantium partes fere contractum eſſe, quæ ſingulariter ex terreſtri principio in ſolidam firmitatem indurato concretæ ſunt; in reliquis enim pinguitudinis admiſtione ſi minus extingui, at certe non modicum hebetari. Novis autem obſervationibus edoctus ſum, eiuſmodi vim oleoſo utique principio hebetari, ſed non penitus extingui. Quocirca non omnino obſcura, ſed tantum minus ſplendentia dicenda iam erunt ea corpora, quæ inter obſcura olim recenſui. Ita ſi qua diſcrepantia inter veteres obſervationes, & recentes intercedere videatur, minimo negotio com-

componetur. Nulla igitur pars eſt in animali genere, in quam aditus non ſit externo lumini, facilior utique in alias, in alias minus facilis. Atque ex iis, quæ animantium corporibus extrinſecus veluti adnata ſunt, quadrupedum ungulæ, cornua, & pili; volucrum pennæ, roſtra, & ungues; aquatilium ſquammæ remiſſe collucent; conchyliorum vero teſtæ vividius, ut alibi a nobis dictum eſt. Solenes, pinnas, & unguem odoratum olim e lucidorum corporum numero excepi; ſed nulla exceptione uti opus erit, ſi res quemadmodum nunc explicata eſt, intelligatur. Similiter nec alcis ungulam e phoſphororum cenſu eximemus, quamvis ſolari lumini obſiſtat; cedit enim eidem per lentem in parvum ſpatium contracto, & in eas partes compulſo, quæ minus obſcuri ſunt coloris; ut culpa omnis in hoc uno eſſe videatur.

XXX. Detractis pilis, & plumis terreſtrium belluarum, & volatilium extima cutis lucet. Quadrupedum coria tum recentia, tum variis modis, uti ad vitæ commoda fieri ſolet, concinnata, imo etiam ſaturis coloribus infecta lucere vidi. Lucet quoque avium pellis iis maxime in locis, quæ minus adipe ſuffuſa ſunt, aut ſubiectorum oſſium eminentiis aliquanto magis attolluntur. Ibi enim macrior eſt ea membrana. Omnino autem quidquid membraneum eſt, aut nervoſum, dicam etiam generalius, quidquid ad eius glutinis, quo hæc viventia maxime ſcatent, naturam accedit, id omne alienam lucem ſibi libentiſſime adiungit. Sic oſſium, dentium, cornuumve decocta in gelu formam adſtricta; iura carnium inſpiſſata, & in tabellas ad viatorum commodum redacta; ſerum item ſanguinis ſuperflui humoris exhalatione concretum; & demum tenax illa, & ſubflava cruſta, quæ ſanguini per magnas inflammationes fere ſupercreſcit, non modico ſplendore perfunduntur, etiamſi non fuerint uſtulata. Ignis utique auxilio inſita in his rebus lucendi facultas intenditur, omnino autem non procreatur. Quod ego, ſi eo tempore cognoviſſem, quo primum ex ipſis artificioſos phoſphoros eas torrefaciendo confeci, diligenter notare procul dubio non omiſiſſem, ne forte quis exiſtimaret, ſplendendi vi a natura non fuiſſe inſtructa ea corpora, quibus ad ſplendendum artis ſubſidia comparaſſem.

XXXI. Iam vero carnes ex omnibus animantium parti-

bus minimam habere videntur propenſionem in lucem. Atque hinc factum eſt, ut in eo ſermone, quem de his rebus iam habui, non auſus fuerim locum inter phoſphoros concedere, niſi albis carnibus, & quidem aſſis. Ceteris propter colorem, quem luci contrarium fore exiſtimavi, ita diffiſus ſum, ut omnem earum obſervationem prætermiſerim. Sed etiamſi non prætermiſiſſem, in ea tamen obſervandi ratione, quam tunc ſectabar, neſcio an aliquid de ipſarum luce decernere licuiſſet; adeo languidum eſt, & fugax vel illud ipſum lumen, quod ſolis radiis vehementer percuſſæ concipiunt. In oſſibus aliter res habet. Verum de his nihil mihi addendum eſt ad ea, quæ in altero commentario ſcripſi. Hactenus ergo demonſtratum eſt ſolidas animantium partes alienam lucem ad ſe trahere univerſas. At ſi quæpiam ex his, quas recenſuimus, aliquanto difficilius id fecerit, faciet minus difficile, ſi quemadmodum de vegetantibus dictum eſt, congruenter exſicceſcat.

XXXII. Quod attinet ad animantium ſuccos, nullum pariter eorum a luce alienum eſſe iudicaverim, poſtquam lac, & adipem lucere tandem deprehendi, quorum alterum in ſe, quandiu ſaltem fluidum eſt, lumen non admittere, alterum etiam arcere a corporibus, aut certe debilitare pronuntiaveram. Lac porro illuſtrari qui volet, eas cautiones adhibeat, quas ſupra tradidimus, cum de liquorum obſervatione generatim dictum eſt. Pro quacunque autem animali pinguitudine valebunt ea, quæ de oleis vegetabilium propoſuimus. Eaſdem ſcilicet frigore durari oportet; nam ſi vel leviter molleſcant, omnis recepti luminis vigor obtunditur.

XXXIII. Hucuſque recenſitis obſervationibus, aliiſque non paucis, quas, ne longior eſſem, prætermiſi, cum hanc ſplendendi facultatem in animale genus tam late diffuſam eſſe animadverterem, cogitare ſubinde cœpi, anne illa eadem vi, quam in emortuis animantium partibus miratus fueram, animantia ipſa, dum etiam vivunt, eſſent inſignita. Nullam equidem cauſſam videbam, cur natura vivis corporibus id negaſſet, quod ſenſu, & vita carentibus largita eſſet. At meum iſtud cogitatum quadam veriſimilitudine, aut naturæ ipſius convenientia, non illuſtri, & certa obſervatione aliqua nitebatur. Porro ad eiuſmodi obſervatio-

tionem pervenire non licuiſſet, niſi, mutata prima illa obſervandi ratione, me ipſum obſervatorem ſimul præſtitiſſem, & ſcopum, in quem obſervatio dirigeretur. In locum tympani, quo res a me in mea cellula ſpectandæ modo externæ luci, modo ipſi mihi obverterentur, duplicatum illud ſpatium ſubſtitui, quod initio huius ſermonis deſcriptum eſt. Eius ſubſidio in mea poteſtate iam fuit rem quamcumque manu arreptam, vel etiam nudam manum, imo & brachium, quantum vellem in externam claritatem proferre, atque inde in tenebras illas ſervata interiore obſcuritate reducere. Modo unuſquiſque intelligit alternatione iſta non modo liberum mihi, ſed plane fuiſſe neceſſarium, ſplendorem, ſi qui forte manui adhæſiſſet, obſervare.

XXXIV. Et revera cum primum novo iſto artificio uti cœpi, viſus ſum levia quædam lucis veſtigia in meis digitis animadvertere, præſertim ad coſtas, & apices. Rei novitate delectatus, nec tamen omnino captus nolui confeſtim meorum ſenſuum teſtimonio fidere. Itaque obſervationem ſedulo iterare, externæ luci modo hanc, modo illam manus partem obiicere, viſus aciem in ipſam mox retractam acriter intendere, loca diligenter notare, quæ maxime ſplendeſcere viderentur, non minus accurate lucem eam intuendo perſequi, viſurus an digitorum varium flexum, & manus univerſæ agitationem ſequeretur, conſtanti videlicet ad eaſdem partes adhæſione, demum quæcumque obſervando aſſecutus fuiſſem, magno ſtudio inter ſe comparare. Fructu non caruit hæc diligentia. Omnia tandem me prima obſervatione minime fuiſſe deceptum egregie declararunt.

XXXV. De luce cum eſſem iam certior factus, nova continuo ſuborta eſt dubitatio, an ea in ipſa cute, an potius in quapiam re alia, qua cutis infecta eſſet, inſideret. Sciebam quippe vel tenuiſſimi pulviſculi affrictu corpora de ſe obſcura non raro ſplendorem aliquem ſibi adſciſcere, quem ſtatim exuerent, ac pulvis abſterſus eſſet. Parum certe abfuit, quin eam ob cauſſam lucendi facultatem metallicis quibuſdam maſſis attribuerem. Facile autem corporum attrectatu manus inquinantur. Verum etiamſi alienis immunditiis non ſqualeat cutis, habet de ſe unde hominibus etiam munditiei, & cultus ſtudioſiſſimis ſordeſcat. Perungitur quippe naturaliter lenti cuiuſdam unguinis perpetua effuſio-

fuſione, quod alicubi exareſcens in furfures abit. Hos non ſemel expertus fueram diurnam lucem arripere, ac retinere. Id porro locum dedit ſuſpicioni, etiam tum pinguitudinem iſtam ſimili claritate ſuffundi, cum ſebacea forma, & viſum plane fugiens pellem oblinit; idcirco humanam cutem, ſi forte luceat, non proprio, ſed alieno ſplendore ornari. Suſpicioni pondus addidit lucis omnis extinctio, quoties digiti, aut tota manus calida perfunderentur. Minuebat ex adverſo eam adſcitæ lucis ſuſpicionem iſtarum partium etiam ante lotionem exquiſita munditia, & nitor earundem interdum ita vividus, atque tam late diffuſus, ut ſordibus, quæ cerni præ tenuitate non poſſent, vix adſcribendus videretur.

XXXVI. Cum ita diſtraheretur animus, & quæ modo attuli ancipitem afferrent cogitationem, accidit tandem XII kal. decembris ſuperioris anni, ut manus mea, quæ alterius obſervatoris iudicio mundiſſima undequaque viſa eſt, inuſitato ſplendore præfulſerit. Semel atque iterum lota eſt; exterſa; iterum ſoli expoſita; nihil, aut omnino parum de concepta luce remiſit; quinimo eam retinuit etiam madens. Sæpius & ſicca, & madida lentis foco percuſſa eſt in dorſo, in vola, quæ pars obſcura ut plurimum apparuerat, in ea eminentia quæ infra pollicem eſt, ac demum in apicibus digitorum. Omnia hæc loca egregie nituerunt, maxime vero digitorum apices, & pollicis quidem inter ceteros. Splendebant autem acrius tum apices, tum aliæ quædam manus partes, cum arctius compreſſæ dureſcebant. Ex quo intelligere datum eſt, luminis varietates, quas ante notaveram, diverſos cutis ſtatus, non adventitiæ alicuius rei accretionem ſequi. Et ſane interdum lux omnis e manu deleta eſt, ſola in calentem aquam immerſione, qua illa molliri tantummodo poterat, non ſordes certe, ſi quæ fuiſſent, abſtergi. Omnino enim in quamplurimis rebus obſervatum eſt, mollitudinem luci adverſari, favere ſiccitatem.

XXXVII. Verum univerſæ huic dubitationi, quæ induſtria mea non modo tolli hucuſque non potuit, ſed potius augeri, & confirmari viſa eſt, finem tandem attulit temporis opportunitas. Nam circa idus ianuarias huius anni cum ad eaſdem obſervationes rediiſſem, in univerſa tum manus,

tum

tum brachii ſuperficie tantum ſplendorem conſpexi, quantum nunquam ante conſpexeram. Namque & loca, quæ alias nitere conſueverant, nitere acrius viſa ſunt, & quæ ante obſcura fuerant, non mediocriter fulgere. Cauſſa in nulla extranea re inveniri potuit. Manus, & brachium erant mundiſſima. Itaque in ipſa cute quærenda fuit. Omnia vero diligenter conſideranti nihil in ea inſueti apparuit, præter id, quod inſignis tempeſtatis mutatio afferre potuit. Sæviebat per eos dies acerrimum frigus. Nemini vero ignotum eſt, cutem frigore aſperam fieri, ſtrigoſam, duriuſculam, pallentem. Neque minus certum eſt, lucem corporibus, in quibus hæc inſint, libenter adhærere. Ita & omnis de iſta luce dubitatio ſublata eſt, & ſplendoris dignitas humanæ cuti non improbabili ratione vindicata.

XXXVIII. Et iam terreſtris huius naturæ præcipua regna perluſtravimus. Cuius laboris cum is tandem fructus exiſtat, ut ampliſſimam in omnia corpora lucis poteſtatem minime dubiis obſervationibus demonſtraverimus, iam id omne, quod nobis initio propoſitum fuit, videmur eſſe conſecuti. Nempe omnis hæc noſtra inveſtigatio id unum ſemper ſpectavit, ut admiranda naturæ opera, quoad nobis liceret, ſcrutaremur; eorum vero abſconditas rationes aliorum perſpicacitati detegendas relinqueremus. Hoc ingenii eſt, quo quam parum valeamus, nimis intelligimus; illud induſtriæ, ac diligentiæ, qua præſtare laudabile aliquid poteſt etiam non ingenioſus. Veruntamen ut phyſicorum utilitati, & commodo, quantum fieri poteſt, ſerviamus, ad ſumma quædam capita obſervationes hactenus recenſitas contrahemus; quæ inter ſe nexa, quæ conſequi ex aliis videbuntur, ea opportune indicabimus; audebimus etiam aliquid coniectari, ſi probabili coniecturæ ſit locus; quæſtiones movebimus, ſi quæ forte aliorum ingeniis ad philoſophandum excitamento fore videantur; his omnibus recentes obſervationes interſerentur, quæ aut veteribus momentum addant, aut viam ſternant ad nova cogitata. Quæ cum ea, qua nobis conceſſum erit, diligentia præſtiterimus, univerſo huic commentario finem imponemus.

GABRIELIS MANFREDII

De eliminandis ab æquatione arcubus circularibus, & alia.

I. NOtiſſimum eſt theorema: ſi ſint duo arcus circuli habentis radium R, quorum tangentes ſint, maioris quidem A, minoris vero B, tangentem arcus eiuſdem radii R, qui ſit ſumma duorum illorum arcuum, fore $\frac{RR \times \overline{A + B}}{RR - AB}$. At vero tangentem arcus eiuſdem radii R, qui ſit differentia duorum illorum arcuum, fore $\frac{RR \times \overline{A - B}}{RR + AB}$. Ex uberrimo hoc fonte quamplurima profluunt theoremata ad ſignificandas tangentes arcuum multiplicium, & ſubmultiplicium. Nam tangentes ſummæ trium, quatuor, uno verbo, quotvis arcuum eiuſdem circuli radio r deſcripti, quorum ſingulorum tangentes ſint a, b, c *&c.* hoc uno theoremate licet componere. Arcus quippe, qui complectitur tres arcus, quorum tangentes ſunt a, b, & c, eſt ſumma duorum arcuum, quorum unus tangentem habet c, alter ipſe eſt ſumma duorum arcuum, quorum tangentes ſunt a, & b, adeoque huius poſterioris tangens eſt $\frac{rr \times \overline{a + b}}{rr - ab}$. Itaque opus eſt tantummodo in formula $\frac{RR \times \overline{A + B}}{RR - AB}$ ſcribere r loco R, & loco A ponere $\frac{rr \times \overline{a + b}}{rr - ab}$, & loco B ſcribere c, conſurget expreſſio tangentis arcus, cuius radius r, complectentis tres arcus, quorum tangentes ſunt a, b, & c. Expreſſio autem

erit

erit $\frac{rr \times \overline{a+b+c-abc}}{rr-ab-ac-cb}$. Et ſi quatuor ſint arcus, quorum tangentes ſint a, b, c, f. Sufficiet in canone $\frac{RR \times \overline{A+B}}{RR-AB}$ loco A ponere $\frac{rr \times \overline{a+b+c-abc}}{rr-ab-ac-bc}$ (tangentem arcus, qui adæquat tres arcus ſimul ſumptos, quorum tangentes ſunt a, b, & c) & loco B ponere f, & obtinebimus canonem pro exprimenda tangente arcus, qui complectitur quatuor arcus habentes pro tangentibus a, b, c, f; canon autem erit

$$\frac{r^4 \times \overline{a+b+c+f} - rr \times \overline{abc+abf+acf+bcf}}{rr \times \overline{rr-ab-ac-cb-bf-cf-af+abcf}}.$$

II. Pro quovis autem numero arcuum, quorum omnium radius ſit r, ſingulorum tangentes ſint a, b, c, f, g, h &c. numero quotvis, tangens arcus, qui omnes illos arcus complectitur, exprimetur per fractionem, cuius numeratoris primus terminus eſt ſumma omnium tangentium affecta ſigno +, terminus alter eſt ſumma omnium productorum ex ſingulis ternis tangentibus affecta ſigno —, tertius terminus eſt ſumma omnium productorum ex ſingulis quinis tangentibus affecta ſigno +, quartus eſt ſumma omnium productorum ex ſingulis ſeptenis tangentibus affecta ſigno —, atque ita progrediendum eſt quouſque ex dato tangentium numero conflari poterunt producta capientia numerum imparem ipſarum tangentium; qui ſane termini ſinguli in eam radii poteſtatem ducendi ſunt, quæ illos omnes ad unam, eamdemque dimenſionem redigat, denominatoris dimenſiones unitate ſuperantem; ſigna autem terminorum + & — alternatim ſe ſe excipiunt. Fractionis autem denominatorem ſequenti ratione comparabis. Primus itaque denominatoris terminus erit id quod relinquitur dempta ex quadrato radii ſumma omnium productorum ex ſingulis binis tangentibus, ſigno + affectum. Alter terminus erit ſumma omnium productorum ex ſingulis quaternis tangentibus affecta ſigno —. Tertius erit ſumma omnium productorum ex ſingulis ſexenis tangentibus affecta ſigno —, atque ita progrediendum eſt, quouſque in cenſum venerint omnia producta capientia numerum parem datarum tangentium, ſigna vero +, & — hic

quoque alternatim ſe excipiant, & dimenſiones terminorum per congruam radii poteſtatem ſunt adæquandæ.

III. Quod ſi arcus omnes, quorum tangentes dantur, inter ſe æquales eſſe accidat, quicumque tandem ſit eorum numerus, tangens ſummæ eorumdem, ſeu tangens arcus multipli iuxta numerum datorum arcuum eodem plane artificio emerget; omnia quippe producta ex quotvis datarum tangentium numero, in poteſtates datæ tangentis tranſeunt, quarum quidem numerus per vulgatas combinationum leges ſemper innoteſcit. Ut ſi quæratur tangens arcus quintupli eius, cuius tangens eſt a, radius vero r, ſive eius arcus, qui quinquies complectitur arcum tangentis a, quandoquidem tangens arcus, qui ſit ſumma quinque arcuum habentium tangentes a, b, c, f, g ex allato theoremate eſt

$$\frac{r^4 \times \overline{a+b+c+f+g} - rr \times \overline{abc+abf+acf+cbf+abg+acg+bcg+bfg+cfg+afg} + abcfg}{rr \times \overline{rr-ab-ac-cb-bf-cf-af-ag-bg-cg-fg} + abcf + abcg + abfg + acfg + bcfg}$$

opus eſt tantum loco omnium datarum tangentium ſcribere eamdem tangentem a, eritque tangens arcus quintupli $= \frac{5r^4 a - 10rra^3 + a^5}{r^4 - 10aarr + 5a^4}$; numeri autem, qui ſunt in coefficientibus terminorum tam in numeratore, quam in denominatore ſunt numeri complexuum, qui in dato tangentium numero fieri poſſunt capientium tot tangentes quota eſt dimenſio tangentis in uno quovis termino. Sic termino numeratoris ſecundo $10rra^3$, præfigitur numerale coefficiens 10, quia decem ſunt producta ex ſingulis ternis, quæ fieri poſſunt in datis quinque tangentibus; termino autem $5a^4$ in denominatore appoſitum eſt coefficiens numerale 5, eo quod quinque ſunt producta ex ſingulis quaternis, quæ ex datis quinque tangentibus conflantur.

IV. Tandem ſi data arcus cuiuſvis tangente quæſtio ſit de invenienda tangente arcus ſubmultiplicis iuxta quemvis datum numerum integrum, vocando b tangentem arcus dati, x vero tangentem quæſitam arcus ſubmultiplicis, ex aſſumpta x erues tangentem arcus, qui ſit iuxta datum numerum multiplex arcus habentis tangentem x. Atque hæc adæquanda eſt datæ tangenti b, ut comparetur æquatio, in qua quæſita x eſt ipſa tangens arcus iuxta datum numerum ſubmultiplicis eius, cuius tangens eſt data b. Ut ſi data tangente

gente arcus, quam vocamus b, quæratur tangens arcus, qui ſit quintans dati arcus, quam vocamus x, inveniemus tangentem arcus, qui ſit quintuplus arcus habentis tangentem x, quæ erit $\frac{5r^4x - 10rrx^3 + x^5}{r^4 - 10rrxx + 5x^4}$. Cum hæc ſit tangens arcus quintupli eius, qui tangentem habet x, erit ipſa b. Itaque habebimus æquationem $x^5 - 5bx^4 - 10rrx^3 + 10rrbxx + 5r^4x - r^4b = o$, in qua x eſt tangens quæſita arcus ſubquintupli eius, cuius datur tangens b. Aequationum autem hac ratione conſtitutarum omnes radices reales ſunt, uſumque obtinent in ſectionibus arcuum omnium habentium datam tangentem in tot partes, quotus eſt datus numerus.

V. Pari ratione ſi quæratur tangens x arcus, qui ſit ad arcum, cuius data ſit tangens b, in ratione quavis numeri dati ad numerum datum, veluti ut 3 ad 5, æquatio obtinebitur pro invenienda tangente x. Nam cum arcus tangente x iubetur eſſe ad arcum, cuius tangens b, in ratione 3 ad 5, hinc conſequitur tres arcus, quorum ſingulorum tangens eſt b, æquales fore quinque arcubus, quorum ſingulorum tangens eſt x. Itaque tangens arcus tripli eius, qui habet tangentem b, quæ eſt $\frac{3rrb - b^3}{rr - 3bb}$, adæquanda eſt tangenti arcus quintupli eius, qui tangentem habet x, quæ eſt $\frac{x^5 - 10rrx^3 + 5r^4x}{r^4 - 10rrxx + 5x^4}$, quapropter æquatio erit

$$x^5 + \frac{5b^3 - 15rrb}{rr - 3bb}x^4 + \frac{-10r^4 + 30rrbb}{rr - 3bb}x^3 + \frac{30r^4b - 10rrb^3}{rr - 3bb}xx + \frac{5r^6 - 15r^4bb}{rr - 3bb}x + \frac{-3r^6b + r^4b^3}{rr - 3bb} = o.$$

VI. Hæc quidem omnia ex communi analyſi excerpta ſunt, nec quidquam novi præſeferunt. Iam ad eorum uſum in æquationibus differentialibus progrediendum eſt.

VII. Aequatio differentialis, cuius omnes termini integrantur per logarithmos, in æquationem algebraicam tandem faceſſit. Ut ſi æquatio fuerit $\frac{adx}{x} = \frac{2ady}{y} - \frac{ady}{y-a}$, quæ in-

tegrata eſt $lx = 2ly - l\overline{y - a}$, poterit hæc ad duos tantummodo terminos redigi, ſcribendo $lx = l\frac{yy}{y - a}$, & ab æqualitate logarithmorum progrediendo ad æqualitatem quantorum, quorum ſunt logarithmi, abiicientur ab æquatione logarithmi, & ſcribi poterit $x = \frac{yy}{y - a}$. Qua autem ratione in integranda per logarithmos æquatione illa primaria $\frac{adx}{x} = \frac{2ady}{y} - \frac{ady}{y - a}$ conſtantes arbitrariæ in æquationem poſſint induci, ſatis notum eſt, neque opus eſt in his diutius immorari.

VIII. Quid ſimile in æquationibus advenit, in quibus ſinguli termini per arcus circuli integrantur; ab his enim, non ſecus ac in æquationibus logarithmicis accidit, ad algebraicas æquationes datur regreſſus, modo legitima arguendi ratio in huiuſmodi regreſſu ubique ſervetur. De huius itaque modi æquationibus, deque earum in algebraicas converſione nonnulla notatu digna hic ſunt referenda.

IX. Quoties datæ æquationis differentialis indeterminatæ cum earum differentialibus ab invicem ſeiunctæ duas æquationis partes conſtituunt, quarum utraque eſt fractio rationalis, cuius denominator nullam radicem habet realem, ſed omnes imaginarias, tunc ſæpenumero accidit, ut totum integrationis negotium per ſolos arcus circuli notæ tangentis, ac radii conficiatur, quapropter non raro æquatio in algebraicam abit; ſecus ſi denominator aliquas, aut omnes radices reales habeat; intervenientibus quippe in integratione logarithmis, ſimulque arcubus circularibus æquatio in algebraicam converti nequit; ſunt enim ſibi invicem arcus circuli, & logarithmi impedimento, ne æquatio ab illis expurgetur, & algebraica evadat. Exemplis rem illuſtrabimus.

X. Linea quæratur, cuius ſubtangens ſumpta in axe abſciſſarum x ſit ad ordinatam, ut $xx + aa$, ad $yy + aa$. Erit æquatio $\frac{dx}{xx + aa} = \frac{dy}{yy + aa}$. Hæc ducta in aa evadit $\frac{aadx}{xx + aa} = \frac{aady}{yy + aa}$. Integrando utramque æquationis partem

tem patet fore, ut in quæſita linea arcus tangentem habens x, perpetuo adæquet arcum, cuius tangens ſit y, ſumptis his arcubus in eodem circulo radium habente a. Quoniam autem duorum arcuum æqualium in eodem circulo ſumptorum tangentes quoque inter ſe ſe æquales eſſe oportet, erunt in quæſita linea ipſæ x, & y inter ſe ubique æquales, eritque æquatio $x = y$, quæ eſt ad rectam angulum ſemirectum cum axe complectentem.

XI. Cum autem integrale formæ $\frac{aadx}{xx + aa}$ non ſit ſolummodo arcus radio a, & tangente x, ſed etiam arcus ille, addito quovis arcu conſtante, idemque accidat etiam in alia forma $\frac{aady}{yy + aa}$, liberum eſt nobis pro integrali prioris partis æquationis ſcribere ſummam arcus, cuius tangens x cum arcu quocumque, cuius tangens ſit conſtans arbitraria b. Et pro integrali alterius partis æquationis ſcribere arcum, cuius tangens y, addito (vel dempto) arcu tangentem habente conſtantem quamcumque ad arbitrium aſſumptam c. Porro complexus duorum arcuum, quorum unius tangens ſit x, alterius b, arcus eſt cuius tangens eſt $\frac{aa \times \overline{x + b}}{aa - bx}$, & arcus alter, qui componitur ex arcu habente tangentem y, & ex alio habente tangentem c, arcus eſt tangentem habens $\frac{aa \times \overline{y + c}}{aa - cy}$. In optata igitur linea arcus tangentem habens $\frac{aax + aab}{aa - bx}$ æqualis eſt ubique arcui tangentem habenti $\frac{aay + aac}{aa - cy}$. Et quoniam loco additionis arcuum conſtantium ſubductio adhiberi poteſt, quin &, ſi lubeat, hic ſubductio, ibi additio, hinc tangentes b, & c, ut libet poſitivas, vel negativas aſſumi poſſe conſequitur, modo termini aab, & bx ſigna inter ſe oppoſita habeant, idemque de terminis aac, & cy eſt dicendum. Nunc vero, poſtquam arcus duos inter ſe æquales præbet æquatio, quorum videlicet tangentes ſunt $\frac{aax \pm aab}{aa \mp bx}$, & $\frac{aay \pm aac}{aa \mp cy}$, ab

ar-

arcubus ad tangentes procedendo, recte concludemus æquationem pro quæſita linea algebraicam eſſe $\frac{aax \pm aab}{aa \mp bx} = \frac{aay \pm aac}{aa \mp cy}$, in qua ſignorum viciſſitudines quatuor præbent æquationes ad hyperbolam inter aſſimptotos, quæ ſunt

$$xy \frac{-bc - aa}{b - c} y \quad \frac{+bc + aa}{b - c} x \quad + aa = 0$$

$$xy \frac{-bc + aa}{b + c} y \quad \frac{+bc - aa}{b + c} x \quad + aa = 0$$

$$xy \frac{+bc + aa}{b - c} y \quad \frac{-bc - aa}{b - c} x \quad + aa = 0$$

$$xy \frac{+bc - aa}{b + c} y \quad \frac{-bc + aa}{b + c} x \quad + aa = 0$$

XII. Si poſtulatum fuiſſet, ut ſubtangens quæſitæ lineæ eſſet ad duplam ordinatam, ut $xx + aa$ ad $yy + aa$, æquatio ad curvam quæſitam eſſet $\frac{dx}{aa + xx} = \frac{2dy}{aa + yy}$, quam æquationem, in aa prius ductam, ſi ad integralia pura redigamus, emerget lineæ quæſitæ conditio, ut nimirum arcus tangentem habens x ſumptus in circulo radio a, perpetuo æqualis ſit duplo arcui in eodem circulo ſumpto, cuius tangens eſt y. Horum autem arcuum tangentes ſunt x, & $\frac{2aay}{aa - yy}$. Hinc tranſeundo ab arcubus ad tangentes (quandoquidem arcus in eodem circulo ſumuntur), erit æquatio algebraica pro linea quæſita $x = \frac{2aay}{aa - yy}$, ſive $aax - xyy -$

$2aay = 0$. At ſi dum æquationem integramus arcus conſtantes addere, vel demere velimus, exurget quæſitæ lineæ alia conditio, ut videlicet arcus circuli tangentem habens x, addito vel dempto arcu tangentem conſtantem b habente, ubique ſit æqualis arcui circuli, cuius tangens ſit $\frac{2aay}{aa - yy}$, addito vel dempto arcu circuli tangentem conſtantem habente c. Quorum arcuum utramque æquationis partem conſtituentium tangentes cum ſint $\frac{aax + aab}{aa - bx}$, & $\frac{aac + 2aay - cyy}{aa - 2cy - yy}$, æquatio inter has tangentes algebraica erit pro curva quæſita $\frac{aax + aab}{aa - bx} = \frac{aac + 2aay - cyy}{aa - 2cy - yy}$, in qua b, & c eſſe poſſunt quanta poſitiva, & negativa, eo quod arcus tangentium b, & c poſſunt addi arcubus, quibus applicantur, & ab iis demi, ſi libuerit, incolumi æquatione.

XIII. At vero ſi plures ſint in æquatione differentiali termini, quam duo, quorum unuſquiſque per arcum notæ tangentis ſit integrabilis, oportebit, poſt integratam æquationem illos, qui ad eaſdem æquationis partes ſunt, in unum colligere, ut tota æquatio inter duos ad ſummum arcus conſtituta ſit.

XIV. Ut ſi propoſita fuiſſet æquatio $\frac{aadx}{aa + xx} = \frac{2aady}{aa + yy} + \frac{aady}{\overline{a + y}^2 + aa}$. In qua unuſquiſque terminus per arcum circuli notæ tangentis integratur, adeoque curvæ quæſitæ ea eſt conditio, ut arcus tangente x adæquet ubique duplum arcus tangente y una cum arcu tangente $a + y$ ſumptis omnibus his arcubus in circulo, cuius radius eſt a; ut hæc æquatio præparetur ad eliminationem arcuum, & deinde in algebraicam vertatur, curandum eſt, ut unus ſit arcus ad unam æquationis partem, alter ad alteram. Quemadmodum enim ab æquatione logarithmica $la + lc = lx + ly$ non recte tranſitus fit ad algebraicam $a + c = x + y$, ſed tamen ab æquatione unius logarithmi cum uno logarithmo $lx = ly$ recte arguitur $x = y$, modo omnes logarithmi ab una, eademque logiſtica decerpti ſint, ita in arcubus circularibus, ſi com-

ſi complexus plurium arcuum, quorum tangentes notæ ſunt, æqualis ſit complexui aliorum arcuum, quorum etiam tangentes ſint notæ, non recte procedimus ab æqualitate ſummæ arcuum ad æqualitatem ſummæ tangentium, ſed omnes arcus ad unam, eamdemque æquationis partem conſtituti in unum arcum notæ tangentis ſunt colligendi. In propoſita æquatione arcus, cuius differentiale eſt $\frac{2aady}{aa+yy}$, tangentem habet $\frac{2aay}{aa-yy}$, & radium a; arcus autem, cuius differentiale eſt $\frac{aady}{\overline{a+y}^2+aa}$, tangentem habet $a+y$, & radium eumdem a; horum itaque duorum arcuum ſumma tangentem habet $\frac{a^3+3aay-ayy-y^3}{aa-2ay-3yy}$. Arcus igitur hanc tangentem habens æqualis eſt arcui tangentem x habenti; nam quando æquatio inter duos arcus eiuſdem circuli, & notæ tangentis verſatur, arcus abiicere licet, & ad æquationem algebraicam delabi, quæ erit $x=\frac{a^3+3aay-ayy-y^3}{aa-2ay-3yy}$. Hic nil obſtat, quin fiat arcuum conſtantium additio, aut ſubductio ad unam, vel ad utramque æquationis partem. Si utrique æquationis parti addere velimus arcum conſtantem, priori quidem arcum, cuius tangens ſit b, poſteriori vero arcum, cuius tangens ſit c, æquatio algebraica evadet $\frac{aax+aab}{aa-bx}=$

$$\frac{a^5+3a^4y-a^3yy-aay^3+a^4c-2a^3cy-3aacyy}{a^4-2a^3y-3aayy-a^3c-3aacy+acyy+cy^3}.$$

XV. Nemini negotium faciet ratio integrandæ fractionis $\frac{bbdx}{aa+xx}$, ſtatim quippe advertet unuſquiſque, hanc non aliam eſſe a fractione $\frac{bb}{aa}\times\frac{aadx}{aa+xx}$, atque adeo integrale propoſitæ fractionis eſſe arcum quemdam circuli radio a deſcripti, qui ſit ad arcum circuli eodem radio deſcripti habentem x pro tangente in ratione bb ad aa.

XVI.

XVI. Quid ſi in æquatione fractiones numerales interveniant? Tota prius æquatio fractionibus eſt liberanda, tum nil obſtat, quo minus ad æquationem algebraicam per traditas regulas properemus. Veluti ſi fuerit

$\frac{\frac{2}{3}aadx}{aa+xx} = \frac{\frac{1}{2}aady}{\overline{a-y}^2+aa}$, eliminatis fractionibus numeralibus

erit $\frac{4aadx}{aa+xx} = \frac{3aady}{\overline{a-y}^2+aa}$. In figura igitur quæſita quatuor arcus, quorum ſingulorum tangens ſit x, æquales erunt tribus arcubus, quorum uniuſcuiuſque tangens ſit $a-y$; arcus autem hi omnes in uno, eodemque circulo, cuius radius ſit a, ſunt capiendi. Sane quadruplicis arcus habentis tangentem x tangens eſt $\frac{4a^4x-4aax^3}{a^4-6aaxx+x^4}$, & tripli arcus habentis tangentem $a-y$ tangens eſt $\frac{6aay-9ayy+3y^3}{6ay-2aa-3yy}$. Igitur arcus, quorum hæ ſunt tangentes inter ſe æquales erunt in figura quæſita, & tangentes ipſæ inter ſe etiam æquales erunt; quare erit æquatio algebraica $\frac{4a^4x-4aax^3}{a^4-6aaxx+x^4} = \frac{6aay-9ayy+3y^3}{6ay-2aa-3yy}$; non memoro hic quoque adhiberi poſſe arcuum conſtantium, quorum tangentes ſint b, & c, additionem, vel ſubductionem, & algebraicas inde profluere æquationes inventis tangentibus arcuum, qui complectantur & arcus conſtantes, & illos, quorum tangentes per modo allatas fractiones ſignificantur.

XVII. At ſi ſint inter ſe diverſi radii circulorum, in quibus ſumendi ſunt arcus, quibus æquatio integratur, tunc ad communem circulum illi ſunt referendi. Si fuerit $\frac{aadx}{aa+xx} = \frac{bbdy}{bb+yy}$, conditio figuræ, quam hæc æquatio denotat, erit quod arcus circuli radio a deſcripti tangentem habens x, ſit ubique æqualis arcui circuli radio b deſcripti tangentem y habenti. Ut hoſce duos arcus ad eumdem circulum radio a redigamus, oportet tantum meminiſſe, arcum

circuli radio a ſimilem arcui circuli radio b, tangentem y habenti, habere tangentem $\frac{ay}{b}$, & eſſe ad hunc arcum, ut a ad b, quapropter loco arcus circuli radio b deſcripti tangentem y habentis, ſcribi poteſt arcus circuli radio a deſcripti, cuius tangens ſit $\frac{ay}{b}$, ſitque in b ductus, & per a diviſus. Ut ſi b ſit $3a$, quo caſu æquatio ſit $\frac{aadx}{aa+xx} = \frac{9aady}{9aa+yy}$, conditio quæſitæ lineæ erit, ut arcus circuli radio a, tangente x, ubique æqualis ſit triplo arcui circuli eodem radio a deſcripti, cuius tangens ſit $\frac{1}{3}y$, & in univerſum, ut arcus circuli, cuius elementum eſt $\frac{bbdy}{bb+yy}$, redigatur in arcum circuli, cuius radius ſit a, loco elementi $\frac{bbdy}{bb+yy}$ ſcribemus $\frac{\frac{b}{a} \times aa \times \frac{ady}{b}}{aa + \frac{aayy}{bb}}$, nam hæc ſcribendi forma a priore illa nihil differt, & conſiſtit in quadrato radii a ducto in differentiale tangentis $\frac{ay}{b}$, diviſo per ſummam quadrati radii a cum quadrato tangentis $\frac{ay}{b}$, quod totum ductum eſt in conſtantem $\frac{b}{a}$, itaque eius integrale erit arcus circuli radio a, tangente $\frac{ay}{b}$, ſed ductus in b, & diviſus per a.

XVIII. Verum non poterimus explicare in terminis algebraicis tangentem arcus, qui ſit ad arcum datæ tangentis in ratione a ad b, niſi a, & b ſint inter ſe, ut numerus datus ad numerum datum. Hinc conſequitur æquationem, qualis eſt modo propoſita $\frac{aadx}{aa+xx} = \frac{bbdy}{bb+yy}$, non poſ-

poſſe in algebraicam converti, niſi cum datur in numeris ratio a ad b. In allato exemplo, ubi b ponitur $= 3a$, erit æquatio $\frac{aadx}{aa + xx} = \frac{3 \times aa \times \frac{1}{3}dy}{aa + \frac{yy}{9}}$, & conditio curvæ eſt, ut arcus tangentem habens x, ſit ubique æqualis triplo arcui tangentem habenti $\frac{1}{3}y$, ſumptis arcubus in circulo, cuius radius a. Triplicis arcus tangentem habentis $\frac{1}{3}y$, tangens eſt $\frac{27aay - y^3}{27aa - 9yy}$, quare ſunt inter ſe æquales arcus circuli radio a, quorum unius tangens x, alterius $\frac{27aay - y^3}{27aa - 9yy}$, & (quod inde conſequitur) tangentes ipſæ x, & $\frac{27aay - y^3}{27aa - 9yy}$ inter ſe æquales ſunt. Si arcuum conſtantium, quorum tangentes b, & c, additionem nolimus negligere, habebimus æquationem pro quæſita linea

$$\frac{aax + aab}{aa - bx} = \frac{27a^4 y - aay^3 + 27a^4 c - 9aacyy}{27a^4 - 9aayy - 27aacy - cy^3},$$

in qua b, & c poſſunt eſſe cuiusvis ſigni.

XIX. Hactenus in æquationibus differentialibus verſati ſumus, in quibus indeterminatarum nulla ſecundam dimenſionem excedit. Verum ſi in denominatoribus fractionum, quibus æquatio conſtituitur, indeterminatarum altera, aut utraque ad quartam dimenſionem aſcendat, ſintque omnes denominatorum radices, ſive diviſores ſimplices imaginarii, qua ratione arcus circulares eruantur, quibus fractiones integrari poſſunt, quæ ſit illorum tangens, qui radius circuli, operæ pretium eſt paullo luculentius explicare.

XX. Fractionis rationalis integrandæ denominator, ſi plures habeat, quam duas radices imaginarias, in factores reales dividendus eſt, ex quorum ductu ille componatur, & in quorum factorum nullo fluens ſecundam dimenſionem excedat. Hoc ubi fecerimus, dividenda deinde eſt fractio ipſa in totidem fractiones, quot ſunt factores illi, ſingulas habentes pro denominatore ſingulos factores illos, quarum deinde fractionum unamquamvis ſeorſim facili negotio integrabimus.

XXI. Ut ſi fuerit propoſita fractio integranda

$$\frac{\frac{6}{11}axxdx + aaxdx}{x^4 + \frac{9}{2}aaxx + 3a^3x + \frac{85}{16}a^4},$$

cuius denominator quatuor eſt radicum, earumque nulla eſt realis. Diviſo denominatore in duos factores reales $xx - ax + \frac{17}{4}aa$, & $xx + ax + \frac{5}{4}aa$, ex quorum ductu ipſe coaleſcit, fractionem deinde in duas fractiones partiemur, quarum una unum ex his diviſoribus, altera alterum habeat pro denominatore. Sane ſi conſtet, (ut in allato exemplo) qui ſint duo illi diviſores reales, ex quibus conflatur fractionis denominator, quando hic quatuor eſt tantummodo dimenſionum, vel tres diviſores, quando denominator eſt ſex dimenſionum, & ita porro, quod reliquum eſt, diviſionem nimirum fractionis in fractiones habentes ſingulos illos factores pro denominatoribus, facile abſolvemus; quippe ſunt theoremata quædam pro diviſione fractionis propoſitæ in alias fractiones ſimpliciores, quarum una quævis unum habeat pro denominatore ex diviſoribus denominatoris fractionis propoſitæ. Dabimus nunc theorema pro diviſione fractionis, cuius denominator quatuor ſit dimenſionum, factores habens duos, quorum uterque duarum ſit dimenſionum. Canon fractionis differentialis huiuſmodi eſto

$$\frac{Ax^3dx + Bxxdx + Cxdx + Kdx}{\overline{xx + Mx + N} \times \overline{xx + Px + Q}}.$$

Dividitur illa in duas, quæ ſunt

$$\frac{fxdx + gdx}{xx + Mx + N}, \quad \& \quad \frac{hxdx + ldx}{xx + Px + Q},$$

in quibus coefficientia f, g, h, l ſunt fractiones conſtantes, quarum communis denominator eſt $\overline{N - Q}^2 + \overline{NP - MQ} \times \overline{P - M}$; numeratores vero ſunt

pro quanto f

$$K \times \overline{M - P} + \overline{B - AM} \times \overline{NP - MQ} + \overline{C - AN} \times \overline{Q - N},$$

pro quanto h

$$K \times \overline{P - M} + \overline{B - AP} \times \overline{MQ - NP} + \overline{C - AQ} \times \overline{N - Q},$$

pro

pro quanto vero g

$$K \times \overline{Q - N + MM - MP} + CN \times \overline{P - M} + BN \times \overline{N - Q} + AN \times \overline{MQ - NP},$$

tandem pro quanto l

$$K \times \overline{N - Q + PP - MP} + CQ \times \overline{M - P} + BQ \times \overline{Q - N} + AQ \times \overline{NP - MQ}.$$

XXII. Iam in propoſita fractione $\dfrac{\frac{6}{11} axxdx + aaxdx}{x^4 + \frac{9}{2} aaxx + 3a^3x + \frac{85}{16} a^4}$, cuius denominator productum eſt duorum factorum realium $xx - ax + \frac{17}{4} aa$, & $xx + ax + \frac{5}{4} aa$, valores coefficientium conſtantium f, h, g, l erunt $f = o$, $h = o$, $g = \frac{17}{22} aa$, & $l = -\frac{5}{22} aa$, & fractio propoſita dividitur in duas, quæ ſunt $\dfrac{17aadx}{22 \times \overline{xx - ax + \frac{17}{4} aa}}$, & $\dfrac{-5aadx}{22 \times \overline{xx + ax + \frac{5}{4} aa}}$. Ita, que ſi æquatio ſit $\dfrac{aady}{22 \times \overline{aa + yy}} = \dfrac{\frac{6}{11} aaxxdx + a^3xdx}{x^4 + \frac{9}{2} aaxx + 3a^3x + \frac{85}{16} a^4}$ poſt diviſionem fractionis habentis x, & dx in duas $\dfrac{17aadx}{22 \times \overline{xx - ax + \frac{17}{4} aa}}$, & $\dfrac{-5aadx}{22 \times \overline{xx + ax + \frac{5}{4} aa}}$, habebimus

$$\frac{aady}{22 \times \overline{aa + yy}} = \frac{17aadx}{22 \times \overline{xx - ax + \frac{17}{4} aa}} \quad \frac{-5aadx}{22 \times \overline{xx + ax + \frac{5}{4} aa}};$$

omiſſo vero communi denominatorum diviſore numerico 22 (in quem finem aſſumpſi primam æquationis partem, & ipſam habentem hunc diviſorem in denominatore, qua aſſumptione mirum in modum univerſa hæc ſupputatio contrahi-

trahitur) iam ad integrationem parata eſt æquatio. Eſt quippe arcus circuli radio a, tangentem habens y, ubique æqualis exceſſui, quo quadrans decies & ſepties ſumptus arcus cuiuſdam habentis tangentem $x - \frac{1}{2}a$ ſumpti in circulo, cuius radius eſt $2a$, ſuperat quintuplum arcum, cuius tangens eſt $x + \frac{1}{2}a$ ſumptum in circulo, cuius radius eſt a; hi enim arcus ſunt integralia fractionum, quæ æquationem conſtituunt. Nunc ut revocemus arcum, cuius tangens eſt $x - \frac{1}{2}a$, ſumptum in circulo, cuius radius eſt $2a$, ad arcum circuli, cuius radius ſit a, loco fractionis $\frac{17aadx}{xx - ax + \frac{17aa}{4}}$, ſeu alterius eiuſdem cum illa valoris $\frac{17}{4} \times \frac{4aadx}{\overline{x - \frac{1}{2}a}^2 + 4aa}$, ſcribemus $\frac{\frac{17}{2} \times aa \times \frac{1}{2}dx}{\frac{\overline{x - \frac{1}{2}a}^2 + aa}{4}}$; hæc enim poſterior ſcribendi forma ſtatim oſtendit fractionis integrale eſſe medietatem decies & ſepties ſumptam arcus cuiuſdam habentis radium a, & tangentem $\frac{x - \frac{1}{2}a}{2}$. Sunt itaque omnes arcus ad communem circulum radio a deſcriptum revocati; & quæſitæ figuræ ea eſt conditio, ut arcus, tangente y, ubique adæquet exceſſum, quo medietas decies & ſepties ſumpta arcus cuiuſdam habentis $\frac{x - \frac{1}{2}a}{2}$ pro tangente ſuperat quintuplum arcus habentis tangentem $x + \frac{1}{2}a$; & duplicatis omnibus huius æquationis terminis, erit conditio lineæ quæſitæ, quod duplum arcus habentis y pro tangente, ubique æquale ſit exceſſui, quo arcus decies & ſepties ſumptus, cuius tangens ſit $\frac{x - \frac{1}{2}a}{2}$, ſuperat decuplum arcus, cuius tangens ſit $x + \frac{1}{2}a$; omnes vero arcus capiendi ſunt in circulo, cuius radius ſit a. Ad compendium nonnihil faciet, ſi arcus, cuius tangens eſt $x + \frac{1}{2}a$ ad alteram æquationis partem transferatur, ſcribaturque ſummam dupli arcus,

cuius

cuius tangens eſt y cum arcu, cuius tangens eſt $x + \frac{1}{2}a$ decies ſumpto, ſemper æqualem eſſe arcui, cuius tangens eſt $\frac{x - \frac{1}{2}a}{2}$ decies & ſepties ſumpto. Iam ut æquationem ab arcubus ad tangentes traducamus, ſicque in algebraicam convertamus, opus eſt invenire tangentem arcus decupli eius, cuius tangens eſt $x + \frac{1}{2}a$, deinde tangentem ſummæ arcus habentis y pro tangente cum arcu illo decuplo, & hanc ſic inventam tangentem adæquare tangenti arcus, qui decies & ſepties complectitur arcum, cuius tangens eſt $\frac{x - \frac{1}{2}a}{2}$. Omnes autem hi arcus ex illo circulo ſumendi ſunt, cuius radius eſt a. Ad has tangentes in terminis algebraicis ſignificandas, earumque rationes algebraica æquatione referendas inter ſe, dimenſiones literæ x, & y ſimul ſumptæ ad vigeſimam octavam dimenſionem aſſurgunt, ut mirum videri poſſit, quod complexam adeo atque elevatam formularum compoſitionem poſtulet æquatio differentialis tam ſimplex, & plana, ut eſt propoſita

$$\frac{aady}{aa + yy} = \frac{\frac{6}{11} aaxxdx + a^3 xdx}{x^4 + \frac{9}{2} aaxx + 3a^3 x + \frac{85}{16} a^4}.$$

XXIII. Poterunt hic quoque arcubus, qui utramque æquationis partem componunt, admoveri arcus conſtantes, vel additione, vel ſubductione, quo ipſo æquatio, de qua ſuperiore numero actum eſt, adhuc nonnihilo magis implicita evadet.

XXIV. Verumtamen in allato exemplo, ideo ad algebraicam æquationem data eſt via ab æquatione inter arcus circulares, quia denominator fractionis habentis x, & dx in duos factores reales eſt diviſibilis, in quorum utroque fluens x duas habet dimenſiones. Poteſt itaque quæri num omnis formula omnes radices imaginarias habens in trinomia realia ſit ſemper diviſibilis, in quorum nullo fluens excedat ſecundam dimenſionem. De hoc adeo inter geometras ſemel dubitatum eſt, ut neminem lateat ipſos in analyſi

lyſi principes viros diu hæſiſſe ancipites, an forma omnium, quæ quatuor habent radices imaginarias, ſimpliciſſima $x^4 + a^4$ in duos factores reales poſſit dividi. Poſtquam vero clariſſimorum analyſtarum munere compertum eſt, illam eſſe productum duorum componentium realium $xx + ax\sqrt{2} + aa$, & $xx - ax\sqrt{2} + aa$, longe ulterius promota eſt dividendarum formularum facultas in diviſores reales trinomios, duas dimenſiones habentes, iamque in primo commentariorum huius academiæ volumine ratio tradita eſt dividendæ formulæ $x^{2m} + b^{2m}$, in diviſores numero m reales, quicumque ſit numerus m, quorum unuſquiſque duas habeat fluentis x dimenſiones, quæ etiam methodus ad formulas $x^{2m} + ax^m + b^{2m}$ extenditur, quin ad omnes formulas $x^n \pm b^n$, quicumque ſit numerus n modo integer, eodemque loco poſt formulæ diviſionem in factores reales, totum fractionis, cuius formæ illæ ſint denominatores, negotium perficitur uſque ad integrationem.

XXV. Nondum tamen res hæc eſt undique abſoluta; niſi enim certiores ſimus omnem formulam denominatoris, rationalem illam quidem, quo ad fluentem x, poſſe dividi in factores reales duarum dimenſionum, & ſi omnes eius radices ſint imaginariæ, nunquam tuto poterimus aſſerere, omnem fractionem rationalem unius fluentis per ſolas quadraturas ſectionum conicarum poſſe integrari.

XXVI. Agemus nunc de fractionibus, quarum denominatores ad quatuor tantum dimenſiones evectam continent fluentem, de denominatoribus altiorum poteſtatum tractationem in aliud tempus reiicientes.

XXVII. Dico itaque omnem formam realem, & rationalem unius fluentis z, in qua ipſa fluens quatuor tantummodo habeat dimenſiones, etſi omnes in illa fluentis valores ſint imaginarii, in duos factores ſemper dividi poſſe, ex quorum ductu illa componitur, quorum uterque duas ex illis radicibus continet, eoſque ambos reales. Formulam rationalem voco, in qua fluens z nullo ſigno radicali affecta eſt; formulam vero realem illam, in qua omnium terminorum coefficientia ſunt quanta realia.

XXVIII. Quæcumque ſit formula denominatoris fractionis integrandæ, certum eſt ſecundum terminum ex illa

tolli

tolli poſſe. Statuamus itaque denominatorem fractionis integrandæ iam ſecundo termino imminutum eſſe, quod quidem ideo aſſumimus, ut brevitati, & eorum, quæ dicenda ſunt, perſpicuitati, quantum in poteſtate eſt, ſit conſultum.

XXIX. Eſto itaque $y^4 + bbyy + c^3y + d^4$ denominator fractionis integrandæ, poſtquam ab eo ſecundus terminus ablatus eſt. Volo nunc denominatorem iſtum in alium tranſmutare, in quo coefficiens ſecundi termini idem ſit, ac coefficiens termini penultimi, ſuppletis in coefficiente termini ſecundi dimenſionibus, quæ deſunt, per radicem quadratam ultimi termini. Hoc ut aſſequar, ſcribo pro fluente y novam fluentem x, addita illi quadam conſtante incognita, & per ſupputationem determinanda, quæ ſit n. Itaque pono $x + n$ in locum y, in data fractione integranda. Denominator illius, qui erat $y^4 + bbyy + c^3y + d^4$ vertetur in

$$x^4 + 4nx^3 \begin{array}{l} + 6nn \\ + bb \end{array} xx \begin{array}{l} + 4n^3 \\ + 2nbb \\ + c^3 \end{array} x \begin{array}{l} + bbnn \\ + n^4 \\ + c^3n \\ + d^4 \end{array}$$

cum autem id, quod poſtulatur, ſit, ut $4n^3 + 2nbb + c^3$ coefficiens penultimi termini idem ſit, ac $4n$ coefficiens termini ſecundi, ſuppletis per radicem quadratam ultimi termini dimenſionibus deficientibus, erit æquatio

$4n\sqrt{n^4 + bbnn + c^3n + d^4} = 4n^3 + 2bbn + c^3$. Et æquatio ad inveniendam n, erit

$$n^3 \begin{array}{l} + \frac{2d^4}{c^3} \\ - \frac{\frac{1}{2}b^4}{c^3} \end{array} nn - \tfrac{1}{2}bbn - \tfrac{1}{8}c^3 = 0$$

Aſſumenda eſt igitur pro n, quævis ex radicibus realibus huius æquationis (oportet autem quantum n, in æquatione cubica unum ſaltem valorem realem habere), & pro y in fractione propoſita ſcribenda eſt nova fluens x, addito quanto reali n; denominator vertetur in formulam realem, quatuor dimenſionum, quo ad literam fluentem x, in qua coefficiens termini ſecundi ductum in radicem quadratam ultimi termini, coefficienti penultimi termini erit æquale. Poteſt itaque omnis denominator datæ fractionis quatuor dimenſionum ſecundo termino carens, in alium realem denomi-

nominatorem tranſmutari, in quo adſit inter coefficientia ſecundi, & penultimi termini ea relatio, quam poſtulamus.

XXX. Quantum n, quod æquatione modo inventa obtinetur, interdum id præſtare poteſt, ut peracta ſubſtitutione $x + n$ in locum y, coefficiens termini ſecundi ductum in radicem quadratam ultimi termini, ſit profecto idem, ac coefficiens penultimi termini, verum ſigna ſint mutata. Nam æquatio $4n^3 + 2bbn + c^3 = 4n\sqrt{n^4 + bbnn + c^3 n + d^4}$, qua prior illa conditio continetur, evaſiſſet $4n^3 + 2bbn + c^3 = -4n\sqrt{n^4 + bbnn + c^3 n + d^4}$, ſi poſterior hæc conditio fuiſſet in quæſtione; utriuſque autem æquationis idem eſt tractandæ modus, eademque finalis æquatio $n^3 + \left.\begin{matrix}\frac{2d^4}{c^3}\\ -\frac{\frac{1}{2}b^4}{c^3}\end{matrix}\right. nn - \frac{1}{2}bbn - \frac{1}{8}c^3 = o$; quapropter valorum ex hac æquatione profectorum aliqui interdum hoc, non illud efficere poterunt.

XXXI. A primo ad ultimum; fractionis integrandæ denominator fluentem habens z ad quartam poteſtatem evectam, termino ſecundo mulctetur, ſi iam terminus hic ab illo non abſit. Novus fractionis denominator, qui iam termino ſecundo imminutus erit, cuius fluens erit y, convertatur in formulam, in qua fluens erit x, & inter coefficientia ſecundi, & penultimi termini ſervetur conditio ſæpe memorata, ubique ſubſtituendo $x + n$ loco y, n vero unus ſit ex valoribus realibus, quos habet in æquatione $n^3 + \left.\begin{matrix}\frac{2d^4}{c^3}\\ -\frac{\frac{1}{2}b^4}{c^3}\end{matrix}\right. nn - \frac{1}{2}bbn - \frac{1}{8}c^3 = o$. Itaque reliquum eſt, ut oſtendamus, qua ratione dividendus ſit in duos factores reales denominator, cuius fluens ſit x, tali modo conſtitutus, ut coefficiens termini ſecundi ductum in radicem quadratam ultimi termini æquale ſit coefficienti ultimi termini, idque quamvis denominatoris omnes radices ſint imaginariæ.

XXXII. Denominator itaque poſt ſubſtitutionem $x + n$ in locum y; hanc formam acquiret $x^4 + ax^3 + bbxx +$

$ammx$

$ammx + m^4$. Statuantur duo trinomia $xx + gx + mm$, & $xx + fx + mm$, ex quorum ductu denominator ipſe intelligatur conſurgere. Ducantur hæc trinomia in ſe invicem, & productum comparetur cum propoſitæ fractionis denominatore, ſingulos producti huius terminos cum homogeneis expoſiti denominatoris terminis conferendo. Productum erit

$$\begin{array}{l} x^4 + gx^3 + 2mmxx + mmfx + m^4. \\ \quad\; + fx^3 + fgxx \quad + mmgx, \end{array}$$

quod ſi ea, quam diximus, ratione conferatur cum denominatore $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, orientur quinque æquationes, quarum prior, & poſtrema ſunt identicæ, ſecunda, & quarta ſunt eadem æquatio, itaque pro una tantum habendæ ſunt. In duabus itaque ad ſummum æquationibus tota hæc comparatio conſiſtit, quæ ſunt $g + f = a$, & $2mm + gf = bb$. Ex priore provenit $g = a - f$, quo valore in altera æquatione ſubſtituto, habemus $2mm + af - ff = bb$. Hinc duo valores f, nempe $f = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{2mm + \frac{1}{4}aa - bb}$, quare g, quæ eſt $= a - f$, erit $= \frac{1}{2}a \mp \sqrt{2mm + \frac{1}{4}aa - bb}$.

XXXIII. Si denominator in factores dividendus ſit $x^4 + ax^3 + bbxx - ammx + m^4$ (qualem præbet interdum ſubſtitutio $x + n$ in locum y, ex iis, quæ Num. XXX. adnotavimus) comparandus eſt cum producto ex duobus trinomiis $xx + gx - mm$, & $xx + fx - mm$, & reliqua omnia ſunt peragenda, ut in denominatore $xx + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, & valores f, & g prodibunt

$$f = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - 2mm - bb}$$

$$g = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - 2mm - bb}.$$

XXXIV. Formula igitur $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$ eſt productum duorum trinomiorum

$xx + \frac{1}{2}ax - x\sqrt{2mm + \frac{1}{4}aa - bb} + mm$, &

$xx + \frac{1}{2}ax + x\sqrt{2mm + \frac{1}{4}aa - bb} + mm$. Formula autem $x^4 + ax^3 + bbxx - ammx + m^4$ eſt productum duorum trinomiorum

$xx + \frac{1}{2}ax - x\sqrt{\frac{1}{4}aa - 2mm - bb} - mm$, &

$xx + \frac{1}{2}ax + x\sqrt{\frac{1}{4}aa - 2mm - bb} - mm$.

Id unuſquiſque, multiplicando duo illa trinomia in ſe invicem, & duo hæc poſteriora in ſe invicem, poterit experiri. In his trinomiis, ſi pro x ponas $y - n$, ſitque n valor ille, quo uſi ſumus in tranſitu a formula $y^4 + bbyy + c^3 y + d^4$ ad formulam $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, orientur factores, per quos diviſibilis erat primus ille denominator. Tandem ſi loco y ponas z auctam quanto, cuius ope terminus ſecundus ablatus fuit a denominatore habente fluentem z, emergent factores duarum dimenſionum, per quos dividitur primus ille denominator fractionis, quæ Num. XXVII. fuerat propoſita.

XXXV. Ex ipſa factorum, per quæ dividitur formula $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, inſpectione ſtatim in conſpectum venit conditio, quam poſtulant ipſi factores, ut ſint reales; oportet enim, ut quantum $2mm + \frac{1}{4}aa$ minus non ſit, quam bb. Quod niſi accidat, non poterit formula dividi in trinomia realia, quæ ſint eius formæ, quam habent aſſumpti factores $xx + gx + mm$, & $xx + fx + mm$. Hoc itaque caſu pro negotio integrationis fruſtra diviſus eſt denominator in duos factores, quando illi non ſunt reales; quid enim ad integrandam fractionem conferunt denominatoris diviſores, quando hi reales non ſunt?

XXXVI. Verum, quod formula non ſit diviſibilis per duo trinomia ad typum eorum, quæ aſſumpſimus, conficta, non ex eo conſequitur formulam non poſſe dividi per alia alius formæ trinomia realia, ex quorum multiplicatione ipſa conſurgat.

XXXVII. Separentur enim valores literæ x in duabus æquationibus quadraticis

$$xx + \tfrac{1}{2}ax - x\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + mm = 0, \;\&$$

$$xx + \tfrac{1}{2}ax + x\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + mm = 0,$$

quarum priorem voco P, alteram Q.

Habebimus ex æquatione P.

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + \sqrt{\tfrac{2}{16}aa - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}a\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb}} \quad \text{A}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} - \sqrt{\tfrac{2}{16}aa - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}a\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb}} \quad \text{B}$$

ex

Ex æquatione vero Q

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + \sqrt{\tfrac{2}{16}aa - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}a\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb}} \quad \text{C}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} - \sqrt{\tfrac{2}{16}aa - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}a\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb}} \quad \text{D}$$

hos valores eodem ordine, quo ſcripti ſunt, voco A, B, C, D.

XXXVIII. Iam ubi quantum $2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb$ poſitivum ſit, trinomium ex ductu $x - \text{A}$ in $x - \text{B}$ reale erit; reſtituet enim trinomium P; eademque ratione $x - \text{C}$ ductum in $x - \text{D}$ dabit trinomium Q, quæ ambo eo caſu ſunt realia. Reliquum eſt, ut rationem oſtendamus, dividendæ propoſitæ formulæ in trinomia realia, quando bb non eſt minus, quam $2mm + \tfrac{1}{4}aa$, ſive quando bb maius eſt, quam $2mm + \tfrac{1}{4}aa$. In hac igitur hypotheſi

XXXIX. Vocetur quantum $\frac{2\,aa}{16} - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb = p$. Erit itaque p quantum reale; non intereſt an poſitivum, vel negativum. Et pp erit quantum poſitivum, & reale, quippe omne quadratum quanti realis, vel poſitivi, vel negativi poſitivum eſt, & reale. Vocetur etiam $\sqrt{bb - 2mm - \tfrac{1}{4}aa} = q$, erit itaque q quantum reale, quippe radix quadrata quanti poſitivi $bb - 2mm - \tfrac{1}{4}aa$; & qq erit quantum & reale, & poſitivum. Fiant ſubrogationes quantorum p, & q in quatuor valoribus A, B, C, D. Valores illi vertentur in hos

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} + \sqrt{p - \tfrac{1}{4}aq\sqrt{-1}} \qquad \text{A}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} - \sqrt{p - \tfrac{1}{4}aq\sqrt{-1}} \qquad \text{B}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} + \sqrt{p + \tfrac{1}{4}aq\sqrt{-1}} \qquad \text{C}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} - \sqrt{p + \tfrac{1}{4}aq\sqrt{-1}} \qquad \text{D}$$

XL. Radix quadrata binomii imaginarii $p + \tfrac{1}{4}aq\sqrt{-1}$ eſt $\sqrt{\dfrac{p + \sqrt{pp + \tfrac{1}{16}aaqq}}{2}} + \sqrt{\dfrac{p - \sqrt{pp + \tfrac{1}{16}aaqq}}{2}}$,

& apo-

& apotomæ $p - \frac{1}{4}aq\sqrt{-1}$ eſt

$$\sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} - \sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}}$$

has ergo radices pono loco radicum binomii, & apotomæ in valoribus A, B, C, D mox deſcriptis, & prodeunt quatuor valores x

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}qq}}{2}} - \sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} \qquad \text{A}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}qqaa}}{2}} + \sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} \qquad \text{B}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} + \sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} \qquad \text{C}$$

$$x = -\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}q\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} - \sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}} \qquad \text{D}$$

in his valoribus pars $\sqrt{\frac{p + \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}}$ eſt quantum reale, ſed $\sqrt{\frac{p - \sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}}{2}}$ eſt quantum imaginarium; eſt enim pars negata $\sqrt{pp + \frac{1}{16}aaqq}$ ſemper maior parte affirmata p propter quantum poſitivum $\frac{1}{16}aaqq$ ſuper additum quadrato pp.

XLI. Trinomia realia, in quæ dividi poteſt forma $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, erunt, quæ conſurgunt ex ductu $x - A$ in $x - C$, & $x - B$ in $x - D$. ſuntque $xx - Ax - Cx + AC$, & $xx - Bx - Dx + BD$. Quod illa ſint realia, quando realia non ſunt trinomia P, & Q, inde patet, quod coefficientia terminorum intermedio-

diorum $-A-C$, & $-B-D$, eorumque contraria $A+C$, & $B+D$ ſunt quanta realia, & realia etiam ſunt utraque producta AC, & BD. Trinomia igitur ipſa realia eſſe manifeſtum eſt; de ſummis $A+C$, & $B+D$ quod ſint reales, non eſt ambigendum, nam $A+C$ eſt $-\frac{1}{2}a + 2\sqrt{\frac{p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}}$ quantum reale, & $B+D$ eſt $-\frac{1}{2}a - 2\sqrt{\frac{p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}}$, quantum & ipſum reale, deſtruunt quippe in his ſummis ſe invicem quanta imaginaria, quæ in valoribus A, & C, ut & in valoribus B, & D enunciantur. Quo vero ad producta AC, & BD, ſunt illa, AC quidem =

$$\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}qq+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}}-q\sqrt{\frac{-p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}}$$

BD vero =

$$\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}qq+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}+\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}}+q\sqrt{\frac{-p+\sqrt{pp+\frac{1}{16}aaqq}}{2}},$$

quorum utrumque reale eſt, quandoquidem ſingula quanta, quibus producta hæc componuntur, ſunt realia.

XLII. Omnis itaque fractio differentialis unius tantum fluentis, quam dicemus z, in cuius denominatore ipſa fluens quartam attingit dimenſionem, integrabitur per conicarum ſectionum quadraturas; quem in finem hac ratione tractanda eſt. Primum eliminandus eſt a denominatore fractionis terminus ſecundus, ſi adſit. Expulſo hoc termino, denominator induet formam hanc $y^4+bbyy+c^3y+d^4$. Sumatur n una radicum realium æquationis

$$n^3 + \left.\begin{array}{l}\frac{2d^4}{c^3} \\ -\frac{\frac{1}{2}b^4}{c^3}\end{array}\right\} nn - \tfrac{1}{2}bbn - \tfrac{1}{8}c^3 = 0$$

ponaturque in formula denominatoris $x+n$ loco y. Per hanc

hanc ſubſtitutionem denominator novæ fractionis conformatus erit ad hoc exemplar $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, nempe coefficiens ſecundi termini ductum in radicem quadratam ultimi termini adæquabit coefficiens termini penultimi. Advertendum bb non ſignificare hoc loco quantum, quod eodem charactere expreſſum erat in præcedenti formula denominatoris $y^4 + bbyy + c^3y + d^4$, ſed poſitam eſſe hanc ſpeciem bb ad indicandum coefficiens termini medii novæ formæ $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, quod in ipſa ſubſtitutione emerget. Poſtquam denominator integrandæ fractionis ad hunc typum eſt conformatus, ſi quidem quantum $\frac{1}{4}aa + 2mm - bb$ poſitivum ſit, dividetur denominator ipſe in duo trinomia realia

$$xx + \tfrac{1}{2}ax - x\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + mm, \text{ \&}$$

$$xx + \tfrac{1}{2}ax + x\sqrt{2mm + \tfrac{1}{4}aa - bb} + mm,$$

quæ vocamus iam P, & Q. At ubi ſit $2mm + \frac{1}{4}aa - bb$ quantum negativum, denominator $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, dividetur in duo trinomia realia, quorum unius coefficiens termini intermedii erit

$$\tfrac{1}{2}a - 2\sqrt{\frac{\frac{2}{16}aa - \frac{1}{2}mm - \frac{1}{4}bb + \sqrt{\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}aamm + \frac{1}{4}bbmm}}{2}},$$

& ultimus terminus erit

$$\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{2}mm + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^4 + \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{4}aamm + \tfrac{1}{4}bbmm} -$$

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{\frac{2}{16}aa - \frac{1}{2}mm - \frac{1}{4}bb + \sqrt{\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}aamm - \frac{1}{4}bbmm}}{2}} -$$

$$\sqrt{bb - 2mm - \tfrac{1}{4}aa}\sqrt{\frac{-\frac{2}{16}aa + \frac{1}{2}mm + \frac{1}{4}bb + \sqrt{\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}aamm + \frac{1}{4}bbmm}}{2}},$$

alterius autem trinomii coefficiens termini intermedii erit

$$\tfrac{1}{2}a + 2\sqrt{\frac{\frac{2}{16}aa - \frac{1}{2}mm - \frac{1}{4}bb + \sqrt{\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}aamm + \frac{1}{4}bbmm}}{2}},$$

& ul-

& ultimus terminus erit

$$\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{2}mm + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^4 + \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{4}aamm + \tfrac{1}{4}bbmm} +$$

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{\tfrac{2}{16}aa - \tfrac{1}{2}mm - \tfrac{1}{4}bb + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^4 + \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{4}aamm + \tfrac{1}{4}bbmm}}{2}}$$

$$+ \sqrt{bb - 2mm - \tfrac{1}{4}aa}\sqrt{\frac{-\tfrac{2}{16}aa + \tfrac{1}{2}mm + \tfrac{1}{4}bb + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^4 + \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{4}aamm + \tfrac{1}{4}bbmm}}{2}};$$

ex horum trinomiorum ductu componitur denominator $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$, & hæc realia erunt, ſi imaginaria ſint trinomia P, & Q. Hæc autem trinomia vocabimus R, & S.

XLIII. His peractis fractionem integrandam diſtribuamus in duas fractiones, quarum unius denominator ſit P, alterius Q, ſiquidem P, & Q ſint trinomia realia; ſecus fractionum denominatores ſunto trinomia R, & S, in quem finem theorematibus utemur numero XXI. traditis. Harum fractionum unamquamvis nullo deinde negotio integrabimus per congruentem circuli, aut hyperbolæ, quadraturam, aut per utramque.

XLIV. Ubi omnes quatuor valores x, qui ex æquatione $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4 = 0$ eliciuntur, quoſque vocavimus A, B, C, D, ſint reales, reales erunt etiam omnes ſingulorum binorum ſummæ, & realia ſingulorum binorum producta. Realia igitur erunt omnia ſex binomia $xx - Ax - Bx + AB$, $xx - Cx - Dx + CD$, $xx - Ax - Cx + AC$, $xx - Bx - Dx + BD$, $xx - Ax - Dx + AD$, $xx - Bx - Cx + BC$. At vero ſi horum valorum A, B, C, D duo ſint reales, & duo reliqui imaginarii, ſint A, & B duo reales, erit itaque reale trinomium $xx - Ax - Bx + AB$. Eo ipſo reale etiam eſſe oportet trinomium $xx - Cx - Dx + CD$; qui enim poteſt non eſſe reale trinomium $xx - Cx - Dx + CD$, quod ductum in trinomium reale $xx - Ax - Bx + AB$ facit productum reale $x^4 + ax^3 + bbxx + ammx + m^4$? reliqua quatuor trinomia $xx - Ax - Cx + AC$, $xx - Bx - Dx + BD$, $xx - Ax - Dx + AD$, $xx - Bx - Cx + BC$ erunt imaginaria, quandoquidem ter-

minorum intermediorum coefficientia ſummæ ſunt quanti realis A, vel B, cum imaginario C, vel D. Et ultimi termini AC, vel AD, vel BD, vel BC, ſunt ductus realis A, vel B in imaginarium C, vel D. Tandem ubi omnes quatuor valores A, B, C, D ſunt imaginarii, erunt, vel trinomiorum par $xx - Ax - Bx + AB$, & $xx - Cx - Dx + CD$, vel alterum par $xx - Ax - Cx + AC$, & $xx - Bx - Dx + BD$ realia.

XLV. Exempli loco unum addimus ſpecimen progreſſus, quo fractio $\dfrac{a^4 dz}{z^4 + 4az^3 + 7aazz + \frac{15}{4}a^4}$ ad integrationem paranda eſt. Ut ſecundum terminum a denominatore auferamus, aſſumimus $z = y - a$. Fractio itaque tranſit in aliam $\dfrac{a^4 dy}{y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4}a^4}$. Hæc forma denominatoris in aliam vertenda eſt, in qua coefficiens termini ſecundi ductum in radicem quadratam ultimi termini æquale ſit coefficienti penultimi termini. Comparando igitur denominatorem $y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4}a^4$ cum canone denominatoris ſecundo termino deficientis, quem dedimus numero XXIX, inveniemus, quæ ibi eſt bb hic eſſe aa, quæ ibi c^3 hic eſſe $-6a^3$, & quæ ibi d^4, hic eſſe $\frac{31}{4}a^4$, adeoque æquationem, pro invenienda litera n, eſſe $n^3 - \frac{5}{2}ann - \frac{1}{2}aan + \frac{3}{4}a^3 = 0$, in qua n tres habet valores reales $n = \frac{1}{2}a$, $n = a + \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, & $n = a - \sqrt{\frac{5}{2}aa}$; quocumque ex his valoribus utaris, ponaſque $y = x + \frac{1}{2}a$, vel $y = x + a + \sqrt{\frac{5}{2}aa}$, & $y = x + a - \sqrt{\frac{5}{2}a}$, rem conficies, nempe formam denominatoris in aliam convertes, in qua coefficiens ſecundi termini ductum in radicem quadratam ultimi termini erit æquale coefficienti termini penultimi.

XLVI. Aſſumamus primum $n = \frac{1}{2}a$, ponamuſque $y = x +$

$x + \frac{1}{2}a$. Subrogemus hunc valorem in locum y in fractione $\frac{a^4\,dy}{y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4}a^4}$, fractio evadet

$\frac{a^4\,dx}{x^4 + 2ax^3 + \frac{5}{2}aaxx - \frac{9}{2}a^3x + \frac{81}{16}a^4}$. In huius fractionis denominatore coefficiens penultimi termini, quod eſt $-\frac{9}{2}a^3$ æquale eſt coefficienti $2a$ ſecundi termini, ſuppletis in hoc dimenſionibus per $\frac{9}{4}aa$, radicem quadratam ultimi termini, ſed ſigna ſunt diverſa; denominator itaque dividetur in duos factores $xx + ax + x\sqrt{-6aa} - \frac{9}{4}aa$, & $xx + ax - x\sqrt{-6aa} - \frac{9}{4}aa$, per regulas numero XXXIII. traditas; ſuntque hi imaginarii.

XLVII. Separemus igitur ex duobus trinomiis

$xx + ax + x\sqrt{-6aa} - \frac{9}{4}aa$, &

$xx + ax - x\sqrt{-6aa} - \frac{9}{4}aa$ valores x, qui erunt,

ex priore quidem trinomio

A. $x = \frac{-a - \sqrt{-6aa} + \sqrt{4aa + 2a\sqrt{-6aa}}}{2}$, &

B. $x = \frac{-a - \sqrt{-6aa} - \sqrt{4aa + 2a\sqrt{-6aa}}}{2}$;

ex poſteriore autem

C. $x = \frac{-a + \sqrt{-6aa} + \sqrt{4aa - 2a\sqrt{-6aa}}}{2}$, &

D. $x = \frac{-a + \sqrt{-6aa} - \sqrt{4aa - 2a\sqrt{-6aa}}}{2}$, quos eodem

 ordi-

ordine retento vocabimus A, B, C, D. Radices binomii $4aa + 2a\sqrt{-6aa}$, & apotomæ $4aa - 2a\sqrt{-6aa}$ ſunt, binomii quidem $\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}$, apotomæ autem $\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} - \sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}$; quas radices pono in valoribus A, B, C, D, & fiunt novi valores.

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{-6aa} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}. \quad \text{A}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{-6aa} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}. \quad \text{B}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{-6aa} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}. \quad \text{C}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{-6aa} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}. \quad \text{D}$$

XLVIII. Si x mulctetur valore, quem vocamus A, & altero, quem vocamus C, & duo reſidua in ſe ducantur, prodibit trinomium

$$xx + ax \overline{-x - \tfrac{1}{2}a}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{7}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{10aa} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6a^3\sqrt{10aa} - 12a^4},$$

& ſi x mulctetur valore B, & deinde valore D, & reſidua in ſe invicem multiplicentur, emergit aliud trinomium

$$xx + ax \overline{+x + \tfrac{1}{2}a}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{7}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{10aa} + \tfrac{1}{2}\sqrt{6a^3\sqrt{10aa} - 12a^4},$$

quæ ſunt realia, & ex eorum ductu conflatur denominator $x^4 + 2ax^3 + \frac{5}{2}aaxx - \frac{9}{2}a^3x + \frac{81}{16}a^4$.

XLIX. Non puto oportere, ut analyſtam moneamus in multiplicandis inter ſe formulis $x - A$, & $x - C$, ut etiam $x - B$ in $x - D$, quoties occurrunt in ſe ducenda duo quanta imaginaria (ſiquidem illa non ſint unum idemque quantum, ſed duo inter ſe ſe diverſa) oportere producti ſignum invertere. Quippe $+\sqrt{-m}$ ductum in $+\sqrt{-n}$ facit $-\sqrt{mn}$, & $-\sqrt{-m}$ in $+\sqrt{-n}$ facit $+\sqrt{mn}$. Eſt enim $+\sqrt{-m} = +\sqrt{m}\sqrt{-1}$, & $+\sqrt{-n}$ eſt $+\sqrt{n}\sqrt{-1}$, quare productum erit $+\sqrt{mn}$ ductum in -1, ſive $-\sqrt{mn}$. Huius anomaliæ niſi ratio habeatur, quoties ducendum eſt $\sqrt{-6aa}$

in

in $\sqrt{2aa - a\sqrt{10aa}}$ (quæ ſunt quanta imaginaria inter ſe diverſa) producta, quæ oriuntur duo quidem trinomia erunt realia, ſed non ea, ex quorum ductu in ſe invicem conſurgat expoſitus denominator

$$x^4 + 2ax^3 + \frac{5}{2} aaxx - \frac{9}{2} a^3 x + \frac{81}{16} a^4.$$

L. Sumpſimus, num. XLVI., $y = x + \frac{1}{2}a$. Si itaque in mox repertis trinomiis realibus, per quæ dividitur denominator datæ fractionis, pro x reſtituamus $y - \frac{1}{2}a$, fient trinomia realia duo, ex quorum ductu efficitur denominator $y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4} a^4$ fractionis, in qua fluens erat y.

Sunt autem trinomia illa

$$yy - y\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{1}{2}a\sqrt{10aa} + \frac{3}{2} aa - \frac{1}{2}a\sqrt{6a\sqrt{10aa} - 12a^2}$$

$$yy - y\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{1}{2}a\sqrt{10aa} + \frac{3}{2} aa + \frac{1}{2}a\sqrt{6a\sqrt{10aa} - 12a^2}$$

Et quoniam in tranſitu a fractione, cuius fluens erat z, ad fractionem, cuius fluens eſt y, aſſumpſimus, num. XLV, $z = y - a$, hinc ſi in his trinomiis pro y ſcribas $z + a$, habebis duo trinomia realia, quæ in ſe ducta referent denominatorem fractionis, quæ nobis integranda primum oblata fuit, qui erat $z^4 + 4az^3 + 7aazz + \frac{15}{4} a^4$, ſuntque hæc trinomia

$$zz + 2az - \overline{z - a}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{1}{2} a\sqrt{10aa} + \frac{5}{2} aa - \frac{1}{2} a\sqrt{6a\sqrt{10aa} - 12aa}$$

$$zz + 2az + \overline{z + a}\sqrt{2aa + a\sqrt{10aa}} + \frac{1}{2} a\sqrt{10aa} + \frac{5}{2} aa + \frac{1}{2} a\sqrt{6a\sqrt{10aa} - 12aa}$$

LI. In æquatione $n^3 - \frac{5}{2} ann - \frac{1}{2}aan + \frac{3}{4}a^3$, quam num. XLV. tractavimus, præter valorem $n = \frac{1}{2}a$ duo alii valores reperti ſunt $n = a + \sqrt{\frac{5}{2} aa}$, & $n = a - \sqrt{\frac{5}{2} aa}$. Si priore utamur ad immutandum denominatorem $y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4} a^4$, ſubrogando $x + a + \sqrt{\frac{5}{2} aa}$ in locum y, fractio

$$\frac{a^4\, dy}{y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4} a^4}$$

eva-

evadet

$$\frac{a^4\,dx}{x^4+4ax^3+2x^3\sqrt{10aa}+22aaxx+6axx\sqrt{10aa}+30a^3x+12aax\sqrt{10aa}+\frac{55}{2}a^4+5a^3\sqrt{10aa}},$$

cuius denominator eſt formula, in qua $4a+2\sqrt{10aa}$ coefficiens ſecundi termini ductum in $5aa+\frac{1}{2}a\sqrt{10aa}$ radicem quadratam ultimi termini $\frac{55}{2}a^4+5a^3\sqrt{10aa}$ æquale eſt coefficienti penultimi termini, quod eſt $30a^3+12aa\sqrt{10aa}$. Verſabimus itaque denominatorem hunc ea ratione, qua in denominatore $x^4+2ax^3+\frac{5}{2}aaxx-\frac{9}{2}a^3x+\frac{81}{16}a^4$ reſolvendo uſi ſumus, & duo trinomia realia eruemus, per quæ denominator hic eſt diviſibilis, in quibus deinde, ſi pro x ſcribamus $y-a-\sqrt{\frac{5}{2}aa}$, eadem trinomia emergent, per quæ diviſibilem eſſe formulam $y^4+aayy-6a^3y+\frac{31}{4}a^4$ obſervavimus numero præcedenti. Si autem in fractione $\frac{a^4\,dy}{y^4+aayy-6a^3y+\frac{31}{4}a^4}$ in locum y ponas $x+a-\sqrt{\frac{5}{2}aa}$, utendo tertio valore literæ n, quem numero XLV. eruimus, fractio evadet

$$\frac{a^4\,dx}{x^4+4ax^3-2x^3\sqrt{10aa}+22aaxx-6axx\sqrt{10aa}+30a^3x-12aax\sqrt{10aa}+\frac{55}{2}a^4-5a^3\sqrt{10aa}}$$

in qua, non ſecus ac in præmiſſis fractionibus, quarum fluens eſt x, quantum $4a-2\sqrt{10aa}$, quod afficit terminum ſecundum, ductum in $5aa-\frac{1}{2}a\sqrt{10aa}$ radicem quadratam ultimi termini, conſtituit $30a^3-12aa\sqrt{10aa}$ coefficiens termini penultimi. Hunc denominatorem poſſumus itaque ad inſtar eorum, quos modo reſolvimus, dividere in trinomia realia, in quibus, ſi deinde loco x ſcribatur $y-a+\sqrt{\frac{5}{2}aa}$, emergent denuo illa eadem trinomia num. XLIX. memorata, per quæ dividitur denominator $y^4+aayy-6a^3y+\frac{31}{4}a^4$. Hucuſque egimus de denominatoribus fractionum diffe-

differentialium, quartam dimenſionem non excedentibus, quos oſtendimus nunquam non eſſe diviſibiles in duos factores reales duarum dimenſionum. Deinceps agemus de iis denominatoribus, in quibus fluens ad maiores dignitates evecta eſt, & quando iam in actis huius academiæ vol. primo res tota confecta eſt in formulis, quarum omnes termini intermedii deficiunt, vel ſolus adeſt terminus medius, reliquum eſt, ut de iis agamus, in quibus nullius termini ſedes vacua eſt. Quod ſequentibus diſſertatiunculis præſtabimus.

INDEX

OPUSCULORUM.

BEccarii Iacobi Bartholomæi. *De quamplurimis phoſphoris nunc primum detectis. Commentarius alter.* 498.

Boſcovichi Rogerii Ioſephi. *De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decreſcentibus in ratione diſtantiarum reciproca duplicata in ſpatiis non reſiſtentibus.* 262.

De viribus vivis. 289.

Collinæ Abundii. *De acus nauticæ inventore.* 372.

Galli Io. Antonii. *De novimeſtri fœtu extra uterum aucto, & mortuo per abdomen vivæ matris extracto.* 251.

Laghii Thomæ. *De rubentibus lignorum cineribus.* 397.

Manfredii Euſtachii. *De mercurii ac ſolis congreſſu obſervato die ix. nov.* MDCCXXIII. I.

De iovis ac martis coniunctione heliocentrica. 39.

De congreſſu mercurii cum ſole obſervato die xi. novemb. MDCCXXXVI. 57.

De cometa anni MDCCXXXVII. *62.*

Manfredii Gabrielis. *De eliminandis ab æquatione arcubus circularibus; & alia.* 520.

Manfredii Heracliti. *De viribus ex elaſtrorum pulſu ortis.* 383.

Matteuccii Petronii. *De aurora boreali anni* MDCCXXXVIIII. *496.*

Menghini Vincentii. *De ferrearum particularum progreſſu in ſanguinem.* 475.

Montii Caietani. *De aldrovandia, novo herbæ paluſtris genere.* 404.

Riccati Iacobi. *De motuum communicationibus ex attractione.* 143.

Problema: dato quacumque ratione radio oſculi per curvam deſcribendam curvam deſcribere. 159.

Riccati Vincentii. *Animadverſiones in fractionem, cuius numerator & denominator per certam determinationem nihilo æquales fiunt.* 173.

Animadverſiones in formulam differentialem, in qua indeterminatæ ad unicam tantum dimenſionem adſcendunt. 194.
De centro æquilibrii. 215.
Tabarrani Petri. *De thermometrorum peculiari correctione nunc primum excogitata. Accedit epiſtola de fonticulo quodam.* 233.
Trombelli Io: Chryſoſtomi. *De acus nauticæ inventore.* 333.
Veratti Ioſephi. *De aurora boreali anni* MDCCXXXII. 493.
Zanotti Euſtachii. *De cometa anni* MDCCXXXIX. 73.
De quibuſdam luminibus ſeptemtrionalibus anno MDCCXXX. *obſervatis.* 489.
Zanotti Franciſci Mariæ. *De elaſtris. Sermo primus.* 413.
De elaſtris. Sermo alter. 435.
De elaſtris. Sermo tertius. 463.

His accedunt

Eclipſes variæ obſervatæ ab Euſtachio Manfredio. 91.
Io: Baptiſta Banderio.
Dominico Veber.
Iacobo Parma.
Ioſepho Bolſio Marcheſio.
Franciſco Vandello.
Franciſco Algarotto.
Euſtachio Zanotto.
Franciſco Maria Zanotto.
Io: Iacobo Marinonio.
Ioſepho Roverſio.
Didaco Revillas.
Io: Bottario.
Petro Martino.
Thoma Perello.
Ioſepho Garatono.
Petronio Matteuccio.

IN-

INDEX

Eorum, quorum ſit mentio in opuſculis.

ADſigerius Petrus. 365.
Aldrovandus Ulyſſes. 405. 410. 411.
Albertus Leander. 367.
Albertus Magnus. 336. 351. & ſeq. 376.
Algarottus Franciſcus. 58. 97. 101.
Amadeſius Lælius. 458. 459. 461.
Amadeus Ioannes Carolus. 405. & ſeq. 409. 410.
Amontonius. 239. 241. 243.
Aratus. 345.
Archimedes. 310.
Ariſtoteles. 334. & ſeq. 351. & ſeq. 357. 376. 433. 473.
Arrianus. 345.

Baconius Rugerius. 339.
Baierus. 64. & ſeq.
Banderius Ioannes Baptiſta. 2. 91.
Barabinus. 37.
Barthema Ludovicus. 382.
Baſſia Laura. 398. 402.
Baudrand. 367.
Bauhinus. 411.
Becanus Goropius. 335.
Beccarius Iacobus Bartholomæus. 249. 364. 498.
Bellovacenſis. 376. 377.
Bergeronius. 381.
Bernullius Iacobus. 173. 178. & ſeq.
Bernullius Ioannes. 174. 176. & ſeq. 185. 187. 194. 291. 313. 383. 384. 387. 395. 413. 414. 424. 449. & ſeq. 456.
Bertius Hugo. 358. 378.
Blanchinus Franciſcus. 36. 65.

Blondus. 367.
Bochartus Samuel. 341. 373.
Boerhaavius. 233. 236. 240.
Boldrinus. 62.
Bonamicus Caſtruccius. 452. 458.
Bonzius Gotardus. 454. 455.
Borbonius Carolus utriuſque Siciliæ Rex. 458.
Boſchovichus Rogerius Ioſephus. 262. 289.
Bottarius Ioannes. 109.
Bozius Thomas. 367.
Brietius. 367. 368.
Brunerus. 485.
Bulffingerus. 234. & ſeq. 241. 243.
Bullialdus. 28.
Burchius. 370.

Cabeus. 337. 352. 353. 356. 359. 365. 368.
Calmet. 342.
Calogerà Angelus. 379.
Cambdenus. 373.
Camuſius. 413. 414. 424. 440. 463. & ſeq.
Carteſius. 143. 173. 290.
Caſatus Petrus. 235.
Caſſinus Dominicus. 3. 19. 24. 25. & ſeq. 28. & ſeq. 33. 42. 44. 49. 66.
Caſſinus Iacobus. 24.
Cellarius. 373.
du Chatellet. 291.
Cheſeldenus. 256.
Ciaconius. 377.
Cicero. 345.
Clairaus. 220. & ſeq. 229. 326.
Claudianus. 347.
Clavius. 294.
Cluſius. 411.
Cole Guilielmus. 488.
Collina Abundius. 372.
de Comitibus Nicolaus. 381.
Conti Iacobus. 476.
Covaruvias. 361.

Cri-

Cribellius. 293.
Cyprianus Abrahamus. 258. & ſeq.

Derhamus. 339.
Dillenius Ioannes Iacobus. 410.
Diodorus. 375.
Diogenes Laertius. 352.
Ditmarus. 336. 356. 377.
Drebellius. 236.
Ducangius. 356.
Duhamelius. 23. & ſeq. 33.

Eimmartus. 23.
Epicurus. 347.
Eratoſthenes. 373.
Eulerus. 263. 284.

Fabricius Ioannes Albertus. 334. 339. 341. 343. 359.
Farheneitius. 235. & ſeq. 240. 244. 247.
Fayus. 501. 509. 510.
Ferrarius. 360. 362. 367.
Flamſtedius. 64. 67. 77.
Fontæneus. 23.
Fontenellus. 293. 294.
Fortunius. 378.
Frellonius Ioannes. 352.
Fullerus. 334.
Furnerius. 337. 343. 344. 356. 374. 377.

Galeatius Guſmanus. 238. 398.
Galileus. 290. 292. 392.
Galletus. 22. & ſeq. 31. & ſeq.
Gallus Ioannes Antonius. 251.
Gama Vaſcus. 379. 381.
Garatonus Ioſephus. 77. 125. 135.
Garzonius. 359.
Gaſſendus. 3. 22. 26. 28. 30. & ſeq. 35. 347.
le Gendre. 342. 343. 352. 358.
Geſnerus. 411.
Ghedinus Fernandus Antonius. 452. 453. 458.

Ghi-

Ghiſilerius Antonius. *66*.
Giannetaſius Parthenius. *367*.
Gilbertus. *336*. *339*. *356*. *357*.
Gimma Hiacynthus. *367*.
Gioia. *V.* Gira.
Gira, ſeu Gioia. *338*. *359*. *360*. *367*. *368*. *369*. *377*.
Goropius. 355.
Grammaticus Nicaſius. 38.
Graſſius Carolus. 435. 449. 451. 452. 455. 457. 461. 462.
Graveſandus. 53. 291.
Grimaldus. 318.
Grimaldus Gregorius. 333. 367.
Gronovius. 410.
Guiotus Provineus. 336. 337. 358. 377.
Gyraldus. 367.

Halleius. 22. & ſeq. 25. & ſeq. 30. & ſeq. 71. 233.
Hanno Carthaginienſis. 374.
Hermannus. 220. 291. 311.
Herodotus. 373.
Hervartus Io: Federicus. 334.
Hevelius. 3. 22. 30.
Hippalus. 345.
Hiramus. 334. 348. & ſeq.
Hireus. 24. 42. 44. 49.
Hombergus. 243.
Hortellius. 367.
Hoſpitalius. 271.
Houſtonus. 410.
Huddenius Ioannes. 173.
Huetius. 340. & ſeq. 348. 349.
Hugenius. 22. 262. 304. 313.

Iambullarius Petrus Franciſcus. 360. 361.
Ioſaphatus. 351.
Iovat. 342.
Isleus. 233. 237. & ſeq. 241. 244.

Keplerus. 22. 296.
Kircherus. 249. 341. 343. 344. 377. 380.
Kirckius. 23.

Laghius Thomas. 397. 449. 451. 452. 456. & ſeq. 460.
Lanciſius. 249.
Laſor Alphonſus. 367.
Laurus Guillelmus. 367.
Lecontius. 23.
Leibnitius. 143. 156. 290. 291. 297. 313. 315. 391.
Lellius Hercules. 476. 482. 485.
Lemnius Levinus. 345.
Leprottus Antonius. 235. 240. 243. 247.
Linnæus Carolus. 410. 411.
Lipenius Martinus. 374.
Lobelius. 411.
Lucretius. 347.

Maclaurinus. 291.
Maffeius Ioannes Petrus. 363.
Mairanius. 291. & ſeq. 315.
Manfredius Euſtachius. 1. 39. 57. 62. 91. 95. 97. 99. 107. 109. 115. 117. 119. 120. 127. 131.
Manfredius Gabriel. 2. 36. 203. 520.
Manfredius Heraclitus. 383.
Maraldus Iacobus Philippus. 19. 24. 37. 42. 55. 65.
Marantha. 411.
Marcheſius Bolſius Ioſeph. 2. 42. 71. 93. 101. 103. 119.
Marinonius Ioannes Iacobus. 58. 103.
Marinus Marcus. 361.
Marſilius Alexander. 4.
Marſilius Aloyſius Ferdinandus. 4. 24. 39.
Martianus Capella. 346.
Martinius. 379.
Martinus Petrus. 113. 291. & ſeq.
Matteuccius Petronius. 62. 77. 84. 130. 135. 137. 139. 496.
Matthiolus. 411.
Maurus Camaldulenſis. 379.
Menagius. 337. 343. 344. 358. 360. & ſeq. 365. 368.
Menghinus Vincentius. 475.
Mercator. 22. 353.
Merſennus. 290.
Michelius. 410.
Molinellius Petrus Paullus. 254. 257.

Mon-

Montius Caietanus. 404.
Montius Ioſephus. 406. 409.
Morerius. 360. 367.
Muſſchenbroekius Petrus. 233. & ſeq. 240. & ſeq. 246. 291. 293. 294. 335. 365.

Nevtonus. 39. 70. 83. 84. 143. 262. 296. 304. 313. 318. 321. 324.
Nicaon ægypti rex. 373.

Orſuccius Carolus Dominicus. 248.
Oudinus. 353. 364.
Ovidius. 345.

Papias. 356.
Paracelſus. 258.
Parma Iacobus. 2. 93. 95. 97. 99.
Paſquerius Stephanus. 358.
Peregrinus Petrus. 337. 339. 359. 365. 368.
Perellus Thomas. 58. 125.
Petronius Arbiter. 347.
Peyerus. 485.
Philander. 367.
Pineda. 334. 336. 345. 346. 353.
Plato. 357.
Plautus. 333. 335. 353. 354.
Plinius. 248. & ſeq. 346. 347. 357. 362. 373. 375. 376.
Plukenetius Leonardus. 404. 406. 409. 410.
Plumerius. 410.
Polenus Ioannes. 36. 291. 293. 458.
Polus Marcus. 338. 366. 367. 379. 380.
Putius Ioſephus. 449. 451. & ſeq. 455.

Quintilianus. 369.

Ramuſius. 374. 375. 378. 379. 381. 382.
Reaumurius. 234. 238. 241. 247. 370.
Regnaultius. 338. 363.
Revillas Didacus. 65. 109.
Rey. 367.
Riccatus Iacobus. 39. 143. 159. 291.

Riccatus Vincentius. 173. 194. 215. 291.
Ricciolius. 290. 336. & ſeq. 356. 365. 368. 374. 377.
Rogerius Siciliæ Rex. 356. 377.
Roverſius Ioſephus. 57. & ſeq. 77. 107. 113. 122. 126. 129. 135. 490.

Salmaſius. 353.
Salomon. 334. 348. & ſeq. 374.
Salvagus Paris. 37.
Saurinus. 188. & ſeq. 192.
Scakerleus. 22.
Seneca. 66. 248. & ſeq. 369. 375.
Sherardus Guillielmus. 410.
Sidonius. 377.
Signius Franciſcus Maria. 4.
Societus. 343.
Solinus. 346. 373.
Stirlingius. 291.
Strabo. 340. 342. 345. 373. 375.
Sydenhamius. 488.

Tabarranus Petrus. 233. 243. 246.
Tacitus. 375.
Tacquetus. 294. 295.
Taiſnerus Ioannes. 359.
Tavernerius. 341.
Terraroſſa. 378.
Thales. 357.
Theophraſtus. 248. & ſeq.
Thevenottus. 365.
Tiolius Petrus Antonius. 452. 456. 460.
Torricellius. 439.
Torſellinus. 341.
Triumphettus Lælius. 406. 409.
Trombellius Ioannes Chryſoſtomus. 333. 372. 373.
Turnebus. 353.
Turnefortius. 408.
Tuſanus Iacobus. 362.

Vallitius. 304.

Vandellius Franciſcus. 59. 69. 77. 97. 99. 105. 113. 122. 397. 490.
Varignonius Petrus. 184. 220.
Veber Dominicus. 2. 91.
Verattus Ioſephus. 493.
Ughellius. 356.
Vhiſtonus. 24. 42. 44. 49. 51.
De Via Ioannes Antonius. 109.
Vignaferrus Fabius. 476.
Virgilius. 346. 347. 375.
De Vitriaco Iacobus. 363. 364. 366.
Vodvardus. 510. 511.
Volfius. 291.
Voſſius Gerardus. 367.
Voſſius Ioannes. 367.
Voſſius Iſaacus. 343. 380.
Vrennus. 304.
a Vulpe Lælius. 371.
a Vulpe Petronius. 371.
Vurtzelbaus Ioannes Philippus. 23. 24. 38.

Zanonus Iacobus. 398.
Zanonus Iacobus antiquior. 405.
Zanottus Euſtachius. 57. & ſeq. 71. 73. 97. 101. 105. 107. 113. 121. 123. 126. 133. 135. 137. 139. 489.
Zanottus Franciſcus Maria. 101. 333. 337. 339. 343. 354. 358. 364. 370. 396. 413. 435. 463.
Zanottus Ioannes Petrus. 458. 460.

INDEX

Rerum, de quibus in opuſculis agitur.

Actio quo modo æqualis reactioni. 304. Actio in diſtans an eſſe poſſit in natura. 317.

Acus nautica, an ægyptiis inventa, an ſinenſibus, an phœnicibus, aut tyriis. 334. An Ariſtoteli cognita. 334. 335. An Latinis. 335. An eam Germani invenerint. 335. 336. An Galli. 336. 337. An Luſitani. 338. An Itali. 338. An Angli. 339. Non videtur inventa ab ægyptiis. 340. Ne phœniciis quidem veteribus fuiſſe nota. 344. & ſeq. Ne hebræis quidem, neque ſidoniis. 351. Ariſtoteles vim directricem magnetis non novit. 351. & ſeq. Ne Romani quidem veteres. 353. & ſeq. Germani illam non invenerunt. 355. Ne Galli quidem. 357. & ſeq. Ne nomen quidem e gallica lingua derivandum. 360. & ſeq. Ne Luſitani quidem pyxidem nauticam inveniſſe dicendi ſunt. 363. Acum nauticam primi in europam invexerunt Itali. 363. & ſeq. Quæſtio de acus nauticæ inventore iterum proponitur. 372. Acum nauticam antiquiſſimis in uſu fuiſſe oſtenditur. 373. & ſeq. ævo certe medio. 377. & ſeq.

Aequationem differentialem ſecundi gradus in differentialem primi convertere. 169. & ſeq. De eliminandis ab æquatione arcubus circularibus. 520.

Aequilibrii centrum ſecundum varias hypotheſes quæritur. 215. & ſeq. æquilibrium quid ſit, & quo modo fiat, explicatur. 299. 300.

Aer an gravitate ſua hydrargyrum premat in Torricellii experimento. 438. 439.

Aldrovandia novum herbæ genus. 404. cur aldrovandia dicta. 405. 410. quando & a quo inventa. 405. 406. Flores eius comperti. 406. Herba paluſtris eſt. 406. 407.

407. deſcribitur. 407. 408. Quo modo propagetur, & adoleſcat. 408. Chartas, inter quas interponitur, rubore inficit. 408. 409. Eadem eſt ac lenticula Plukenetii. 409. 410.

Aqua ſumme elaſtica. 323.

Attractio in centrum immobile quos motus corporibus det. 262. & ſeq. In iove & marte examinatur. 39. & ſeq. in planetis quibuslibet. 54.

Auroræ boreales variæ deſcribuntur. 489. & ſeq.

Cinis cuiuſdam ligni inventus ruber. 397. Genus ligni quæritur. 397. 398. Id ligni quidquid eſt, chymice diſſolvitur. 398. & ſeq. Caput mortuum coloris rubri ſedes. 399. Ipſe color ruber ad calcem quamdam ferream referendus. 400. & ſeq. Ligna omnia ad hunc colorem in cineribus ſuis expromendum apta. 402.

Cometa obſervatus anno MDCCXXXVII. 62. & ſeq. deſcribitur. 62. procedit iuxta ſignorum ordinem. 63. motus eius deſcribitur. 63. & ſeq. eiuſdem cometæ reditus. 66. Parallaxis inquiritur. 70. 71. Cometa alius obſervatus anno MDCCXXXVIIII. deſcribitur. 73. Retrogradus eſt. Motus eius deſcribitur. 74. non videtur moveri in plano circa tellurem. 74. Diarium obſervationum. 77. & ſeq. Cometæ theoria exponitur. 81. & ſeq.

Coniunctio mercurii cum ſole. *Vide* Mercurii. Iovis cum marte. *Vide* Iovis.

Contactus corporum nullus in natura. 315. 316. Si contactus detur in occurſu corporum, natura interdum aget per ſaltum. 319. 320.

Corpora reſolvuntur in puncta nullam habentia extenſionem. 328.

Differentiales formulæ conſiderantur, in quibus indeterminatæ ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt. 194. & ſeq.

Eclipſes variæ deſcribuntur. 91. & ſeq.

Elaſtrorum ſeries quam velocitatem tribuant corporibus, quæ pellunt. 383. & ſeq. Argumentum ab his petitum ad metiendam vim vivam proponitur, & expenditur. 385.

385. & ſeq. An ſimiliter dilatatæ æqualiter premant? 387. & ſeq. An, ſi premant æqualiter, inæquales velocitates poſſint gignere. 389. & ſeq. An eadem elaſtrorum ſeries corporibus maſſa diverſis velocitates tribuat maſſis ipſis reciproce proportionales. 394. & ſeq. Elaſtrorum natura iterum inquirenda proponitur, & explicatur. 413. & ſeq. Quam velocitatem habeant ſeries elaſtrorum vel infixæ, vel liberæ. 417. & ſeq. Series deferentes quam velocitatem tribuant corpori, quod pellunt. 422. & ſeq. An ſeries liberæ deferentes pro duabus ſeriebus infixis habendæ ſint. 429. & ſeq. Quid de vi viva ex elaſtrorum ſeriebus conſtet. 431. & ſeq. An ſit proportionalis ſeriei elaſtrorum, ſi ab elaſtrorum ſerie gignatur. 432. 433. Elaſtrorum relaxatio explicatur. 436. De vi, quam elaſtrum infixum in utramque partem facit, dum ſeſe explicat. 437. Series infixæ omnes an premant æqualiter, ſi ſimiliter dilatatæ ſint, & immotæ detineantur. 438. 439. Qua celeritate proſiliat punctum extremum ſeriei infixæ, ſi ſeries infixa relaxetur. 439. & ſeq. Quæ eius celeritas ſit in fine relaxationis. 442. 443. An celeritates in fine relaxationis poſſint eſſe inæquales, ſi æquales ſint in initio. 443. & ſeq. Elaſtra eodem numero, ſed per varios ordines in ſeriem diſpoſita, conſideranda proponuntur. 449. Quam velocitatem tribuant corpori, quod pellunt. 450. & ſeq. Quas preſſiones exerceant. 452. 453. Quibus temporibus dilatentur. 453. Camuſii theorema proponitur. 463. Eius conſtructio & demonſtratio. 464. 465. demonſtratio examinatur. 466. & ſeq.

Ferri particulæ utrum in ſanguinem viventium animalium invehantur. 475. & ſeq. Ferri præparationes variæ ad varia animalia alenda. 475. 476. In quibus animalibus experimenta facta ſint. 476. Diæta ferrea quid in variis animalibus præſtiterit. 476. & ſeq. E qua præparatione plus ferrearum particularum in ſanguinem invehatur. 481. & ſeq. Ferrearum particularum natura acidorum liquorum miſcela manifeſtatur. 483. 484. Ferrearum particularum tranſitus per venas meſeraicas. 485.

Fœtus extra uterum nutritus, auctus, mortuus, ac tum demum per vivæ matris abdomen extractus. 251. & ſeq. Matris mortuæ ſectio. 257. Conceptus ex ovo confirmatur. 258. & ſeq. Graviditatis ſigna; & unde cognoſci poſſit, fœtum extra uterum verſari. 261.
Fonticulus ab avulſo vicino nemore mirum in modum auctus. 248. & ſeq.
Fractiones conſiderantur, quarum tum numerator tum denominatur ex determinatione aliqua fit nihil. 173. & ſeq.

Inaurandorum, depingendorumque antiquo more codicum ars inſtauratur. 371.
Iovis & martis coniunctio heliocentrica obſervata ad utriuſque planetæ vim attractivam examinandam. 39. & ſeq.

Magnetis vires explicantur. 329. 330.
Martis coniunctio cum iove. 39. & ſeq.
Mercurii cum ſole congreſſus. 1. & ſeq. quo modo obſervatus. 2. 3. phaſes notatæ. 5. & ſeq. quo modo errores corrigendi, a refractionibus inter obſervandum orti. 8. & ſeq. Quam viam tenuerit mercurius in ſole. 13. & ſeq. Coniunctio mercurii cum ſole ex obſervationibus determinata. 17. & ſeq. Determinatur nodus aſcendens orbitæ mercurialis. 20. 21. Determinatur inclinatio orbitæ mercurii ad eclipticam. 21. 22. Obſervationes variæ inter ſe conferuntur ad mercurii motus cognoſcendos. 22. & ſeq. Nodorum motus perquiritur. 29. & ſeq. Meridianorum quorumdam differentiæ ex variis obſervationibus mercurii & ſolis congredientium colliguntur. 36. & ſeq. Alter mercurii cum ſole congreſſus. 57. & ſeq.
Micrometrum nova ratione adhibitum ad cæleſtes obſervationes. 75. 76.
Motus quo modo ex attractione communicetur. 143. & ſeq. motuum compoſitio & reſolutio exponuntur. 300. 301.

Ophir & tharſis ubi locorum eſſent. 348. & ſeq.

Phoſphori quamplurimi inventi. 500. & ſeq. Quo modo

per-

perquirendi. 501. & ſeq. Phoſphororum diviſio in foſſiles, vegetantes, animales. 506. Foſſiles multi, qui hactenus incogniti fuerant, enumerantur. 506. & ſeq. Vegetantes phoſphori recens detecti. 511. & ſeq. Item animales multi. 514. & ſeq.
Potentia in agitandis corporibus quid ſit, quidve agat. 297. 298. Potentiæ variæ definiuntur & explicantur. 298. 299.
Preſſio per tempus continuata in velocitatem abit; & quo modo id fiat. 299. 300. quo modo in tempus ducta proportionalis ſit velocitati. 446. 447. non eſt preſſio ducenda in tempus, ſi motus ſit æquabilis. 447.

Radio oſculi quomodocumque dato per curvam deſcribendam, curvam ipſam deſcribere. 159. & ſeq.

Sinenſes populi an ab ægyptiis manaverint. 340. & ſeq.
Solis & mercurii congreſſio. 1. & ſeq.

Thermometrorum noviſſima correctio proponitur. 233. Scutella, qua inſtrui poſſint, primum a Bulffingero inventa. 234. 235. Inſtructa hoc modo perfectiora videntur, & commodiora. 236. & ſeq. Thermometrorum vitium noviſſime detectum. 237. & ſeq. An præſtet thermometra habere undique & perfecte occluſa. 238. 239. Frigus, quo primum conglaciatur aqua, an ubique gentium ſit idem. 239. 240. De noviſſima thermometrorum correctione iudicium a Muſſchenbroekio quæſitum. 243. & ſeq. Muſſchenbroekii iudicium. 246. & ſeq.

Velocitas quid ſit & quotuplex. 296. 297. quo modo a preſſione oriatur. 299.
Vis inertiæ quid ſit. 296. vis attractiva quare in infinitum propagetur. 321.
Vis viva velocitatis quadrato æſtimanda eſt. 154. & ſeq. Vis dividitur in vivam & mortuam. 289. 290. Quo modo utraque metienda ſit. 290. 291. Hiſtoria quæſtionis de vi viva. 290. 291. Quam proportionem habeant foveæ in molli maſſa a cadentibus globis excavatæ. 292. 293. Vires vivæ in corporibus nullæ ſunt. 295. Quo modo intelligi vis viva poſſit, ut vel quadrato velocitatis, vel

vel velocitate ipſa æſtimanda ſit. 295. Ad motum æquabilem habendum nulla vi viva opus eſt. 302. ne ad motus quidem illos, qui a gravitate oriuntur. 302. 303. ne ad illos quidem, qui ex colliſione oriuntur. 304. & ſeq. neque ad illos, qui generantur ab elaſtris. 309. 311. Poleni experimentum explicatur. 310. 311. 312. Carteſianorum ſententia propter analogiam & ſimplicitatem anteponitur ſententiæ Leibnitianorum. 312. 313. Eadem virium quantitas melius conſervatur, poſita Carteſii ſententia. 313. 314. Motus liberi hanc virium conſervationem non turbant. 314. Pro varia ſignificatione, quam quis tribuit nomini vis vivæ, poteſt vis viva & velocitatis quadrato, & velocitate ipſa æſtimari. 314. 315. Argumentum Bernullii de vi viva expenditur. 385. & ſeq. Quid de vi viva ex elaſtrorum ſeriebus conſtet. 431. & ſeq. an ſit proportionalis ſeriei, a qua gignitur. 432. 433. 454. & ſeq. an temporis ratio in vi viva metienda haberi debeat. 453. 454. An vis viva ulla ſit in natura. Quæſtio iterum proponitur. 457. An conſtet de vi viva ex ſpatiis, quæ corpora ſurſum iacta excurrunt. 458. & ſeq. an ex foveis, quas cadentes globi faciunt. 460. 461. Difficultas contra Leibnitianos proponitur. 467.

Vis repulſiva communis particularum omnium. 321. Hinc impenetrabilitas & extenſio corporum. 322. 323. Hinc fluidorum reſiſtentia contra comprimentes cauſas. 323. Hinc elaſticitas corporum & mollitudo. 324. Multa alia per hanc vim modo repulſivam, modo attractivam explicantur. 326. 327. Vi repulſiva continuitas corporis tollitur. 328.

MONITUM.

Planiſphærium Camaldulenſe, de quo agitur pag. 378. 379, minus certæ antiquitatis eſſe, Opuſculi Auctor modo intellexit. Id ergo Lectorem moneri vult, ne argumento, quod ex illius antiquitate ductum eſt, plus tribuatur, quam oportet. Ceterum rem ipſe totam in peculiari opere fuſius tractabit.

Vidit

Vidit D. Paulus Philippus Premoli Cler. Regul. S. Pauli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnit. pro SS. D. N. Benedicto XIV Archiepiſcopo Bononiæ.

Ad A. R. Dominum Ioannem Antonium Caſtelvetri Curatum S. Margaritæ, & Vicarium perpetuum eiuſdem Monaſterii, ut nomine S. Officii videat, & referat.

Fr. Thomas Maria de Angelis S. Officii Bononiæ Generalis Inq.

Die 15 *Iulii* 1747

TErtiam partem ſecundi Tomi Commentariorum Academiæ Scientiarum, & Artium bononienſis Inſtituti plurima academicorum opuſcula proferentem, attente legi, & quod in lucem prodeat utiliſſimum reputo. Etenim, præterquamquod in ea obſervetur quidquid bonis moribus, ac religioni conſonum eſt, res omnis diſciplinas illuſtrat, & mirum quantum illas auget, ac promovet. Accedit rem totam ſummi Sacerdotis rem eſſe, ac ipſi fore gratiſſimum, ut evulgetur; cum enim ipſe Academiam iam prope extinctam ſuſcitaverit, ac amore ſummo complectatur, & foveat, quicquid ab academicis profertur, ab ipſo profectum eſſe putandum eſt. Cenſeo itaque, ſi Paternitati Veſtræ Revmæ placuerit, eſſe evulgandam.

D. Ioh. Antonius Andreas Caſtelvetri Parochus, & Vicarius perpetuus Parœciæ, & Monaſterii S. Margaritæ.

16 *Auguſti* 1747.

Attenta præmiſſa atteſtatione

IMPRIMATUR.

F. Seraphinus Maria Maccarinelli Vicarius Gen. S. Off. Bononiæ.

Errata			*Corrige.*
Pag.	*lin.*		
viii	29	idpſum	idipſum
3	37	facilime	facillime
31	36	ipſorum	ipſarum
58	18	viſebantur	videbatur
63	27	britanico	britannico
68	12	indicio definitiva	iudicio definita
73	2	prodiit	prodidit
	23	coſtellatione	conſtellatione
83	1	celeberimi	celeberrimi
145	37	ſucceſſive	ſucceſſivæ
146	31	ſupponimus	ſupponimus,
147	30	vi,	vi?
150	8	conſequitur	conſequitur,
152	14	ſint	ſint,
157	30	B =	A =
165	13	potet	poteſt
166	30	accedet	accidet
167	8	eſt	eſt,
171	2	redigantur	redigantur,
178	17	omiſſo	omiſſa
179	13	iterum	iterum,
222	29	cepi	cœpi
231	26	centro	centro,
291	40	Mairanius	Mairanius,
293	5	eſſet	eſſet,
204	40	occurrunt	occurrunt,
310	12	explicatur,	explicatur
313	4	producat	producant
315	18	tamen	tamen,
316	17	icciro	iccirco
324	2	AC	AC,
384	21	ſeſe	ſeſe,
394	37	urgeant	urgeant,
400	18	quæ	quod
405	4	excelluiſſent	excelluiſſent,